



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

DOCTORADO EN INGENIERÍA MECÁNICA Y
ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL

TESIS DOCTORAL

ANÁLISIS Y CARACTERIZACIÓN HOLISTA DE UN SISTEMA ROTATIVO COMPLEJO

AUTOR:

JOSÉ MARÍA MARÍN LÓPEZ

DIRECTORES:

Dr. JUAN CARLOS GARCÍA PRADA

Dr. HIGINIO RUBIO ALONSO

LEGANÉS, MAYO DE 2009

TESIS DOCTORAL

ANÁLISIS Y CARACTERIZACIÓN HOLISTA DE UN SISTEMA ROTATIVO COMPLEJO

Autor: José María Marín López

Directores: Dr. Juan Carlos García Prada
Dr. Higinio Rubio Alonso

Tribunal Calificador:

Presidente:

Vocales:

Vocal Secretario:

Calificación:

Leganés, de de

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que directa o indirectamente, en cualquier tiempo o lugar, me han ayudado a culminar la realización de esta Tesis Doctoral.

A mis Directores de Tesis, Dr. Juan Carlos García Prada, Catedrático del Departamento de Ingeniería Mecánica y al Dr. Higinio Rubio Alonso, profesor también de este departamento, por sus valiosas ideas, sus acertados consejos y su inestimable colaboración a la hora de analizar los hechos.

He de mencionar de una forma muy especial a Higinio por su hospitalidad, generosidad y dedicación, cualidades que han conseguido, en determinadas ocasiones, que llegue a lamentar el finalizar este trabajo.

Por último, agradecer el apoyo de toda mi familia, especialmente a mi esposa María, quien pacientemente ha soportado todo el tiempo que he dedicado a esta tarea.

Índice general

LISTA DE SÍMBOLOS	V
ÍNDICE DE FIGURAS	VII
ÍNDICE DE TABLAS	XXV
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. ÁMBITO DE LA TESIS	1
1.2. OBJETIVOS DE LA TESIS	3
1.3. FASES DEL DESARROLLO DE LA TESIS	4
1.4. ESTADO DE LA TÉCNICA	5
1.5. ESTRUCTURA DEL DOCUMENTO	11
2. VIBRACIONES MECÁNICAS EN MÁQUINAS ROTATIVAS	15
2.1. EL FENÓMENO VIBRATORIO EN MÁQUINAS	15
2.2. TRATAMIENTO DE LA SEÑAL VIBRATORIA	20
2.2.1. La transformada de Fourier	20
2.2.2. PSD y potencia espectral	27
2.2.3. Envolvente y espectro de la envolvente	28
2.2.4. Spike-Energy	36
2.2.5. Análisis Wavelet	37
2.3. COMPORTAMIENTO VIBRATORIO DE LOS RODAMIENTOS CON DE- FECTOS LOCALIZADOS	50
2.3.1. Frecuencias rotacionales	51
2.3.2. Zonas del espectro de defectos	54
2.3.3. Evolución espectral del desarrollo de los defectos	55
2.3.4. Factores que modifican las frecuencias de defecto	58
3. MODELO DINÁMICO DEL RODAMIENTO	61
3.1. CINEMÁTICA Y DINÁMICA DE LOS RODAMIENTOS	61

3.2. MODELO CON 2 G.D.L.	68
3.2.1. Ecuaciones cartesianas	68
3.2.2. Ecuaciones diferenciales del movimiento del modelo con 2 G.D.L.	80
3.3. MODELO 2 + Z G.D.L.	81
3.3.1. Modelado del sistema. Ecuaciones de Newton	81
3.3.2. Modelado del sistema. Ecuaciones de Lagrange	83
3.4. PARTICULARIZACIÓN DE LAS ECUACIONES A MODELOS CON 5 y 11 G.D.L.	91
3.4.1. Modelo con ecuaciones de Newton	91
3.4.2. Modelo con ecuaciones de Lagrange	93
3.5. INCORPORACIÓN DE DEFECTOS LOCALIZADOS	95
4. MODELO DE LA EVOLUCIÓN TÉRMICA DEL RODAMIENTO ORIGINADA POR EL PAR DE ROZAMIENTO	101
4.1. MOMENTO RESISTENTE DEL RODAMIENTO	101
4.1.1. Cálculo del momento resistente del rodamiento. Método simplificado SKF	102
4.1.2. Cálculo del momento resistente del rodamiento. Método ajustado SKF	103
4.1.3. Método generalizado según Palmgren	104
4.1.4. Cálculo numérico del par de rozamiento	108
4.2. DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN EL RODAMIENTO	112
4.2.1. Conducción	112
4.2.2. Convención	114
4.2.3. Radiación	116
4.3. CÁLCULO DE TEMPERATURAS EN RÉGIMEN ESTACIONARIO	117
4.4. ECUACIÓN DEL CALOR	127
5. METODOLOGÍA DE LA SIMULACIÓN NUMÉRICA	141
5.1. SIMULACIÓN DINÁMICA DEL RODAMIENTO	141
5.1.1. Modelo de 2 G.D.L.	142
5.1.2. Modelo de 5 G.D.L.	156
5.1.3. Modelo de 11 G.D.L.	164
5.1.4. Diseño de simulaciones	175
5.2. SIMULACIÓN TÉRMICA DEL RODAMIENTO	187
6. METODOLOGÍA DE LOS ENSAYOS EXPERIMENTALES	191
6.1. SELECCIÓN DE RODAMIENTOS	191

6.2.	GENERACIÓN DE DEFECTOS EN LOS RODAMIENTOS	192
6.3.	SISTEMA DE MEDIDA	193
6.3.1.	Medida de Vibraciones	193
6.3.2.	Medida de Temperaturas	199
6.3.3.	Ordenador	202
6.3.4.	Cableado	202
6.3.5.	Banco de ensayos de rodamientos	202
6.4.	DISEÑO DE EXPERIMENTOS	209
6.4.1.	Ensayos vibratorios	209
6.4.2.	Ensayos amortiguamiento	218
6.4.3.	Ensayos térmicos	228
7.	RESULTADOS. VALIDACIÓN DE LOS MODELOS NUMÉRICOS	237
7.1.	INTRODUCCIÓN	237
7.2.	SEÑALES EXPERIMENTALES	237
7.2.1.	Rodamiento de 3 bolas con defecto en el anillo interno, carga de 1500 N. y velocidad de giro de 20 Hz	238
7.2.2.	Rodamiento de 9 bolas con defecto en el anillo externo, carga de 1000 N. y velocidad de giro de 30 Hz	242
7.2.3.	Análisis comparativo de rodamiento de 3 bolas con rodamiento de 9 bolas sin defecto, carga de 1500 N. y velocidad de giro de 20 Hz	244
7.2.4.	Análisis comparativo de la aparición de defecto en el rodamiento. Rodamiento de 3 bolas	249
7.2.5.	Análisis comparativo de la aparición de defecto en el rodamiento. Rodamiento de 9 bolas	253
7.2.6.	Influencia de la carga y velocidad en la señal	256
7.3.	SEÑALES SIMULADAS	261
7.3.1.	Modelo de 5 GDL (Rodamiento de 3 bolas) con defecto en el anillo interno, carga de 1500 N. y velocidad de giro de 20 Hz	261
7.3.2.	Modelo de 11 GDL (Rodamiento de 9 bolas) con defecto en el anillo interno, carga de 1500 N. y velocidad de giro de 20 Hz	265
7.3.3.	Modelo 5 GDL (Rodamiento de 3 bolas) con defecto en el anillo externo, carga de 1000 N. y velocidad de giro de 30 Hz	268
7.3.4.	Modelo 11 GDL (rodamiento de 9 bolas) con defecto en el anillo externo, carga de 1000 N. y velocidad de giro de 30 Hz	271
7.3.5.	Análisis comparativo de modelo 5 GDL (rodamiento de 3 bolas) con modelo de 11 GDL (rodamiento de 9 bolas) sin defecto	274

7.3.6.	Análisis comparativo de la aparición de defecto en el rodamiento. Modelo de 5 GDL	277
7.3.7.	Análisis comparativo de la aparición de defecto en el rodamiento. Modelo de 11 GDL.	281
7.3.8.	Modelo de rodamiento de 3 bolas con presencia de defecto en la pista interior y la pista exterior para varias velocidades	284
7.3.9.	Modelo de rodamiento de 9 bolas con presencia de defecto en la pista interior y la pista exterior, para varias velocidades	293
7.4.	CONTRASTACIÓN ENTRE SEÑALES EXPERIMENTALES Y SEÑALES SIMULADAS	301
7.5.	EVOLUCIÓN DE LA POTENCIA ESPECTRAL TOTAL. SEÑALES EXPERIMENTALES	306
7.5.1.	Análisis vibratorio del rodamiento con 3 bolas	307
7.5.2.	Análisis vibratorio del rodamiento completo	310
7.6.	EVOLUCIÓN DE LA POTENCIA ESPECTRAL TOTAL. SEÑALES SIMULADAS	313
7.6.1.	Análisis vibratorio del modelo de rodamiento de 5 GDL	314
7.6.2.	Análisis vibratorio del modelo de rodamiento de 11 GDL	317
7.7.	EVOLUCIÓN DE LA VIBRACIÓN EN EL TIEMPO	320
7.8.	EVOLUCIÓN DE LA TEMPERATURA EN EL TIEMPO	321
7.9.	RELACIÓN ENTRE EL MODELO DINÁMICO Y EL MODELO TÉRMICO	327
7.10.	CÁLCULO DEL PAR RESISTENTE A PARTIR DEL MODELO TÉRMICO	331
8.	CONCLUSIONES	335
8.1.	CONCLUSIONES	335
8.2.	TRABAJOS FUTUROS	340
A.	EVOLUCIÓN DE LA VIBRACIÓN EN EL TIEMPO	341
B.	EVOLUCIÓN DE LA TEMPERATURA EN EL TIEMPO	351
	Bibliografía	391

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Ángulo de contacto del rodamiento	grados
α_i	Posición angular de la bola i	grados
α_{in}	Posición angular del rotor	grados
α_{cage}	Posición angular de la jaula del rodamiento	grados
α_{di-Out}	Posición angular del inicio del defecto sobre el anillo externo	grados
α_{df-Out}	Posición angular del final del defecto sobre el anillo externo	grados
α_{di_in}	Posición angular inicial del defecto sobre el anillo interno	grados
a	Semieje menor de la elipse de contacto	mm.
b	Semieje mayor de la elipse de contacto	mm.
$BPFO$	Frecuencia de paso de bola por defecto en anillo externo	Hz
$BPMI$	Frecuencia de paso de bola por defecto en anillo interno	Hz
BSF	Frecuencia de un defecto localizado en el elemento rodante	Hz
C_{in}	Coefficiente de rigidez contacto bola-pista interna	$N/mm^{\frac{3}{2}}$
C_{out}	Coefficiente de rigidez contacto bola-pista externa	$N/mm^{\frac{3}{2}}$
C	Capacidad dinámica del rodamiento	N
C_o	Capacidad estática del rodamiento	N
D_{in}	Coefficiente de amortiguamiento contacto bola-pista interna	N·s/m
D_{out}	Coefficiente de amortiguamiento contacto bola-pista externa	N·s/m
dm	Diámetro medio del rodamiento	mm
δ_{in}	Deformación en contacto bola-pista interna	mm.
δ_{out}	Deformación en contacto bola-pista externa	mm.
E_k	Energía cinética	Julios
E_p	Energía potencial	Julios
ϵ	Factor de distribución de carga	
f_{in}	Frecuencia de giro del anillo interno	Hz
f_{rotor}	Frecuencia de giro del rotor	Hz
f_{cage}	Frecuencia de giro de la jaula	Hz
F_u	Fuerza de desequilibrio que actúa sobre el rotor	Newton
F_{ex}	Fuerza exterior, según el eje x , que actúa sobre el rotor	Newton
F_{ey}	Fuerza exterior, según el eje y , que actúa sobre el rotor	Newton
$F_{(\rho)}$	Curvatura diferencia	
F_r	Fuerza radial aplicada al rodamiento	N.
FTF	Frecuencia de la jaula (Fundamental Train Frequency)	Hz

h	Holgura radial	mm.
h_v	Coefficiente de convención	$W/K \cdot m^2$
I	Momento de inercia de la bola	$kg \cdot m^2$
I_{rotor}	Momento de inercia del rotor	$kg \cdot m^2$
I_{in}	Momento de inercia del anillo interno	$kg \cdot m^2$
I_{out}	Momento de inercia del anillo externo	$kg \cdot m^2$
k	Conductividad térmica del material	$W/K \cdot m$
L_{in}	Vector de posición del centro de masas del anillo interno	
L_{d_in}	Longitud del arco del defecto en la pista del anillo interno	mm.
m_{out}	Masa del anillo externo	kg
m_{in}	Masa del anillo interno	kg
m_{bo}	Masa de la bola	kg
m_{rotor}	Masa del rotor	kg
r_{in}	Radio del anillo interno	m
M_r	Par de rozamiento debido a la fricción	$N \cdot mm$
n	Velocidad de giro del rotor	r.p.m.
ν	Viscosidad cinemática del lubricante	mm^2/s
ξ	Relación de amortiguamiento	
\dot{q}	Potencia calorífica generada en el rodamiento	watios
R_{out}	Radio del anillo externo	m
r_{bo}	Radio de la bola	m
r_i	Vector de posición del centro de la bola i	
ρ_i	Vector de posición de la bola i respecto al cdg del anillo interno	
ρ	Densidad del material	k/m^3
r_i^o	Posición inicial del centro de la bola i respecto al SR global	mm.
r_{in_d}	Radio del fondo del defecto sobre el anillo interno	mm.
R_{out_d}	Radio del fondo del defecto sobre el anillo externo	mm
$\sum \rho$	Curvatura suma	mm^{-1}
σ_{max}	Tensión máxima en el área de contacto	N/mm^2
Vr_i^o	Velocidad inicial de la bola i	m/s
Vx_{in}^o	Velocidad inicial del anillo interno según el eje x	m/s
Vy_{in}^o	Velocidad inicial del anillo interno según el eje y	m/s
ω_{in}	Velocidad de giro del motor	r.p.m.
ω_{cage}	Velocidad de giro de la jaula	r.p.m.
ω_d	Frecuencia natural amortiguada	Hz
ω_n	Frecuencia natural del sistema	Hz
x_{in}, y_{in}	Coordenadas del centro del anillo interno respecto al SR inercial	
x_{in}^o, y_{in}^o	Coordenadas iniciales del centro del anillo interno	
Z	Número de bolas	

Índice de figuras

2.1. Espectro de una máquina con varios defectos	16
2.2. Representación de temporal y frecuencial de la vibración generada por: a) un diapasón, b) un motor de explosión y c) una máquina compleja	17
2.3. Representación temporal de la señal de vibración generada por: a) un engranaje con un diente defectuoso y b) por un engranaje desequilibrado	18
2.4. Relación entre los dominios temporal y frecuencial	19
2.5. Transformada discreta de Fourier de una señal analógica	22
2.6. Representación espectral de la señal muestreada	24
2.7. Efecto generado al reducir la frecuencia de muestreo	24
2.8. Efecto leakage	25
2.9. Aplicación de la ventana temporal a una señal	26
2.10. Efecto Picket-Fence	27
2.11. Comparación del espectro de vibración de un rodamiento nuevo y defectuoso .	29
2.12. Señal temporal del rodamiento defectuoso	29
2.13. Envolvente señal temporal de rodamiento defectuoso	30
2.14. Espectro de la envolvente de la señal temporal de rodamiento defectuoso . . .	30
2.15. Proceso de demodulación	31
2.16. Esquema del proceso de análisis de una señal mediante Spike Energy	36
2.17. Señal de frecuencia variable en el tiempo	37
2.18. Espectro de señal de frecuencia variable en el tiempo	38
2.19. Transformada STFT	38
2.20. Representación tiempo frecuencia, a) mejor resolución temporal ; b) mejor resolución frecuencial	39
2.21. Diferentes tipos de transformaciones	40
2.22. Representación de una wavelet tipo Daubechies 10	40
2.23. Dilatación y traslación de una wavelet madre	41
2.24. Proceso del análisis wavelet I	41

2.25. Proceso del análisis wavelet II	42
2.26. Proceso del análisis wavelet III	42
2.27. Proceso del análisis wavelet IV	42
2.28. Wavelet 'sombrero mejicano' y su densidad espectral	44
2.29. Esquema representativo del proceso de la transformada wavelet	45
2.30. Wavelet Haar	45
2.31. Wavelets de la familia Daubechies	46
2.32. Wavelets Biortogonales (muestra)	46
2.33. Wavelets de la familia Coiflets	46
2.34. Wavelets dela familia Symmlets	47
2.35. Wavelet Morlet	47
2.36. Wavelet Mexican hat	47
2.37. Procedimiento seguido en la wavelet discreta I	48
2.38. Procedimiento seguido en la wavelet discreta II	49
2.39. Procedimiento seguido en la transformada wavelet discreta inversa	50
2.40. Parámetros cinemáticos del rodamiento	51
2.41. Espectro de frecuencia característico de la vibración generada por un rodamiento con defectos	54
2.42. Espectro representativo del estado I de la evolución del defecto en el rodamiento	55
2.43. Espectro representativo del estado II de la evolución del defecto en el rodamiento	56
2.44. Espectro representativo del estado III de la evolución del defecto en el rodamiento	57
2.45. Espectro representativo del estado IV de la evolución del defecto en el rodamiento	58
3.1. Componentes de un rodamiento de bolas	61
3.2. Cinemática del rodamiento	62
3.3. Dinámica del rodamiento	64
3.4. Distribución de carga en rodamiento con holgura	66
3.5. Factor $J_r(\varepsilon)$ para a: rodamientos de bolas, b: rodamientos de rodillos	67
3.6. Modelo esquemático de un rodamiento de 3 bolas	68
3.7. Modelo masa-muelle del rodamiento	69
3.8. Radios de curvatura en el contacto bola-anillo interno	69
3.9. Dimensiones del rodamiento de bolas 6206	70
3.10. Valores de los parámetros a^* , b^* y δ^* para contacto bola-pista interna	71

3.11. Distribución de tensiones en el área de contacto	71
3.12. Curvaturas en contacto bola-pista externa	73
3.13. Valores de los parámetros a^* , b^* y δ^* para contacto bola-pista externa	73
3.14. Modelo de rodamiento propuesto	75
3.15. Diagrama de solido libre anillo interno (2 GDL)	76
3.16. Fuerzas contacto bola-anillos interno/externo	77
3.17. Deformación en contacto bola-anillo interno	78
3.18. Contacto bola-anillos interno/externo	79
3.19. Diagrama sólido libre de una bola	82
3.20. Fuerzas sobre la bola 'i'	83
3.21. Defecto en anillo externo	96
3.22. Defecto en anillo externo	97
3.23. Defecto en anillo interno	98
3.24. Defecto en anillo interno	98
4.1. Valores del par resistente según la fuerza radial (0-5000 N.)	111
4.2. Valores del par resistente según la fuerza radial (0-500 N.)	111
4.3. Flujo de calor a través de una superficie plana	113
4.4. Flujo de calor a través de una superficie cilíndrica	114
4.5. Sistema rodamiento-eje-bridá	117
4.6. Nodos seleccionados para el cálculo de temperaturas en el rodamiento	118
4.7. Distribución de superficies para el cálculo térmico del rodamiento	118
4.8. Diagrama del flujo calorífico en el rodamiento	119
4.9. Variación de la temperatura con la potencia calorífica disipada	122
4.10. Gráfica de detalle de 0 - 50 W	122
4.11. Diagrama flujo calorífico en anillo interno	123
4.12. Variación de la temperatura con la potencia calorífica disipada (0-150 W)	126
4.13. Variación de la temperatura con la potencia calorífica disipada (0-50 W)	127
4.14. Elemento diferencial con transferencia de calor	127
4.15. Sistema real y modelo utilizado para simulación térmica	131
4.16. Modelo para simulación térmica explosionado	132
4.17. Identificación de superficies en el modelo (I)	134
4.18. Identificación de superficies en el modelo (II)	134
4.19. Superficies que actúan como fuentes de calor	136
4.20. Elemento tetraédrico parabólico de 10 nodos	137

4.21. Mallado del modelo brida-rodamiento-eje	137
4.22. Detalle del Solver del Cosmos	138
4.23. Resultados de una simulación del modelo	138
4.24. Curvas de calentamiento generadas por el modelo de elementos finitos	139
5.1. Diagrama de bloques del modelo Simulink (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)	142
5.2. Bloque Movimiento (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)	143
5.3. Diagrama de bloques interior del Bloque Movimiento (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)	143
5.4. Angulo girado por la <i>bola1</i> del rodamiento modelado	144
5.5. Generador de señal de Simulink	144
5.6. Implementación en Simulink de la ecuación 5.2	144
5.7. Bloques bola de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)	145
5.8. Diagrama de bloques interior del bloque bola de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)	146
5.9. Bloque A. Interno, x_{in} de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)	146
5.10. Diagrama de bloques interior del bloque x_{in} de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)	147
5.11. Bloque A. Interno, y_{in} de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)	147
5.12. Interior del bloque y_{in} de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)	148
5.13. Bloques de resultados (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)	148
5.14. Ejemplo de gráficos de resultados	148
5.15. Ejemplo de gráficos de resultados	149
5.16. Diagrama de bloques del modelo en Simulink (Newton, 2 G.D.L., 9 bolas)	149
5.17. Bloque Movimiento (Newton, 2 G.D.L., 9 bolas)	150
5.18. Diagrama de bloques interior del Bloque Movimiento (Newton, 2 G.D.L., 9 bolas)	151
5.19. Bloques bola de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 9 bolas)	152
5.20. Diagrama de bloques interior del bloque bola de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 9 bolas)	153
5.21. Bloque A. Interno, x_{in} de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 9 bolas)	153
5.22. Diagrama de bloques interior del bloque x_{in} de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 9 bolas)	154
5.23. Bloque A. Interno, y_{in} de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 9 bolas)	155
5.24. Diagrama de bloques interior del bloque y_{in} de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 9 bolas)	155
5.25. Diagrama de bloques del modelo en Simulink (Newton, 5 G.D.L., 3 bolas)	156
5.26. Bloques bola de Simulink (Newton, 5 G.D.L., 3 bolas)	157

5.27. Diagrama de bloques interior del bloque bola de Simulink (Newton, 5 G.D.L., 3 bolas)	158
5.28. Bloque A. Interno, x_{in} de Simulink (Newton, 5 G.D.L., 3 bolas)	158
5.29. Diagrama de bloques interior del bloque x_{in} de Simulink (Newton, 5 G.D.L., 3 bolas)	159
5.30. Bloque A. Interno, y_{in} de Simulink (Newton, 5 G.D.L., 3 bolas)	159
5.31. Diagrama de bloques interior del bloque y_{in} de Simulink (Newton, 5 G.D.L., 3 bolas)	160
5.32. Bloques bola de Simulink (Lagrange, 5 G.D.L., 3 bolas)	161
5.33. Diagrama de bloques interior del bloque bola de Simulink (Lagrange, 5 G.D.L., 3 bolas)	162
5.34. Bloque A. Interno, x_{in} de Simulink (Lagrange, 5 G.D.L., 3 bolas)	162
5.35. Diagrama de bloques interior del bloque x_{in} de Simulink (Lagrange, 5 G.D.L., 3 bolas)	163
5.36. Bloque A. Interno, y_{in} de Simulink (Lagrange, 5 G.D.L., 3 bolas)	163
5.37. Diagrama de bloques interior del bloque y_{in} de Simulink (Lagrange, 5 G.D.L., 3 bolas)	164
5.38. Diagrama de bloques Simulink (Newton, 11 G.D.L., 9 bolas)	165
5.39. Bloque Movimiento de Simulink (Newton, 11 G.D.L., 9 bolas)	165
5.40. Bloques bola de Simulink (Newton, 11 G.D.L., 9 bolas)	166
5.41. Diagrama de bloques interior del bloque bola de Simulink (Newton, 11 G.D.L., 9 bolas)	167
5.42. Bloque A. Interno, x_{in} de Simulink (Newton, 11 G.D.L., 9 bolas)	167
5.43. Diagrama de bloques interior del bloque x_{in} de Simulink (Newton, 11 G.D.L., 9 bolas)	168
5.44. Bloque A. Interno, y_{in} de Simulink (Newton, 11 G.D.L., 9 bolas)	169
5.45. Diagrama de bloques interior del bloque y_{in} de Simulink (Newton, 11 G.D.L., 9 bolas)	170
5.46. Diagrama de bloques Simulink (Lagrange, 11 G.D.L., 9 bolas)	170
5.47. Bloques Movimiento de Simulink (Lagrange, 11 G.D.L., 9 bolas)	171
5.48. Bloques bola de Simulink (Lagrange, 11 G.D.L., 9 bolas)	172
5.50. Bloque A. Interno, x_{in} de Simulink (Lagrange, 11 G.D.L., 9 bolas)	172
5.49. Diagrama de bloques interior del bloque bola de Simulink (Lagrange, 11 G.D.L., 9 bolas)	173
5.51. Diagrama de bloques interior del bloque x_{in} de Simulink (Lagrange, 11 G.D.L., 9 bolas)	174
5.52. Bloque A. Interno, y_{in} de Simulink (Lagrange, 11 G.D.L., 9 bolas)	174

5.53. Diagrama de bloques interior del bloque y_{in} de Simulink (Lagrange, 11 G.D.L., 9 bolas)	175
5.54. Configuración de los parámetros del Solver de Simulink	177
5.55. Secuencia seguida en la simulación térmica	189
6.1. Herramienta para generar los defectos en las pistas de rodadura del rodamiento	192
6.2. Banco de ensayos, sistema de medida y control utilizados en los ensayos experimentales con rodamientos	195
6.3. Principales dimensiones de los acelerómetros utilizados	196
6.4. Amplificador de carga brüel&kjaer 2635	197
6.5. Diagrama de bloques del amplificador de carga brüel&kjaer 2635	197
6.6. Curvas de respuesta en frecuencia del amplificador de carga brüel&kjaer 2635	198
6.7. Parte frontal y trasera del amplificador brüel&kjaer 2693	198
6.8. Termopar de tipo K empleado en las medidas de temperaturas	200
6.9. Unidad de adquisición de datos Agilent 34970A	201
6.10. Pirómetro Testo 860-T1	201
6.11. Banco de ensayo de rodamientos	203
6.12. Bastidor del banco de ensayo de rodamientos	203
6.13. Características y dimensiones de los soportes del rotor del banco de ensayos .	204
6.14. Sistema de fijación del rodamiento al rotor	204
6.15. Aplicación de la carga al rodamiento ensayado	205
6.16. Características de las celulas de carga empleadas en el banco de ensayos . . .	205
6.17. Brida o alojamiento del rodamiento	206
6.18. Modo de la quinta frecuencia propia de la brida	207
6.19. Elementos que componen el banco de ensayos de rodamientos, modelo	207
6.20. Elementos que componen el banco de ensayos de rodamientos, banco real . .	208
6.21. Variador de frecuencia para control de velocidad del rotor	208
6.22. Señales temporales obtenidas muestreando 10 kHz.	210
6.23. Espectros de la señal temporal obtenida muestreando a 10 kHz.	211
6.24. Espectros de la envolvente de la señal temporal obtenida muestreando a 10 kHz.	211
6.25. Señales temporales obtenidas con distintas ganancias	212
6.26. Espectros de las señales temporales obtenidas con distintas ganancias	213
6.27. Espectros de las envolventes de las señales temporales obtenidas con distintas ganancias	213
6.28. Sistema masa-muelle-amortiguador	218

6.29. Decrecimiento de una señal con amortiguamiento débil	221
6.30. Señal con varios grados de amortiguamiento	221
6.31. Respuesta en frecuencia de un sistema de 1 GDL	223
6.32. Representación gráfica del ancho de banda	224
6.33. Ensayos de amortiguamiento	226
6.34. Señal temporal amortiguada del ensayo de impacto	227
6.35. Espectro en frecuencia de la señal amortiguada de la Figura 6.34	227
6.36. Modelo del conjunto brida-rodamiento para el estudio térmico	229
6.37. Longitud recorrida por la bola sobre las pistas de rodadura	231
6.38. Disposición del equipo para los ensayos de medida Temperatura.Vibración . .	233
6.39. Posición del termopar T_B sobre la brida	233
6.40. Posición termopar T_R sobre el rotor	234
6.41. Útil diseñado para la medida de la temperatura de la bola	235
6.42. Temperatura de la bola del rodamiento	235
6.43. Punto de colocación del termopar en la brida, solidario al anillo externo . . .	236
7.1. Señal temporal de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interna, con 3 bolas.	238
7.2. Envolvente de la señal temporal de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interna, con 3 bolas.	238
7.3. Espectro de la señal temporal representada en la Figura 7.1	239
7.4. Espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.2 .	239
7.5. Espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.2 .	239
7.6. Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.2	240
7.7. Mapa wavelet de la señal temporal representada en la Figura 7.1	241
7.8. Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.2	241
7.9. Señal temporal de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista externa. .	242
7.10. Envolvente de la señal temporal de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista externa.	242
7.11. Espectro de la señal temporal representada en la Figura 7.9	243
7.12. Espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.10	243
7.13. Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.10	243
7.14. Wavelet de la señal temporal representada en la Figura 7.9	245

7.15. Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.9	245
7.16. Señales temporales correspondientes a rodamientos de tres y nueve bolas . . .	246
7.17. Espectros de las señales temporales correspondientes a rodamientos de tres y nueve bolas	246
7.18. Espectros de las envolventes de las señales temporales correspondientes a rodamientos de tres y nueve bolas	247
7.19. Mapa wavelet de la señal temporal del rodamiento de 3 bolas	247
7.20. Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal del rodamiento de 3 bolas	248
7.21. Mapa wavelet de la señal temporal del rodamiento de 9 bolas	248
7.22. Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal del rodamiento de 9 bolas	249
7.23. Señales temporales correspondientes a rodamientos con distintos defectos . . .	250
7.24. Espectros de las señales temporales representadas en la Figura 7.23	250
7.25. Espectros de las envolventes de las señales temporales representadas en la Figura 7.23	251
7.26. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.23 (Sin defecto)	251
7.27. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.23 (Defecto en pista externa)	252
7.28. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.23 (Defecto en pista interna)	252
7.29. Señales temporales correspondientes a rodamientos con distintos defectos . . .	253
7.30. Espectros de las señales temporales representadas en la Figura 7.29	254
7.31. Espectros de las envolventes de las señales temporales representada en la Figura 7.29	254
7.32. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.29 (Sin defecto)	255
7.33. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.29 (Defecto en pista externa)	255
7.34. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.29 (Defecto en pista interna)	256
7.35. Señales temporales de un rodamiento de tres bolas, con defecto en la pista interna, girando a distintas velocidades	257
7.36. Espectros de las señales temporales representadas en la Figura 7.35	257
7.37. Espectros de las envolventes de las señales temporales representadas en la Figura 7.35	258
7.38. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.35 (300 r.p.m.) girando a 300 r.p.m.	258
7.39. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.35 (600 r.p.m.)	259
7.40. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.35 (1200 r.p.m.)	259
7.41. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.35 (1800 r.p.m.)	260
7.42. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.35 (2400 r.p.m.)	260

7.43. Señal temporal de un modelo de rodamiento con defecto en la pista interna, con 3 bolas.	261
7.44. Envolvente de la señal temporal de un modelo de rodamiento con defecto en la pista interna, con 3 bolas.	262
7.45. Espectro de la señal temporal representada en la Figura 7.43	262
7.46. Espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.44	262
7.47. Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.44	263
7.48. Mapa wavelet de la señal temporal representada en la Figura 7.43	264
7.49. Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.44	264
7.50. Señal temporal de un modelo de rodamiento con defecto en la pista interna, con 9 bolas.	265
7.51. Envolvente de la señal temporal de un modelo de rodamiento con defecto en la pista interna, con 9 bolas.	265
7.52. Espectro de la señal temporal representada en la Figura 7.50	266
7.53. Espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.51	266
7.54. Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.51. Los picos finalizados con puntos rojos son los armónicos de la frecuencia de fallo $BPFI = 108'6$ Hz	266
7.55. Mapa wavelet de la señal temporal representada en la Figura 7.50	267
7.56. Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.51	267
7.57. Señal temporal de un modelo de rodamiento con defecto en la pista externa, con 3 bolas.	268
7.58. Envolvente de la señal temporal de un modelo de rodamiento con defecto en la pista externa, con 3 bolas.	268
7.59. Espectro de la señal temporal representada en la Figura 7.57	269
7.60. Espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.58	269
7.61. Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.58. Los picos finalizados con puntos rojos son los armónicos de la frecuencia de fallo $BPFE = 35'7$ Hz	269
7.62. Mapa wavelet de la señal temporal representada en la Figura 7.57	270
7.63. Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.58	270
7.64. Señal temporal de un modelo de rodamiento con defecto en la pista externa, con 9 bolas.	271

7.65. Envolvente de la señal temporal de un modelo de rodamiento con defecto en la pista externa, con 9 bolas.	271
7.66. Espectro de la señal temporal representada en la Figura 7.64	272
7.67. Espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.65	272
7.68. Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.65. Los picos finalizados con puntos rojos son los armónicos de la frecuencia de fallo BPFE = 107'1 Hz	272
7.69. Mapa wavelet de la señal temporal representada en la Figura 7.64	273
7.70. Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.65	273
7.71. Señales temporales correspondientes a modelos de rodamientos de tres y nueve bolas	274
7.72. Espectros de las señales temporales correspondientes a modelos rodamientos de tres y nueve bolas	274
7.73. Espectros de las envolventes de las señales temporales representadas en la Figura 7.71	275
7.74. Mapa wavelet de la señal temporal representada en la Figura 7.71 (Rodamiento de 3 bolas)	275
7.75. Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.71 (Rodamiento de 3 bolas)	276
7.76. Mapa wavelet de la señal temporal representada en la Figura 7.71 (Rodamiento de 9 bolas)	276
7.77. Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.71 (Rodamiento de 9 bolas)	277
7.78. Señales temporales correspondientes a modelos de rodamientos con distintos defectos	278
7.79. Espectros de las señales temporales representadas en la Figura 7.78	278
7.80. Espectros de las envolventes de las señales temporales representadas en la Figura 7.78	279
7.81. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.78 (Sin defecto)	279
7.82. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.78 (Defecto en pista externa)	280
7.83. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.78 (Defecto en pista interna)	280
7.84. Señales temporales correspondientes a modelos de rodamientos con distintos defectos	281
7.85. Espectros de las señales temporales representadas en la Figura 7.84	282
7.86. Espectros de las envolventes de las señales temporales representadas en la Figura 7.84	282
7.87. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.84 (Sin defecto)	283

7.88. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.84 (Defecto en pista externa)	283
7.89. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.84 (Defecto en pista interna)	284
7.90. Señales temporales de un modelo de rodamiento de tres bolas.	285
7.91. Espectros de las señales temporales representadas en la Figura 7.90	285
7.92. Espectros de las envolventes de las señales temporales representadas en la Figura 7.90	286
7.93. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.90 (300 r.p.m.)	286
7.94. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.90 (600 r.p.m.)	287
7.95. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.90 (1200 r.p.m.)	287
7.96. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.90 (1800 r.p.m.)	288
7.97. Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.90 (2400 r.p.m.)	288
7.98. Señales temporales de un modelo de rodamiento de tres bolas, con defecto en la pista externa, girando a distintas velocidades	289
7.99. Espectros de las señales temporales representadas en la Figura 7.98	289
7.100 Espectros de las envolventes de las señales temporales representadas en la Figura 7.98	290
7.101 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.98 (300 r.p.m.)	290
7.102 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.98 (600 r.p.m.)	291
7.103 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.98 (1200 r.p.m.)	291
7.104 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.98 (1800 r.p.m.)	292
7.105 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.98 (2400 r.p.m.)	292
7.106 Señales temporales de un modelo de rodamiento de nueve bolas	293
7.107 Espectros de las señales temporales representada en la Figura 7.106	293
7.108 Espectros de las envolventes de las señales temporales Espectros de las señales temporales representada en la Figura 7.106	294
7.109 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.106 (300 r.p.m.)	294
7.110 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.106 (600 r.p.m.)	295
7.111 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.106 (1200 r.p.m.)	295
7.112 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.106 (1800 r.p.m.)	296
7.113 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.106 (2400 r.p.m.)	296
7.114 Señales temporales de un modelo de rodamiento de nueve bolas, con defecto en la pista externa, girando a distintas velocidades	297
7.115 Espectros de las señales temporales representadas en la Figura 7.114	297
7.116 Espectros de las envolventes de las señales temporales representadas en la Figura 7.114	298
7.117 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.114 (300 r.p.m.)	298

7.118	Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.114 (600 r.p.m.)	299
7.119	Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.114 (1200 r.p.m.)	299
7.120	Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.114 (1800 r.p.m.)	300
7.121	Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.114 (2400 r.p.m.)	300
7.122	Señal temporal de un rodamiento SKF 6206 con 3 bolas y defecto en pista interna.	301
7.123	Señal temporal de un modelo de rodamiento con 3 bolas y defecto en pista interna	301
7.124	Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.122	302
7.125	Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.123	302
7.126	Señal temporal de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista externa. .	303
7.127	Señal temporal de un modelo de rodamiento con defecto en la pista externa, con 9 bolas.	303
7.128	Espectro de la señal temporal representada en la Figura 7.126	304
7.129	Espectro de la señal temporal representada en la Figura 7.127	304
7.130	Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.126	305
7.131	Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.127.	305
7.132	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un rodamiento SKF 6206 nuevo, con 3 bolas, para diferentes cargas.	307
7.133	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un rodamiento SKF 6206 nuevo, con 3 bolas, para diferentes velocidades de giro.	307
7.134	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, con 3 bolas, para diferentes cargas. .	308
7.135	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, con 3 bolas, para diferentes velocidades de giro.	308
7.136	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, con 3 bolas, para diferentes cargas. .	309
7.137	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, con 3 bolas, para diferentes velocidades de giro.	309
7.138	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un rodamiento SKF 6206 nuevo, para diferentes cargas.	310
7.139	Evolución de la Potencia Espectral con la carga de un rodamiento SKF 6206 nuevo, para diferentes velocidades de giro.	310

7.140	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, para diferentes cargas.	311
7.141	Evolución de la Potencia Espectral con la carga de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, para diferentes velocidades de giro.	311
7.142	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, para diferentes cargas.	312
7.143	Evolución de la Potencia Espectral con la carga de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, para diferentes velocidades de giro.	312
7.144	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento nuevo, con 5 GDL, para diferentes cargas.	314
7.145	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento nuevo, con 5 GDL, para diferentes velocidades de giro.	314
7.146	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento con defecto en la pista exterior, con 5 GDL, para diferentes cargas.	315
7.147	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento con defecto en la pista exterior, con 5 GDL, para diferentes velocidades de giro.	315
7.148	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento con defecto en la pista interior, con 5 GDL, para diferentes cargas.	316
7.149	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento con defecto en la pista interior, con 5 GDL, para diferentes velocidades de giro.	316
7.150	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento nuevo, con 11 GDL, para diferentes cargas.	317
7.151	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento nuevo, con 11 GDL, para diferentes velocidades de giro.	317
7.152	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento con defecto en la pista exterior, con 11 GDL, para diferentes cargas.	318
7.153	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento con defecto en la pista exterior, con 11 GDL, para diferentes velocidades de giro.	318
7.154	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento con defecto en la pista interior, con 11 GDL, para diferentes cargas.	319
7.155	Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento con defecto en la pista interior, con 11 GDL, para diferentes velocidades de giro.	319
7.156	Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.	320
7.157	Evolución de la vibración en el tiempo con la velocidad angular	321

7.158Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.	322
7.159Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.	322
7.160Comparación de la evolución de la temperatura en el anillo externo de un rodamiento SKF 6206 con 3 bolas	323
7.161Comparación de la evolución de la temperatura en el núcleo del rotor	323
7.162Comparación de la evolución de la temperatura en el anillo externo de un rodamiento SKF 6206	324
7.163Comparación de la evolución de la temperatura en el núcleo del rotor	324
7.164Temperatura en la brida a los 90 minutos de funcionamiento	325
7.165Temperatura en el rotor a los 90 minutos de funcionamiento	326
7.166Temperatura en un rodamiento con 3 bolas a los 90 minutos de funcionamiento	327
7.167Temperatura en un rodamiento SKF 6206 a los 90 minutos de funcionamiento	327
7.168Fuerzas que actúan en el sistema rotor-aro interno	330
7.169Reacciones en las bolas correspondientes a un modelo de rodamiento de 3 bolas	330
7.170Componente inercial del rotor de un modelo de rodamiento de 3 bolas	331
7.171Potencia calorífica generada en el rodamiento	332
7.172Potencia calorífica generada en el rodamiento	333
7.173Potencia calorífica generada en el rodamiento	334
8.1. Diagrama de bloques del desarrollo de esta tesis	336
8.2. Detalle del ángulo β en el modelo general de rodamiento presentado	338
8.3. Secuencia seguida en la simulación térmica	339
A.1. Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 nuevo, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.	342
A.2. Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 nuevo, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.	342
A.3. Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 nuevo, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.	343
A.4. Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.	343

A.5. Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.	344
A.6. Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.	344
A.7. Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.	345
A.8. Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.	345
A.9. Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.	346
A.10. Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 nuevo, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m. . . .	346
A.11. Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 nuevo, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m. . .	347
A.12. Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 nuevo, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m. . .	347
A.13. Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.	348
A.14. Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.	348
A.15. Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.	349
A.16. Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.	349
A.17. Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.	350
A.18. Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.	350

B.15. Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.	359
B.16. Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.	359
B.17. Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.	360
B.18. Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.	360
B.19. Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 nuevo, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.	361
B.20. Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 nuevo, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m. . . .	361
B.21. Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.	362
B.22. Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.	362
B.23. Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.	363
B.24. Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.	363
B.25. Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 nuevo, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.	364
B.26. Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 nuevo, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m. . .	364
B.27. Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.	365
B.28. Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.	365
B.29. Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.	366

B.30.Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.	366
B.31.Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 nuevo, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.	367
B.32.Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 nuevo, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m. . .	367
B.33.Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.	368
B.34.Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.	368
B.35.Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.	369
B.36.Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.	369

Índice de tablas

2.1. Reducción del número de operaciones de la FFT respecto a la DFT	23
2.2. Propiedades espectrales de algunas ventanas temporales	26
3.1. Valores de $1/J_r$ para los diferentes números de elementos rodantes	66
3.2. Coordenadas generalizadas	84
4.1. Características rodamiento 6206	102
4.2. Coeficiente de rozamiento	103
4.3. Factor f_{11}	105
4.4. Factor g_1	106
4.5. Factores z y γ	106
4.6. Factores X_s ; Y_s	107
4.7. Valores del par resistente según la Fr (radial) aplicada	110
4.8. Fenómenos de transmisión de calor que afectan a los diferentes nodos	118
4.9. Características del material de los elementos 1, 4, 5 y 6	132
4.10. Características del material del rotor	133
4.11. Características del material de los elementos del rodamiento	133
4.12. Coeficientes de convención-radiación y superficie del modelo que corresponden (1)	135
4.13. Coeficientes de convención-radiación y superficie del modelo que corresponden (2)	135
4.14. Coeficientes de convención-radiación y superficie del modelo que corresponden (3)	135
5.1. Parámetros seleccionados en el Solver	179
5.2. Parámetros de carga-velocidad usados en las simulaciones	180
5.3. Código seguido para nombrar los archivos generados por simulación	180
5.4. Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 2 G.D.L., 3 Bolas)	181
5.5. Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 2 G.D.L., 3 Bolas)	181

5.6. Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 2 G.D.L., 3 Bolas)	181
5.7. Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 2 G.D.L., 9 Bolas)	182
5.8. Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 2 G.D.L., 9 Bolas)	182
5.9. Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 2 G.D.L., 9 Bolas)	182
5.10. Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 5 G.D.L., 3 Bolas)	183
5.11. Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 5 G.D.L., 3 Bolas)	183
5.12. Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 5 G.D.L., 3 Bolas)	183
5.13. Notación empleada en los ficheros de simulación (Lagrange, 5 G.D.L., 3 Bolas)	184
5.14. Notación empleada en los ficheros de simulación (Lagrange, 5 G.D.L., 3 Bolas)	184
5.15. Notación empleada en los ficheros de simulación (Lagrange, 5 G.D.L., 3 Bolas)	184
5.16. Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 11 G.D.L., 9 Bolas)	185
5.17. Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 11 G.D.L., 9 Bolas)	185
5.18. Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 11 G.D.L., 9 Bolas)	185
5.19. Notación empleada en los ficheros de simulación (Lagrange, 11 G.D.L., 9 Bolas)	186
5.20. Notación empleada en los ficheros de simulación (Lagrange, 11 G.D.L., 9 Bolas)	186
5.21. Notación empleada en los ficheros de simulación (Lagrange, 11 G.D.L., 9 Bolas)	186
5.22. Simulación térmica, rodamiento 3 bolas sin defecto	187
5.23. Simulación térmica, rodamiento 3 bolas con defecto en anillo externo	187
5.24. Simulación térmica, rodamiento 3 bolas con defecto en anillo interno	188
5.25. Simulación térmica, rodamiento 9 bolas sin defecto	188
5.26. Simulación térmica, rodamiento 9 bolas con defecto en anillo externo	188
5.27. Simulación térmica, rodamiento 9 bolas con defecto en anillo interno	189
6.1. Nomenclatura utilizada para marcar los rodamientos empleados en los ensayos experimentales	193
6.2. Características de los acelerómetros usados para la captación de vibraciones .	194
6.3. Frecuencias naturales de la brida	206
6.4. Parámetros Carga-Velocidad de los ensayos de rodamientos	209
6.5. Código seguido para la nomenclatura de los archivos	210
6.6. Notación empleada en los ficheros experimentales utilizando rodamientos de 3 bolas sin defecto	214
6.7. Notación empleada en los ficheros experimentales utilizando rodamientos de 3 bolas con defecto en anillo externo	214
6.8. Notación empleada en los ficheros experimentales utilizando rodamientos de 3 bolas con defecto en anillo interno	214

6.9. Notación empleada en los ficheros experimentales utilizando rodamientos de 9 bolas sin defecto	215
6.10. Notación empleada en los ficheros experimentales utilizando rodamientos de 9 bolas con defecto en anillo externo	215
6.11. Notación empleada en los ficheros experimentales utilizando rodamientos de 3 bolas con defecto en anillo interno	215
6.12. Parámetros del rodamiento ensayado	216
6.13. Frecuencias de los principales armónicos esperados para un rodamiento con tres bolas y defecto en el anillo interno	217
6.14. Frecuencias de los principales armónicos esperados para un rodamiento con tres bolas y defecto en el anillo externo	217

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. ÁMBITO DE LA TESIS

La Real Academia Española de la Lengua define holismo como "doctrina que propugna la concepción de cada realidad como un todo distinto de la suma de las partes que lo componen". El concepto holista se contrapone al atomista que afirma que el universo está constituido por combinaciones de pequeñas partículas indivisibles denominadas átomos y sus diversas combinaciones en el vacío constituyen los diferentes cuerpos.

El holismo afirma que no puede existir el vacío subyacente entre las partículas, la materia está constituida de forma continua, es decir, no puede dividirse en partes irreductibles sin conexión. Así pues, hay que relacionar las partes para aproximarse al todo.

Evidentemente, el todo es más que la suma de sus partes: un rodamiento es más que la suma de sus elementos rodantes, sus anillos, su jaula, sus obturaciones y su lubricante. Si los componentes del rodamiento no se disponen debidamente, el rodamiento no funciona. Si, además, el rodamiento no se integra adecuadamente en un sistema mecánico, éste no podrá estudiarse dinámicamente. La interconexión de las piezas y la ubicación del conjunto es lo que permite hacerlo, creando una nueva cualidad.

Sinónimos de holista son general, total, integral, sistémico... Durante este documento se disertará sobre un sistema rotativo complejo, de uso muy extendido: *el rodamiento*, cuyo comportamiento dinámico es no-lineal y ¿qué hay más holista que algo no-lineal?

Filosofía aparte, cuando un ingeniero diseña una máquina, lo hace con la premisa de que esta tendrá una vida más o menos prolongada pero, en todo caso, limitada. Una máquina de complejidad media está compuesta por un gran número de elementos, entre los que cabe destacar aquellos encargados de transformar el movimiento rotatorio como las poleas y las ruedas dentadas en todas sus variantes. Estos elementos van ensamblados sobre ejes o árboles que a su vez están soportados por cojinetes o rodamientos, según el tipo, magnitud y dirección de la carga que soporta y de la velocidad a la que operen.

El fallo de alguno de los elementos de la máquina puede arrastrar a varios de ellos a la inutilización y consecuentemente, multiplicar el grado de la avería. Por su constitución y funcionamiento, los rodamientos son elementos que presentan una alta sensibilidad al deterioro y de ahí que suelen ser los primeros elementos que fallan en la máquina. Un diagnóstico precoz

del fallo en un rodamiento puede inducir un considerable ahorro económico si éste se sustituye cuando todavía presenta un pequeño remanente de vida.

Detectar un defecto incipiente en una máquina antes de que se llegue a producir la avería, ha sido una preocupación constante en los responsables de mantenimiento, por lo que históricamente se han seguido varias estrategias de mantenimiento. Según la forma de ejecución, el mantenimiento puede clasificarse en:

- Mantenimiento correctivo, que consiste en la reparación de emergencia, efectuando la sustitución de las piezas averiadas.
- Mantenimiento preventivo, donde la sustitución de las piezas que pueden originar averías se realiza con cierta periodicidad, determinada mediante criterios estadísticos. La gran ventaja del mantenimiento preventivo frente al correctivo, es la posibilidad de elección del instante en el que se realizará el mantenimiento, evitando las paradas de las líneas de producción no programadas. Los inconvenientes son la sustitución de piezas que todavía presentan una vida considerable o el fallo de piezas que no alcanzan la vida útil esperada.
- Mantenimiento predictivo, que se puede definir como el seguimiento organizado con mediciones periódicas o continuas de las variables de estado del sistema y su comparación con unos patrones preestablecidos, para la determinación del instante en que se debe efectuar la intervención del mantenimiento.

Existen diversas técnicas de seguimiento y diagnóstico aplicables al mantenimiento predictivo: el análisis térmico, el estudio de la composición de los lubricantes, el análisis de las vibraciones, el examen por ultrasonidos, etc.; pero la técnica de diagnóstico del estado de la maquinaria rotativa más utilizada, es el análisis de vibraciones, ya que la monitorización de las vibraciones en puntos señalados del sistema mecánico ofrece información de los flujos de energía en los apoyos, pares elementales de las máquinas, siendo indicativos del nivel de defecto.

En toda máquina rotativa existen cojinetes o rodamientos. Estos son elementos destinados a servir de apoyo, con el mínimo rozamiento, a elementos de maquinaria con movimiento giratorio u oscilante. Aunque suelen confundirse ambos términos, se denomina cojinete al anillo que sirve de apoyo a los ejes o árboles giratorios y rodamientos o cojinetes antifricción al conjunto formado por dos anillos entre los que se sitúan elementos rodantes que pueden ser bolas o rodillos.

Los rodamientos, objeto de nuestro estudio, son elementos fundamentales en la construcción de maquinaria. Estos son elementos mecánicos robustos pero su duración en servicio depende en gran medida de las condiciones de funcionamiento y el procedimiento empleado para montarlo en la máquina. A pesar de todas las precauciones que puedan tomarse, un rodamiento puede experimentar un fallo prematuro. Los fallos en los rodamientos se producen por soportar cargas mayores de las de diseño, por fatiga de las superficies de contacto, por lubricación deficiente, por entrada de contaminantes que se interponen entre los elementos en contacto, por manipulación incorrecta o errores de montaje.

La presente Tesis Doctoral se encamina a ampliar el conocimiento en el comportamiento vibratorio y térmico de un rodamiento en buen estado y con defectos localizados en el anillo interno y anillo externo, mediante la integración de las ecuaciones diferenciales que

se derivan de un modelo analítico. Los modelos analíticos tratan de buscar una explicación a un fenómeno, en este caso, el fenómeno es el comportamiento de un rodamiento de bolas. Para implementar el modelo hay que asumir diversas hipótesis que acoten la complejidad del mismo. Además, los modelos son generalmente semiempíricos, ya que requieren de la experimentación para hallar constantes o funciones determinadas.

1.2. OBJETIVOS DE LA TESIS

Esta tesis se enmarca en la línea de investigación del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Carlos III de Madrid denominada "modelización de elementos mecánicos y defectología en máquinas". Además, pretende ser una continuación de las investigaciones desarrolladas en anteriores tesis doctorales Roda [236], Rubio [239], profundizando en aspectos que, anteriormente, fueron solamente apuntados, es decir: actualizar las técnicas, refinar procedimientos y aportar ideas originales en los planteamientos; todo ello con la finalidad de complementar los mismos y avanzar en el estudio del comportamiento de los rodamientos, la diagnosis de fallos mediante el análisis de vibraciones y la distribución de temperaturas en los elementos del rodamiento y elementos de soporte mediante un estudio térmico.

El objetivo principal de esta tesis es la modelización de un rodamiento de bolas mediante técnicas newtonianas y lagrangianas. El modelo contemplará la posibilidad de incluir la presencia de defectos. Se propondrá además un modelo térmico de comportamiento del rodamiento. Los resultados de estos modelos dinámicos y térmicos serán contrastados experimentalmente.

Para conseguir estos objetivos se precisa abordar las siguientes etapas:

- La revisión bibliográfica y de las técnicas de modelado de sistemas dinámicos, análisis de vibraciones, métodos de tratamiento de señales, transferencia de calor, con el fin de emplearlas en la detección y análisis de defectos localizados en rodamientos de bolas.
- Establecer un modelo que permita simular, con suficiente fidelidad, el comportamiento del rodamiento en condiciones de funcionamiento. En este punto se establecerán las hipótesis que se crean convenientes para evitar obtener un modelo cuya complejidad no permita abordar un análisis realista e industrial. Esto va a permitir analizar los distintos parámetros que influyen en la dinámica del sistema y la interacción entre ellos.
- Integración de las ecuaciones del movimiento derivadas del modelo utilizando la herramienta Simulink de Matlab.
- Obtener un modelo de distribución de temperatura en régimen estacionario en los elementos que forman el rodamiento así como elementos adyacentes como el eje y el alojamiento.
- La construcción de un banco de ensayos de elementos mecánicos rotativos donde se analizará el comportamiento real del rodamiento particular objeto de estudio y permita validar el modelo propuesto. El banco de ensayos deberá ser lo más simple y robusto posible para evitar la influencia, sobre la señal de vibración, de elementos externos al propio rodamiento.

- La familiarización con la captación y registro de medidas de vibración en una máquina real. Esto ocasiona el manejo de un equipo de medida compuesto de acelerómetros, acondicionadores de señal (como filtros, integradores, ...), tarjeta de adquisición de datos y el software adecuado para la grabación y análisis de la señal en la computadora.
- Toma de temperaturas con pirómetro y sondas de contacto o termopares de aquellos puntos del sistema mecánico cuyos valores resulten adecuados para interpretar el comportamiento del sistema.
- Extraer empíricamente el valor de todos los parámetros necesarios para configurar el modelo, que no puedan establecerse con precisión de forma teórica o a partir de la literatura técnica.
- Validar los modelos de rodamiento, contrastando la señal obtenida de los mismos con la señal obtenida del funcionamiento del rodamiento en el banco de ensayos, bien sea bajo condiciones óptimas de funcionamiento (rodamiento nuevo) o bien con defectos característicos localizados.
- Finalmente, establecer la relación entre el modelo dinámico y el modelo térmico.

1.3. FASES DEL DESARROLLO DE LA TESIS

La estrategia seguida para el desarrollo progresivo de esta tesis se puede resumir en los siguientes puntos:

1. Acopio de documentación técnica, relacionada con los siguientes temas:
 - Modelado de sistemas mecánicos.
 - Los rodamientos: sus características, funcionamiento, defectología y modelos más significativos, tanto de vibraciones como térmicos.
 - La diagnosis de defectos en máquinas.
 - Los transductores de vibraciones, amplificadores y demás equipos electrónicos necesarios para la medida de las vibraciones.
 - Los transductores térmicos, acondicionadores de señal y demás equipos necesarios para la medida de temperatura.
 - Las principales técnicas de tratamiento de la señal y análisis de las vibraciones.
 - La simulación de vibraciones generadas por defectos en rodamientos de bolas.
 - Transmisión del calor y distribución de temperaturas, particularizado para el caso del rodamiento.
2. Clasificación y estudio de la información anterior. Este punto incluye el ensayo preliminar de rodamientos y la aplicación de los conocimientos sobre tratamiento de señal y diagnosis adquiridos.
3. Establecer el modelo dinámico del rodamiento, planteando las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema e incorporando defectos a los anillos interno y externo.

4. Establecer el modelo para obtener la distribución térmica del rodamiento originada por el par de rozamiento y por los defectos localizados derivados del punto 3.
5. Aplicación de los modelos matemáticos del rodamiento y simulación numérica.
6. Diseño y fabricación de los bancos de ensayos de elementos mecánicos.
7. Estudio y análisis detallado de los bancos de rodamientos: medidas de vibraciones y análisis previos para la calibración y puesta a punto de los bancos de ensayos.
8. Diseño de los ensayos de rodamientos que se realizarán en el banco de ensayos.
9. Realización de los ensayos experimentales de los rodamientos en los bancos de pruebas y registro de los datos de vibración y térmicos (monitorización). Clasificación de los datos obtenidos.
10. Análisis de resultados. Validación de los modelos numéricos.
11. Conclusiones.
12. Redacción de la memoria.

1.4. ESTADO DE LA TÉCNICA

El comportamiento de los rodamientos es no lineal y como sistemas no lineales, con frecuencia, no responden al patrón de comportamiento esperado, además de ser muy sensibles a las condiciones iniciales.

Para intentar comprender todos los fenómenos generados en los rodamientos se recurre a modelos empíricos (derivados de procesos estadísticos) o a modelos matemáticos (de parámetros distribuidos o concentrados) aunque estos últimos pocos generales Cao [42]. En la actualidad se contemplan, sobre todo, modelos que consideren los efectos dinámicos de los rodamientos, superadas las técnicas cuasi-estáticas de Jones [152], Harris [112] o Palmgren [217].

Hacia el año 1970 Martin [182], basándose en la geometría de los rodamientos, desarrolla el cálculo teórico de las frecuencias rotacionales de defectos en rodamientos y, posteriormente, Braun [35] especifica los modelos matemáticos de defectos en rodamientos, basados en la modulación producida por dichos defectos sobre la frecuencia de resonancia de los elementos que componen el rodamiento (pistas, bolas, rodillos, etc.). Después, Berry [26] expone los modelos de espectros de cuatro estados de evolución de dichos defectos.

Respecto a la simulación del comportamiento de los rodamientos, se puede señalar que modelos teóricos que emulen la dinámica de los rodamientos de bolas ha habido muchos, principalmente desde finales de la década de los 70: Wensing [291], en su tesis, compara los diez más eficientes que se pueden encontrar en la literatura de los últimos 20 años, aportando además, en colaboración con Dietl [61], el cálculo del coeficiente de amortiguamiento de un rodamiento en condiciones elastohidrodinámicas. Sarangi et al. [243], [244] plantean un modelo analítico de rodamiento con contacto elastohidrodinámico considerando rigidez y amortiguamiento en condiciones de lubricación adecuada.

Entre los muchos modelos del comportamiento de los rodamientos conviene reseñar también a Walters [285] que desarrolla un modelo analítico dinámico para rodamiento de bolas con jaula donde se contempla el deslizamiento entre bola y pista de rodadura y que, más tarde, sería modificado por Gupta [105], [106] y posteriormente actualizado en trabajos de Tiwari et al. [282], [281], [283].

Sin embargo, las soluciones aportadas a los modelos de Walters, Gupta y Tiwari, con la integración de las ecuaciones planteadas en los contactos y las fuerzas, conllevan unos tiempos de computación excesivamente largos y se originan errores computacionales debido a la truncación numérica del computador. Kennel and Bupara [155] desarrollan un modelo simplificado para analizar la dinámica de las bolas y la jaula donde se asume que el conjunto jaula-bolas solo se mueve en el plano de su diámetro principal. Meeks et al. [195], [196] mostraron que los movimientos del conjunto jaula-bolas son demasiado complicados para ser modelados con esta simplificación extrema del movimiento de la jaula.

Gad, Fukata [88], [90] afrontaron el estudio de las vibraciones resultado de la respuesta dinámica no lineal en rodamientos de bolas que soportan un rotor horizontal equilibrado sobre el que actúa una fuerza vertical constante, considerando el efecto de flexibilidad variable. También muestran que la resonancia ocurre cuando BPF (ball passage frequency) coincide con la frecuencia del sistema y también apuntan que, para ciertas velocidades, el sistema eje-bolas-soportes puede generar vibraciones con sub y super armónicos de BPF.

Meeks y Tran [194] desarrollan un modelo analítico para estudiar y optimizar los parámetros de diseño de la jaula y de los aros de soporte. Aktürk et al. [4] realizan una investigación teórica del efecto de la variación de la precarga en las características vibratorias de un sistema eje-rodamiento y también sugieren que tomando el número de bolas adecuado y el valor de la precarga se puede reducir la generación de vibraciones a BPF. Rahnejat y Gohar [224] muestran que incluso con lubricación elastohidrodinámica entre bolas y pistas aparecen los picos de BPF en el espectro.

Harsha [117], [116], [115], [113], [114], sigue la línea abierta por Gupta, Tiwari y Prakash, comprobando las afirmaciones de los autores precedentes y desarrollando modelos analíticos para predecir la respuesta dinámica no-lineal de sistemas rotor-rodamiento considerando: el rotor horizontal y equilibrado; o un número de bolas variable; u ondulaciones superficiales en la pista exterior o interior; o el efecto de la precarga; o el efecto de "run-out" de la jaula.

Planteados los modelos del sistema rotor-rodamiento, para la resolución iterativa de las ecuaciones diferenciales no lineales dice que utiliza la técnica de integración numérica de Newmark- β combinada con el método de Newton-Raphson. También otros autores, como Purohit [222], han presentado modelos analíticos de rodamiento similares a los de Harsha, reduciendo los grados de libertad del modelo.

Son muchos los investigadores que han realizado modelos o planteado soluciones sobre la distribución de esfuerzos en los rodamientos, con modelos de parámetros concentrados Feng et al. [79], [114], donde merecen ser reseñados software como Beast [87] [262] o Brain [12] como herramienta de simulación dinámica de rodamientos desarrollados bajo el auspicio de grandes fabricantes de rodamientos (SKF, NSK, ...), con modelos implementados utilizando Bond Graph, como Bhattacharyya et al. [28] y con modelos de parámetros distribuidos pero en condiciones estáticas Kang et al. [153], Zhang et al. [303].

La aplicación a modelos de rodamientos de parámetros distribuidos de programas informáticos como Algor o Adams, que combinan modelado de elementos finitos y modelado de condiciones dinámicas parecen abrir un nuevo camino en esta vía, como elemento de contraste, Rubio et al. [240].

Especial interés, en el comportamiento del rodamiento, es su particular tipo de lubricación (elastohidrodinámica o EHD), donde merecen destacarse los estudios de modelado EHD en rodamientos, formulados, en 1999, por Morales y Quiñones [200], [199] y Nelias [204].

Existen muchas técnicas para la diagnosis de fallos en rodamientos. Según el tipo de señal, estas técnicas pueden clasificarse en: medida de temperatura, análisis de lubricantes, análisis de corriente eléctrica, análisis de señal acústica y análisis de vibraciones Tandon et al. [274].

Cuando existe una anomalía, ya sea por un defecto localizado o distribuido, se produce un incremento de la fricción entre los elementos del rodamiento que se traduce a su vez, en un aumento de la temperatura de los mismos, Yi et al. [298], Harvey et al. [118]. El seguimiento de la temperatura, ya sea en el alojamiento del rodamiento o la temperatura del lubricante, es uno de los métodos más simples que existe para la detección de anomalías en una máquina rotatoria.

El estudio del lubricante mediante análisis de las partículas sólidas mezcladas con el lubricante, ya sean generadas o adquiridas durante el funcionamiento de la máquina, resulta ser otro indicador del estado de la máquina. La presencia de partículas en el lubricante puede detectarse automáticamente con los sensores adecuados. Además, el estudio de la composición, la forma o el tamaño de las diferentes partículas pueden, en determinadas ocasiones, facilitar la localización del fallo, Rende [232], Ohga [211].

Analizar posibles cambios en las corrientes eléctricas del motor de accionamiento de la máquina es otra técnica que puede ser utilizada para detectar defectos en la misma, Blod et al. [32].

La presencia de defectos localizados o distribuidos aumentan el ruido y las vibraciones generadas por el sistema mecánico dañado. La detección de anomalías en ejes o fallos en rodamientos es posible mediante el análisis de la señal acústica siempre que la presión acústica (la intensidad del sonido) sea lo suficientemente elevada, Mba et al. [184].

La presencia de vibraciones anormales es el primer efecto de la existencia de anomalías en la máquina, de ahí que el análisis de vibraciones sea una técnica muy extendida en la industria Su [266], Samanta [242].

También hay autores que han abordado de forma particular el estudio térmico en los rodamientos. Como es bien conocido por cualquier ingeniero mecánico, la temperatura es uno de los parámetros más importantes que afectan a la vida funcional y el rendimiento de los rodamientos, Fonseca [83], Wang [286]. Es, pues, muy importante tener conocimiento del estado térmico del rodamiento, mediante la monitorización de los mismos. Los sensores de temperatura empleados pueden estar en contacto con partes fijas o bien en partes móviles, Heneao-Sepulveda [119], Wang [289]. Cuando no es posible mantener el sensor en contacto, las imágenes termográficas pueden ayudar a determinar el estado térmico de un rodamiento [133], Papp [219].

El aumento de temperatura está íntimamente relacionado con la fricción, Yeau-Ren [297], de ahí que se hayan invertido grandes esfuerzos en determinar su valor o implementar modelos

que permitan evaluarlos [203]. Deben destacarse los trabajos de Houpert [129], [128], [159] que desarrolla un procedimiento para evaluar las relaciones de los momentos de fricción radiales en diferentes tipos de rodamientos.

Es muy difícil determinar experimentalmente la distribución del flujo de calor generado por la fricción entre sólidos ya que la medida cerca de la fuente de calor es complicada. Este valor se estima, generalmente, de forma teórica, como reseñan Jaeger [149], Blok et al. [31] y Laraqi et al. [164].

Se han realizado estudios con la hipótesis de contacto perfecto entre los sólidos Kounas et al. [158], Le-Shebirny et al. [165], pero los resultados experimentales han demostrado el carácter imperfecto del contacto Mazo et al. [183], Ling et al. [175]. Con el fin de tener en cuenta ese fenómeno de contacto deslizante imperfecto se han propuesto algunos modelos Mazo et al. [183], Laraqi [162].

Además, debe considerarse que la transferencia de calor en la interfaz de dos sólidos está estrechamente vinculada a los fenómenos que tienen lugar cerca del contacto. Estos fenómenos han sido ampliamente estudiados, Bardon [20], Laraqi [163].

Cuando se establece un contacto con lubricación hidrodinámica o elasto-hidrodinámica, se ha utilizado con éxito el análisis numérico para el cálculo de temperaturas Zhu [306], Simon [252], Guo [102] resolviendo simultáneamente la ecuación de conducción del calor y la ecuación de la energía. Sin embargo, cuando la lubricación es mixta o el contacto es seco, se producen errores, introducidos por la ecuación de la energía y causados por las discontinuidades de las asperezas de los contactos. Estos casos han sido estudiados por Lai y Cheng [161].

Francis [85] obtiene una expresión analítica que permite determinar el incremento de la temperatura, en estado estacionario, en contactos hertzianos. El fenómeno térmico en el contacto, considerando varias fuentes de calor, ha sido tratado por Tian y Kennedy [280].

Zhao et al. [304] simulan numéricamente la evolución de la temperatura en un estado transitorio de puesta en marcha, considerando lubricación elasto-hidrodinámica. Cuando la lubricación es mixta, el proceso es simulado numericamente por Qiu y Cheng [223]. Sun et al. [269] realizan la simulación del comportamiento de rodamientos de bolas lubricados, en una turbina de gas, incluyendo un modelado térmico de los mismos.

Uno de los procesos industriales donde a los rodamientos se les exigen más altas prestaciones es el mecanizado, tanto por la elevada velocidad que alcanzan los usillos como por lo susceptibles que son a variaciones térmicas. La tecnología de mecanizado de alta velocidad, cuyas teorías se registraron en la década de 1930 Salomón [241], necesitaron de sistemas rotativos con rigidez elevada. Esta rigidez se consigue mediante rodamientos precargados. A su vez, el calor generado por los elementos durante el funcionamiento eleva la precarga Carmichael [44], Stein [265]. Este aumento de la fuerza de contacto incrementa la fricción e intensifica la generación de calor. Como resultado de esto, la presión en el contacto puede alcanzar un valor tan elevado que produzca desgaste excesivo o, incluso, rotura Katter [154]. Luego los efectos de este sistema cerrado hay que tenerlos muy en cuenta Stein [265].

Además de los trabajos reseñados también deben ser mencionados los siguientes hitos que aparecen ordenados cronológicamente:

Gustafson y Tallian [107] proponen en el año 1961 un método de detección de defectos en rodamientos basado en el número de picos de impactos que superan un umbral determinado,

en el dominio temporal.

Cooley y Tukey [50] publican en el año 1965 el algoritmo de la transformada rápida de Fourier o FFT. Este algoritmo permitió, mediante la reducción del tiempo de cálculo, el avance hacia los nuevos analizadores para el control de vibraciones provocando que el mantenimiento predictivo tuviera una rápida evolución, paralela a la de la electrónica.

En la década de los 70 se desarrollaron importantes técnicas de tratamiento y análisis de la señal de vibración y se aplicaron otras que venían siendo usadas en otros campos de la técnica, como el Cepstrum, el promediado temporal (Braun [36], en 1975) y otras.

Randall [227], de Brüel & Kjær, en 1973, comienza a aplicar la técnica del Cepstrum en la detección de defectos en los engranajes. Esta técnica del análisis Cepstral fue originalmente desarrollado por Bogert et al. para el análisis sísmico, en 1963. Osuagwu y Thomas [215], en 1982 aplicará esta técnica para la detección de defectos en rodamientos.

Nisbet y Mullett, en 1978, presentan la forma de fallo en rodamientos y las causas y síntomas que presenta cada uno de estos fallos.

Taylor [278], en 1979, profundiza en la diagnosis de defectos en engranajes a través del análisis de las frecuencias de resonancia de ruedas, ejes, etc. Si bien el número de defectos analizados y la profundidad del análisis realizado fue bastante escaso, se demostró, sin embargo, la gran complejidad del modelo espectral de los engranajes y la relativa validez de las frecuencias de resonancia como fuente de información válida para la diagnosis de defectos.

Braun [35], en 1980, desarrolla los modelos matemáticos de defectos en rodamientos, basados en la modulación producida por dichos defectos sobre la frecuencia de resonancia de los elementos que componen el rodamiento.

Boyes [33], en 1981, avanza un poco más en las frecuencias esperadas en trenes de engranajes y desarrolla la técnica "zoom".

Boyes, Darlow et al. [56] y D'Amato et al. [53], en 1982, mediante la técnica de demodulación, analizan las señales vibratorias para diagnosticar defectos en rodamientos, con unos resultados más esperanzadores que los obtenidos en el caso de los engranajes. Esta técnica sería revisada en 1984 por McFadden y Smith [185], [186] estableciendo un modelo vibratorio donde se tiene en cuenta la distribución de carga en el rodamiento y la presencia de un defecto localizado.

Szrom [272], en 1987, publica varios trabajos relacionados con la diagnosis de algunos defectos en reductores a través del análisis de las vibraciones, pero debido al número de defectos analizados y la corta extensión del análisis condujeron a resultados poco clarificadores.

Berry [26], en 1991, publica los resultados de sus investigaciones sobre la diagnosis de defectos en rodamientos, en los que incluye los modelos de espectros de cuatro estados de la evolución de dichos defectos.

García Prada [93], en 1991, en su tesis doctoral, aplica diversas técnicas estadísticas multivariable a los espectros de potencia de vibración (Análisis Discriminante) para clasificar el estado de una máquina, llegando a confeccionar un mapa de clasificación.

Su y Lin [267] evolucionan el modelo de McFadden-Smith incluyendo varios defectos localizados en posiciones arbitrarias.

Howard, (1994) usa distintas ecuaciones para calcular las frecuencias características de cada defecto.

Martin [181] en 1995 y Honarvar [127] en 1997, utilizan parámetros estadísticos como sesgo y kurtosis para analizar la señal vibratoria.

Mori et al. [202], en 1996, aplica la transformada wavelet para predecir el fallo de spalling en rodamientos. En el año 1997, son James Li et al. [150] los que la utilizan para detectar defectos localizados.

Wang [288], en 1998, presenta un método que combina el promediado temporal síncrono y el análisis de la envolvente para la detección de defectos en el rodamiento.

Peter et al. [221], en 2001, diagnostican fallos en rodamientos con la transformada wavelet junto a la envolvente y en el año 2002, son Nikolaou et al. [206], [208], [207] y Sun et al. [270] la emplean para diagnosticar fallos en rodamientos demodulando la señal de vibración. En 2003, son varios los trabajos que utilizan la transformada wavelet (Demarchi [59] y Kang [153]), y en 2005, Zhang, S. [302]. También en 2005, Cheng [46], realiza el análisis basado en la transformada wavelet utilizando los dominios tiempo-densidad de energía. Fan [77], en 2006, utiliza conjuntamente la transformada de Hilbert y la transformada wavelet packet para detección de fallos en cajas de engranajes.

Danthez et al. [54], en 1998, introducen una nueva técnica de estimación espectral, basada en la transformada de Fourier, el espectro autocohérente (ACS), que permite una estimación exacta y la cancelación de tonos puros. También en 1998, Dron et al. [65] proponen el análisis del espectro paramétrico de la señal vibratoria emitida por rodamientos de bolas.

Canada [41], en 1999, utiliza la técnica del Peakvue para detectar defectos en los rodamientos. Posteriormente, Robinson et al. [235], en 2001, también utilizarían esta técnica para determinar la severidad del defecto.

Subrahmanyam [268], en 1997; Tse y Atherton [284] y Dellomo [58], en 1999; Yang et al. [296]), en 2000, utilizan las nuevas herramientas de control, como la aplicación de redes neuronales para el cálculo del deterioro de las máquinas en general. Se utilizan distintos índices estadísticos obtenidos en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia para generar los parámetros necesarios para el entrenamiento de la red de forma que esta llegue a generar el algoritmo de decisión de manera apropiada.

Zeng y Wang [301], en 1991, hacen una aproximación a la utilización de la lógica fuzzy; Logan y Mathew [177], en 1996, usan la dimensión de la correlación para diagnosticar fallos en los rodamientos; Mechevske [193] y Fernández [81], en 1998, lo aplican a diagnosis de fallos en máquinas rotativas; Altman et al. [6], en 2001 lo utilizan combinado con una transformada wavelet para la demodulación de las señales vibratorias emitidas por rodamientos con defectos.

Van evolucionando los modelos de diagnosis que utilizan simultáneamente varias técnicas, así, Lou et al. [179], en 2004, utiliza conjuntamente transformada wavelet y sistemas fuzzy para diagnosis de fallo en rodamientos. Liu et al. [176], en 2007, utiliza algoritmos genéticos (G.A.) para optimizar el procedimiento de detección de fallos, donde se utiliza un sistema neural-fuzzy (N.F.) para el proceso de toma de decisiones.

Debido a la gran cantidad de técnicas de análisis de las vibraciones existentes, son muchos los autores que estos últimos años se han dedicado a efectuar evoluciones o revisiones (reviews)

sobre las técnicas más importantes aplicadas a la diagnosis de un determinado sistema o elemento mecánico:

- Tandon et al. [275], [276], en 1992 y después en 1999, a rodamientos.
- Dalpiaz y Rivola [52], en 1997, a máquinas automáticas.
- Lebold et al. [167], en 2000, a cajas de engranajes.
- Wang et al. [287], en 2001, a engranajes.
- Jardine et al. [151], en 2006, a diagnóstico de maquinaria.
- Patil et al. [220], en 2008, análisis de las señales como medio de diagnóstico.

Finalmente, debemos referir la gran cantidad de normas establecidas, tanto para la denominación de los términos o las características operativas de los rodamientos, como para el vocabulario y la evaluación de las vibraciones mecánicas [147] a [142].

1.5. ESTRUCTURA DEL DOCUMENTO

La memoria de la tesis se ha estructurado en los siguientes capítulos:

- Capítulo 1.- Se presentan los objetivos que persigue esta tesis así como el ámbito en el cual se desarrolla y la motivación de la misma. También se realizará una revisión del estado del arte sobre las vibraciones generadas por elementos mecánicos, particularizando para los rodamientos de bolas así como de los principales modelos de rodamientos, tanto dinámicos como térmicos, objeto de estudio. Se finalizará el capítulo describiendo las fases de desarrollo de la tesis y la estructura del presente documento.
- Capítulo 2.- Se trata en este capítulo las vibraciones en máquinas, su aplicación al mantenimiento predictivo. Se efectúa también un breve estudio teórico del análisis de la señal vibratoria, comentando particularidades de las señales vibratorias en el dominio del tiempo y de la frecuencia. Como herramientas imprescindibles para el análisis frecuencial, también, se expone la transformada de Fourier y la FFT, así como sus propiedades y aplicaciones. Del mismo modo, se desarrolla la descripción de los fundamentos de algunas de las técnicas de análisis más aplicadas al tratamiento de las vibraciones generadas por defectos en rodamientos: demodulación (cálculo de la envolvente mediante la transformada de Hilbert), el Spike Energy y el análisis Wavelet. Se enumeran los modelos de vibraciones en sistemas mecánicos rotativos con rodamientos, prestando especial atención a los modelos de fallos localizados y a las fases de deterioro de los mismos.
- Capítulo 3.- Se efectúa un análisis cinemático y dinámico de los rodamientos, además, se diseña un modelo analítico que simula el comportamiento de un rodamiento de bolas. Este modelo se establece para 2 G.D.L. (Grados De Libertad), correspondientes al movimiento del anillo interno. Posteriormente se presenta otro modelo de 2+Z G.D.L., dos correspondientes al rotor y un G.D.L. por cada una de las 'Z' bolas. Se deducen las

ecuaciones diferenciales del movimiento utilizando el método newtoniano y el método lagrangiano. Se establece además la incorporación en el modelo de defectos localizados, tanto en anillo interno como en anillo externo.

- Capítulo 4.- En esta capítulo se realiza un estudio térmico del rodamiento. Se desarrollan las ecuaciones necesarias para determinar la distribución de temperaturas en régimen estacionario, a partir del par de rozamiento. Para hallar el par de rozamiento se utilizan distintas técnicas, particularizando para el rodamiento de bolas que se ensayará en la parte experimental. Seguidamente, se implementará un modelo para el estudio térmico del conjunto mecánico formado por el rodamiento, rotor y sistema de soporte.
- Capítulo 5.- Se presenta el proceso de diseño de las simulaciones, donde se aborda:
 - Los distintos diagramas de bloques que se han utilizado para implementar los diferentes modelos.
 - Los valores (geométricos, másicos, condiciones iniciales, incremento de tiempo utilizado en cada paso de la simulación, etc.) utilizados en los modelos y los parámetros (tiempo de simulación, método de integración, etc.) utilizados para compilar el software de simulación .
 - La planificación de la realización de las medidas y registro: notación de los ficheros, número de medidas, puntos de medida, condiciones de funcionamiento, etc.
- Capítulo 6.- Se presenta el proceso de diseño de los ensayos experimentales, donde se aborda:
 - Diseño y fabricación de los bancos de ensayos de elementos mecánicos.
 - Los ensayos de prueba y ajuste de los bancos de ensayos.
 - La planificación de la realización de las medidas y registro: notación de los ficheros, número de medidas, puntos de medida, condiciones de funcionamiento, etc.
 - La ubicación y tipo de los acelerómetros a utilizar, los parámetros del equipo electrónico y los programas para la captación y registro de la señal.
 - Las operaciones a realizar en el rodamiento para proporcionarle el defecto.
- Capítulo 7.- Se realiza una exposición detallada de los resultados, tanto experimentales como obtenidos en la simulación de los modelos, tanto a nivel vibratorio como térmico. Cada uno de ellos se efectuará a su vez en el rodamiento sin defecto y con defecto localizado. También se describen los resultados obtenidos al procesar las señales vibratoria y térmica registradas en las diferentes pruebas realizadas en el banco de ensayos de rodamientos.
- Capítulo 8.- Se exponen, tras el análisis minucioso de los resultados registrados en el capítulo anterior, las conclusiones finales de la tesis, resaltando las aportaciones de la misma. Finalmente, se proponen algunos posibles trabajos futuros que continúen y complementen esta tesis.
- Anexos.- Se exponen una serie de resultados de los que se han extraído la información más importante y se ha resumido en el capítulo 7.

- Bibliografía.- Se hace una lista de los documentos más relevantes que se han utilizado para la realización de esta tesis, tales como: libros, revistas especializadas, actas de congresos, conferencias, comunicaciones, notas técnicas, etc.

Capítulo 2

VIBRACIONES MECÁNICAS EN MÁQUINAS ROTATIVAS

2.1. EL FENÓMENO VIBRATORIO EN MÁQUINAS

Se entiende el movimiento vibratorio como el movimiento de un sistema, de manera oscilante o irregular, alrededor de una posición de equilibrio o referencia. Se supone además, que tales desplazamientos son relativamente pequeños y compatibles con las deformaciones elásticas dando origen a tensiones muy inferiores al límite elástico de los materiales.

Puede concebirse un sistema vibrante como el modelo idealizado de cualquier cuerpo o elemento de máquina que por las causas que sean, pueda entrar en vibración. Los sistemas vibrantes han de reproducir con la máxima exactitud el elemento real en vibración, caracterizado por la masa o matriz de inercia, la rigidez o matriz de rigidez, el amortiguamiento o matriz de amortiguamiento y los G.D.L. del sistema.

El análisis de vibraciones consiste básicamente, en la captación sobre las partes externas de la máquina de señales vibratorias originadas durante el funcionamiento por anomalías internas. El análisis de estas señales permite obtener información sobre los procesos lentos de degradación. Los principios en que se basa el análisis de vibraciones son los siguientes:

- Toda máquina en funcionamiento, aunque esté en perfecto estado, presenta cierto nivel de ruidos y vibraciones causados por pequeños defectos de fabricación. Este nivel vibratorio podría considerarse como el nivel característico de funcionamiento satisfactorio.
- Cualquier defecto en algún componente de la máquina, incluso en fase incipiente, lleva asociado un incremento del nivel vibratorio.
- Cada defecto lleva asociado unos cambios muy característicos en las vibraciones que produce, lo cual permite su identificación.

Una vez obtenidos, de una forma metódica y precisa, las señales de las vibraciones de una máquina donde se ha detectado un problema, es necesario identificar cual es su causa y buscar la forma y el momento de reparación más eficiente, es decir, que corrija el fallo y, a la vez, el coste económico sea el mínimo posible.

Dos dominios de análisis son validos para determinar los componentes de la vibración: el dominio temporal en el cual se muestra la amplitud de la vibración respecto del tiempo y el dominio frecuencial que representa la amplitud de la vibración respecto la frecuencia.

El dominio temporal nos da una idea física de la naturaleza de la vibración pero el dominio frecuencial es ideal para identificar las componentes frecuenciales características de la vibración.

Un defecto puede identificarse al comparar las amplitudes de las vibraciones tomadas. Normalmente, una máquina que funciona correctamente tiene valores que suelen seguir una línea con tendencia ligeramente ascendente o constante. Cuando en algún momento los valores aumentan o la tendencia asciende de una forma inesperada, se puede pensar en la presencia de algún defecto.

Generalmente, los valores de amplitud que se comparan son los de velocidad o aceleración (normativa de vibraciones en máquinas), usando raras ocasiones el desplazamiento. Una vez se ha observado que la amplitud de la vibración ha aumentado de una forma inesperada, es importante comparar los valores de la energía de la señal vibratoria. El conjunto de estos valores indicará la gravedad del problema. Así, un fallo puede detectarse al encontrar una tendencia de la amplitud de velocidad ascendente, de forma imprevista, y unos valores del parámetro "g" altos. También es posible que, existiendo un problema, haya valores de Spike-Energy altos y, de repente, disminuyan y poco a poco aumenten, esto puede dar lugar a un fallo total, donde la máquina deje de funcionar. Valores altos de Spike-Energy pueden ser indicadores, en la mayor parte de los casos, de problemas de rodamientos, engranajes, acoplamientos y, en los casos más extraños, de problemas hidráulicos.

Generalmente, la máxima amplitud de vibración se da cerca de los puntos donde se localiza el defecto pero, muchas veces, la vibración es transmitida a otros puntos de la máquina aunque en ellos no se encuentre el problema.

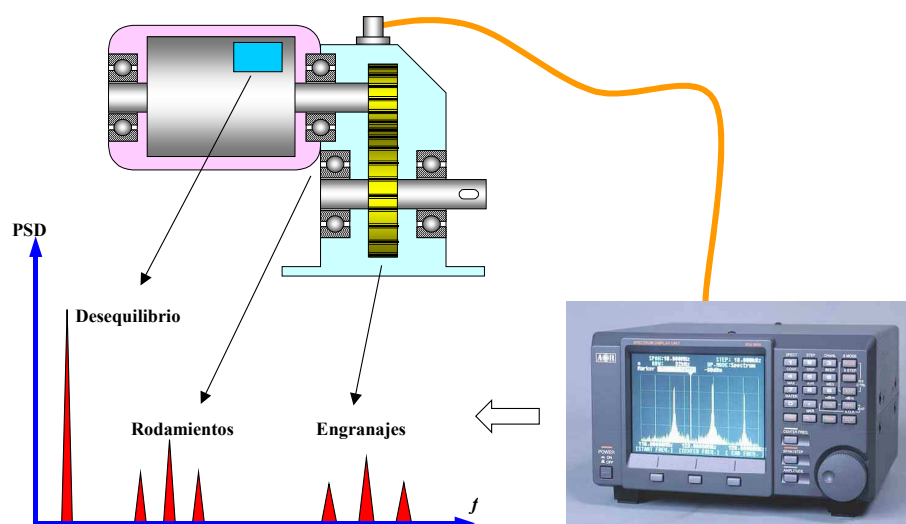


Figura 2.1 Espectro de una máquina con varios defectos

El análisis de las señales vibratorias puede indicar el tipo de defecto existente pero en muy pocas ocasiones aparece un único defecto y, por tanto, espectros donde se refleje un defecto

claramente, tal y como se aprecia en la Figura 2.1. La experiencia y el conocimiento de la máquina son dos factores fundamentales a la hora de identificar la causa que produce una vibración y en su caso, el elemento dañado que menor vida remanente presente y por tanto, el primero en fallar y originar la parada de la máquina.

Generalmente, la causa de la vibración reside en problemas mecánicos como son: desequilibrio de elementos rotativos, desalineación en acoplamientos, engranajes desgastados o dañados, rodamientos deteriorados, fuerzas aerodinámicas o hidráulicas, etc.

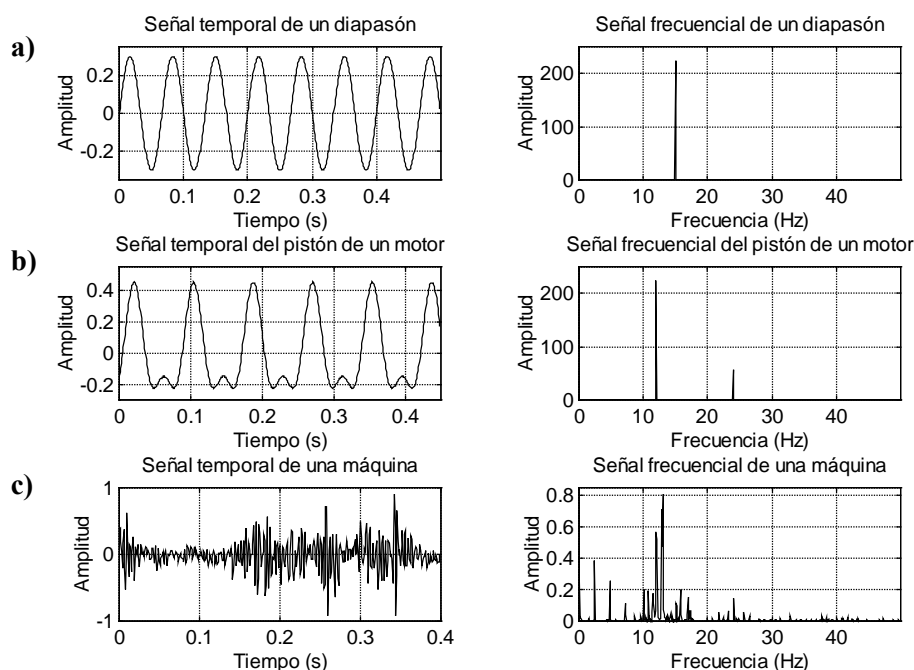


Figura 2.2 Representación de temporal y frecuencial de la vibración generada por: a) un diapasón, b) un motor de explosión y c) una máquina compleja

En la Figura 2.2, se puede observar la señal vibratoria en el dominio del tiempo, y su correspondiente espectro de frecuencia, de un diapasón, del pistón de un motor y de una máquina compleja con varios elementos móviles. El movimiento vibratorio puede constar de un sólo componente a una determinada frecuencia como el diapasón, Figura 2.2 a); de dos componentes como el movimiento del pistón de un motor de combustión interna, Figura 2.2 b). Pero las máquinas son sistemas más complejos donde las vibraciones se componen de muchas señales con diferentes frecuencias, por lo que un estudio de la relación amplitud-tiempo no basta para conocer cuantos componentes contiene la señal y de qué frecuencias 2.2 c).

Al gráfico que representa los niveles de vibración en función de la frecuencia se le denomina espectrograma de frecuencia o espectro de frecuencia.

Con el análisis frecuencial se pueden identificar fuentes de vibraciones no deseadas, como desalineamiento, desequilibrios, defectos en engranajes o cojinetes, problemas eléctricos, etc. El movimiento de los componentes junto a sus características geométricas ocasiona un aumento de amplitud de frecuencias características cuando existe fallo o deterioro, pudiendo relacionar y como consecuencia identificar el defecto observando el espectrograma.

El dominio temporal da una perspectiva natural de la vibración, con sentido físico. Es

especialmente útil cuando se analizan señales impulsivas de fallos en rodamientos y engranajes. El dominio temporal también es útil para analizar las relaciones de fase de la vibración.

Para ilustrar el interés que representa el análisis de la señal en el dominio del tiempo se propone un ejemplo de análisis de la vibración producida por un engranaje con diferentes defectos:

- Vibración generada por un engranaje desequilibrado. Este defecto originaría una vibración con una frecuencia igual al número de revoluciones por minuto (1 x r.p.m.) a que funciona el engranaje.
- Vibración generada por un engranaje que presenta un fallo en uno de sus dientes (diente astillado, roto o deformado). Este defecto causará un número determinado de impactos con cada revolución que, evidentemente, coincidirá con el número de revoluciones por minuto del engranaje (1 x r.p.m.).

Puesto que ambos casos presentan la misma frecuencia característica los espectros serían semejantes y por tanto, en caso de análisis, podría producirse un error en el diagnóstico.

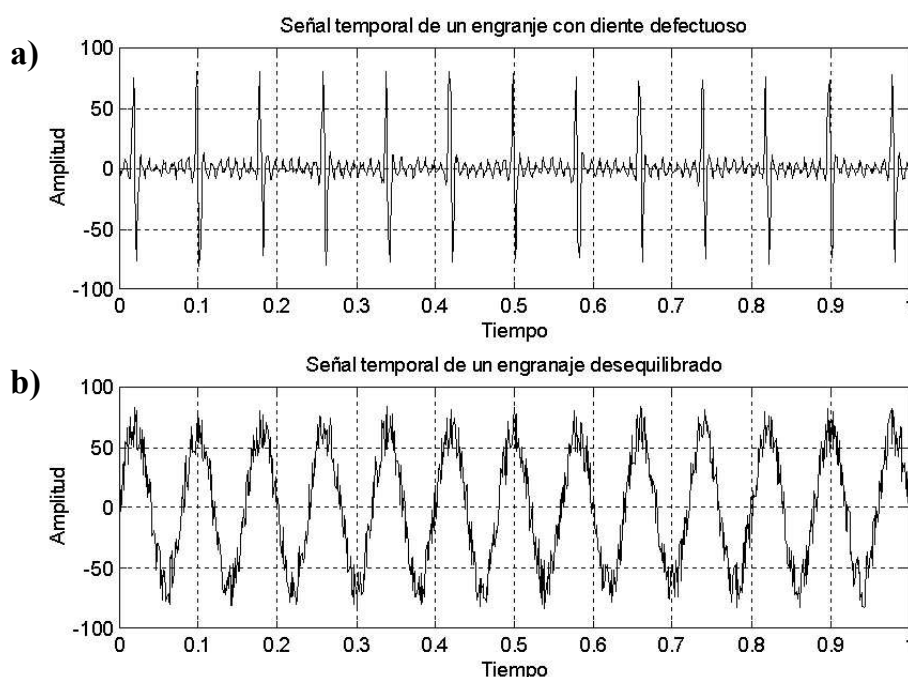


Figura 2.3 Representación temporal de la señal de vibración generada por: a) un engranaje con un diente defectuoso y b) por un engranaje desequilibrado

En la Figura 2.4, se presenta un gráfico tridimensional de una señal vibratoria. Dos de los ejes son el tiempo y la amplitud, en el dominio temporal, el tercer eje es la frecuencia que permite visualizar separadamente las componentes de la señal. Si se observa el gráfico de la Figura 2.4-c, la amplitud respecto a la frecuencia, se aprecia como las dos componentes se diferencian claramente apareciendo como dos picos verticales. Su altura representa la amplitud y su posición representa la frecuencia. La representación de una señal vibratoria en el dominio de la frecuencia es conocido como el espectro de frecuencia. El espectro de frecuencia de una

señal vibratoria define completamente la vibración y no se pierde información. El análisis de las vibraciones en el dominio de la frecuencia agrupa las técnicas más potentes y por tanto las más utilizadas para la detección y el diagnóstico de fallos en máquinas.

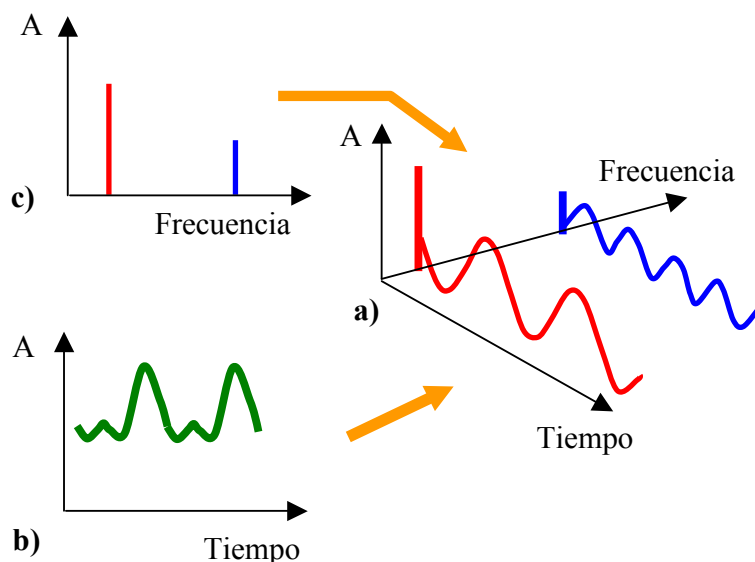


Figura 2.4 Relación entre los dominios temporal y frecuencial

El objeto del análisis en frecuencia es descomponer una señal compleja (como las vibraciones mecánicas) en componentes más elementales que permitan un estudio más sencillo. Para descomponer una función periódica de una variable es posible escoger diferentes grupos de funciones ortonormales, es decir, diferentes bases del espacio vectorial de dimensión infinita, en el cual se define un producto de escalas de las funciones periódicas. La elección viene influida por el tipo de señales que se manejen; en el caso particular de sistemas mecánicos rotativos, las señales senoidales están asociadas a la naturaleza de los procesos mecánicos cíclicos. Por esto, se utiliza como herramienta la descomposición por series trigonométricas de Fourier.

El estudio de las vibraciones en el dominio de la frecuencia es equivalente al estudio en el dominio temporal pero para señales muy complejas. El dominio temporal es incapaz de dar una información rápidamente analizable, mientras que el análisis en el dominio de la frecuencia indica su composición espectral tanto en amplitudes como en fases, aunque ambos tienen sus limitaciones.

Las primeras aplicaciones industriales del análisis en el dominio de la frecuencia fueron los analizadores de espectros analógicos (sintonización de frecuencias mediante filtros pasabanda), pero la utilización del algoritmo de la FFT (transformada rápida de Fourier) en el análisis de la señal de vibración por computador ha hecho que se impongan los analizadores digitales que usan el algoritmo de la FFT.

La importancia de estas técnicas dio pie a numerosos estudios, tanto sobre la forma de realizar dicha transformación como sobre los diferentes métodos de análisis y las relaciones entre los resultados del citado estudio y los fallos característicos de las máquinas.

En este apartado sólo se expondrán de forma resumida algunas de las técnicas más importantes y otros conceptos de interés relacionados con este tipo de análisis y que

posteriormente serán aplicados a la investigación objeto de este trabajo.

2.2. TRATAMIENTO DE LA SEÑAL VIBRATORIA

2.2.1. La transformada de Fourier

Cuando registramos una señal vibratoria, esta se encuentra en el dominio del tiempo. Para realizar un análisis de la misma, suele resultar más ventajoso el dominio de la frecuencia, pues el espectrograma muestra aquellas frecuencias que caracterizan algunos defectos de elementos mecánicos.

La herramienta utilizada para pasar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia es el desarrollo en serie de Fourier. El nombre de desarrollo en serie de Fourier se debe al físico francés Jean Baptiste Fourier (1768-1830) que fue el primero en sugerir que cualquier señal periódica se podía representar como una suma de sinusoides.

Una señal es periódica si existe algún valor positivo T tal que:

$$x(t) = x(t + nT) \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

El valor de T para el que se verifica la ecuación 2.1 se denomina periodo fundamental y el valor $2 \cdot \pi / T$ se denomina frecuencia angular fundamental, que denotamos con ω_0 .

Una señal temporal $x(t)$ de periodo T puede expresarse como:

$$x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot t}{T} + b_k \cdot \sen \frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot t}{T} \right) \quad (2.2)$$

Donde:

$$a_o = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot t}{T} \cdot dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \sen \frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot t}{T} \cdot dt$$

Las denominadas condiciones de Dirichlet garantizan que la serie que representa la ecuación 2.2 sea igual a $x(t)$ salvo aquellos puntos donde $x(t)$ es discontinua. Las condiciones de Dirichlet son:

- La señal $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en cualquier periodo.
- La señal $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier periodo

- La señal $x(t)$ es absolutamente integrable:

$$\int_T |x(t)| dt < \infty$$

Si además tenemos en cuenta que:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \cdot \text{sen}(\theta)$$

Es posible escribir la transformada de Fourier $X(f)$ de una función $x(t)$ de forma compleja, según muestra la ecuación 2.3.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \cdot dt \quad (2.3)$$

La Transformada Inversa de Fourier viene dada por la ecuación 2.4:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{i2\pi ft} \cdot df \quad (2.4)$$

La mayoría de las señales de interés práctico son analógicas. Para procesar estas señales analógicas por medios digitales es necesario convertirlas a formato digital, esto es, convertirlas en una secuencia de números de precisión finita. Este proceso pasa por un muestreo de la señal. El muestreo es la conversión de una señal en tiempo continuo a una señal en tiempo discreta tomando muestras de la misma cada cierto periodo de tiempo o intervalo de muestreo Δ , a lo largo de un periodo de tiempo T , siendo N el número de muestras obtenidas de forma que $T = N \cdot \Delta$.

Ya no tenemos una señal continua $x(t)$ sino una serie finita de N elementos x_r que evidentemente no abarca de $-\infty$ a ∞ por tanto, es necesario una modificación de la ecuación 2.3, resultando la Transformada Discreta de Fourier (DFT Discrete Fourier Transform), y viene dada por la ecuación

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x_r \cdot e^{-\frac{i2\pi kr}{N}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (2.5)$$

Siendo la Transformada Discreta de Fourier Inversa (IDFT, Inverse DFT):

$$x_r = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{\frac{i2\pi kr}{N}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (2.6)$$

La Figura 2.5 muestra los pasos necesarios para obtener la DFT de la señal $x(t)$. Las figuras de la izquierda corresponden a las funciones en el dominio del tiempo y las de la derecha corresponden a sus transformadas de Fourier.

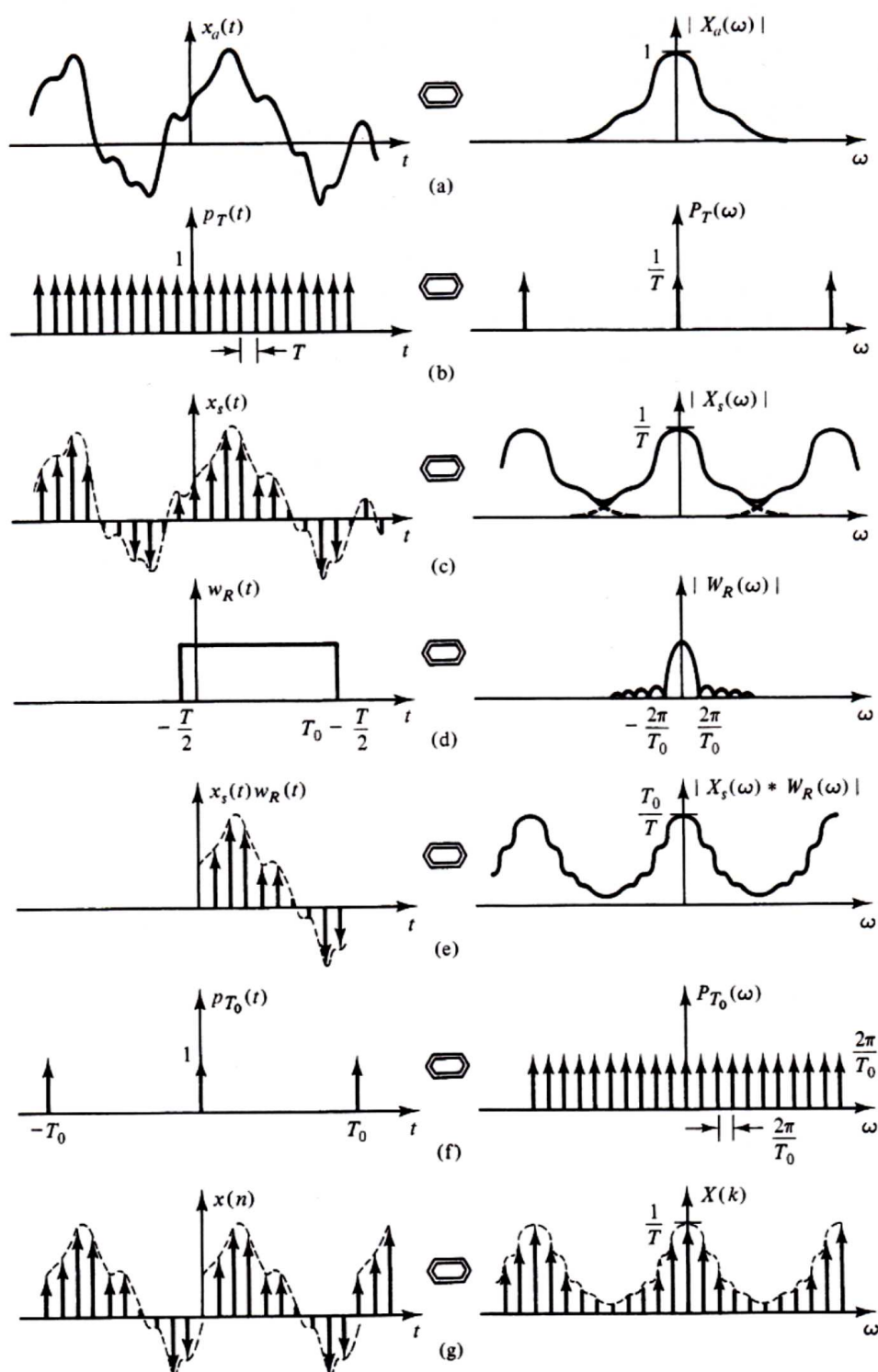


Figura 2.5 Transformada discreta de Fourier de una señal analógica

La Figura 2.5 (a) muestra una señal analógica que se multiplica por un tren de impulsos que se muestra en la Figura 2.5 (b) resultando la señal muestreada de la 2.5 (c) . Como puede apreciarse, la transformada de Fourier de un tren de impulsos es otro tren de impulsos.

El espectro de la señal muestreada es la convolución de las funciones en el dominio de la frecuencia que se muestran en las Figuras 2.5 (a) y (b) , como se muestra en la Figura 2.5 (c). Por tanto, el espectro de la señal muestreada es la repetición periódica del espectro de la señal 2.5 (a).

Expuestas las transformadas de Fourier continuas y discretas hay que mencionar que aunque el proceso normal es comenzar haciendo una estimación de la función de correlación correspondiente y, posteriormente, obtener su transformada de Fourier, esto no se realiza así, ya que se dispone de la Transformada Rápida de Fourier (FFT , Fast Fourier Transform) que permite de una manera más rápida y precisa, obtener la estimación espectral directamente de las muestras de la señal temporal.

La transformada rápida de Fourier, FFT, fue introducida por Cooley y Tukey en 1965. El mecanismo básico de la FFT consiste en dividir la serie completa x_r en sucesiones más cortas, por lo que no calcula la DFT de la serie original completa sino de otras mas cortas. El proceso se repite sucesivamente hasta que las últimas contengan cada una un sólo término. Finalmente se combinan entre si con el consiguiente ahorro operacional.

A la vista del proceso, es evidente que para que pueda realizarse las operaciones, se debe coger una serie original x_r que tenga un número de elementos potencia de 2 (2^n), debido a que este proceso es la FFT de base 2. También podría realizarse para otros números, para otras bases, pero su programación es más complicada y, además, la posibilidad de prolongar artificialmente la sucesión por adición de ceros no representa ningún problema en el caso de base 2.

Con el método de cálculo de la FFT se reduce notablemente el número de operaciones a realizar. Mediante la DFT había que realizar N multiplicaciones de la forma $(x_r) \cdot e^{-i2\pi kr/N}$ para cada uno de los N valores de X_k , lo cual conllevaba a realizar un total de N^2 multiplicaciones. Sin embargo, con la FFT se reduce este valor a, aproximadamente, $N \cdot \log_2 N$, lo que lleva a una reducción tal como se ofrece en la Tabla 2.2.1.

Número de elementos N	Relación entre DFT y FFT $\frac{N^2}{N \log_2 N}$
4	2
16	4
64	10.7
256	32
1024	102.4
4096	341.3
16384	1170.3

Tabla 2.1 Reducción del número de operaciones de la FFT respecto a la DFT

Se presentan una serie de limitaciones y distorsiones en el análisis debidas al muestreo de la señal. La frecuencia de muestreo $f_s = 1/\Delta$ limita la frecuencia máxima que se puede analizar, mientras que el periodo total muestreado determina la resolución en el dominio de la frecuencia Δf y por tanto, la frecuencia inferior f_1 . Puesto que el número de puntos es fijo, habrá que evaluar si se quiere mayor precisión a bajas frecuencias o a altas frecuencias.

'Aliasing' o efecto del solapamiento

Sea $x(t)$ una señal que no tiene componentes con frecuencia mayor de f_{max} . El teorema del muestreo afirma que $x(t)$ queda completamente determinada por sus valores tomados cada Δ segundos si se cumple que $\Delta = 1/f_{max}$. Este teorema además nos permite reconstruir completamente una señal a partir de sus muestras tomadas con una frecuencia de muestreo de $f_s = 1/\Delta$ siempre que se cumpla que $f_s \geq 2 \cdot f_{max}$, es decir, dos veces la frecuencia mayor presente en la señal. La mínima frecuencia de muestreo se denomina frecuencia de Nyquist.

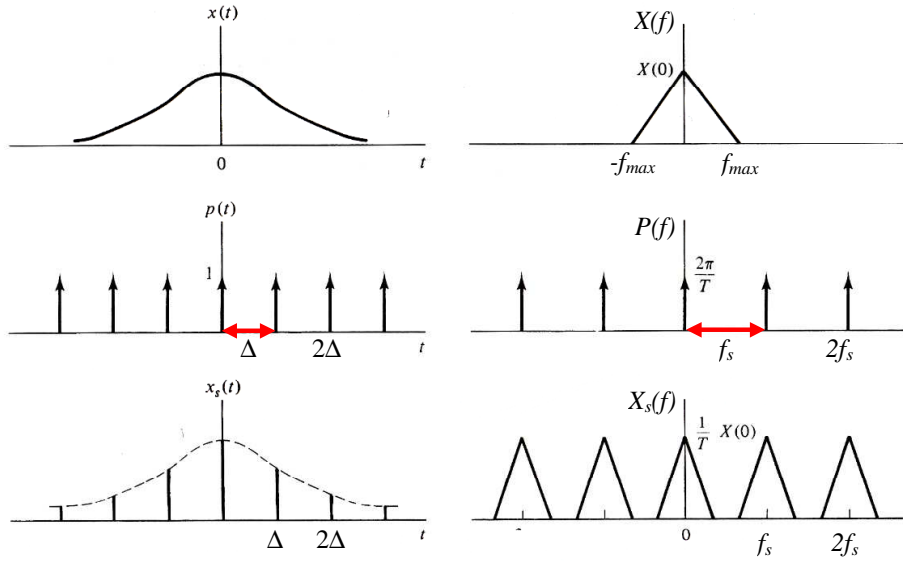


Figura 2.6 Representación espectral de la señal muestreada

El espectro de la señal muestreada, Figura 2.6, se obtiene como convolución del espectro de la señal $x(t)$ y el espectro del tren de impulsos $p(t)$, por tanto, consiste en la repetición periódica de $X(f)$ cada f_s Hz como puede apreciarse en la Figura 2.6.

Si la frecuencia de muestreo f_s se reduce, los espectros se tocan o se solapan, como muestra la Figura 2.7. Cuando esto sucede, no podrá recuperarse la señal original a partir de la señal muestreada, apareciendo en el espectrograma unas frecuencias que no forman parte de la señal original.

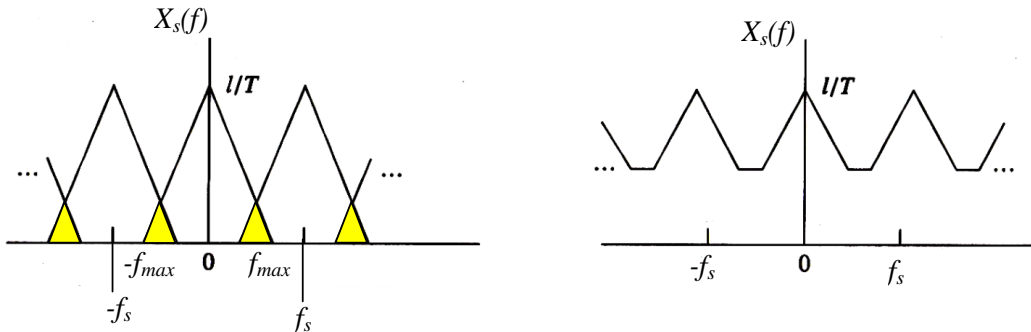


Figura 2.7 Efecto generado al reducir la frecuencia de muestreo

Evitar este fenómeno es de vital importancia, ya que la distorsión de solapamiento hará que el espectro resultante difiera del real, si existen frecuencias superiores, por ello, en ocasiones, puede ser necesario filtrar la serie temporal para eliminar todas las frecuencias superiores a $1/2\Delta t$ y así estar seguros de que los resultados son correctos.

A pesar de evitar el efecto del solapamiento, el criterio de Nyquist no es del todo adecuado ya que tomar una muestra de dos puntos por longitud de onda para la frecuencia superior no nos proporciona una buena calidad, siendo una pobre representación de la realidad, por lo que normalmente, en los analizadores comerciales, se utiliza el criterio:

$$f_o \prec \frac{1}{3 \cdot \Delta t} \quad (2.7)$$

Efecto ventana o 'leakage'

Cuando se utiliza la FFT se presupone que el registro del tiempo se repite periódicamente fuera del tiempo representado en él. Esto es cierto si la señal contenida en el registro contiene un número entero de ciclos, es decir, la señal es periódica en el tiempo de registro. Sin embargo, si la señal no cumple esta condición, se estará suponiendo una señal que puede ser muy diferente a la original.

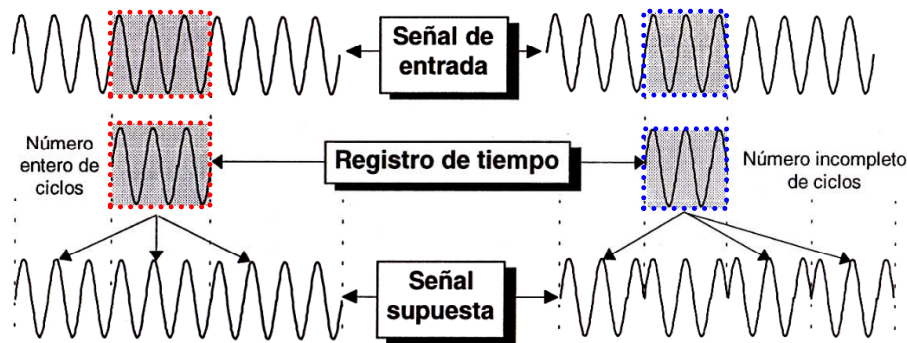


Figura 2.8 Efecto leakage

Este es un problema que puede llegar a ser muy importante, ya que puede alterar el resultado de la FFT. Este problema se puede paliar utilizando una función denominada ventana espectral. Como el problema fundamental de la falta de periodicidad se encuentra en los extremos, se busca en estas funciones que la influencia de los extremos sea despreciable, dando preponderancia a la zona central del registro.

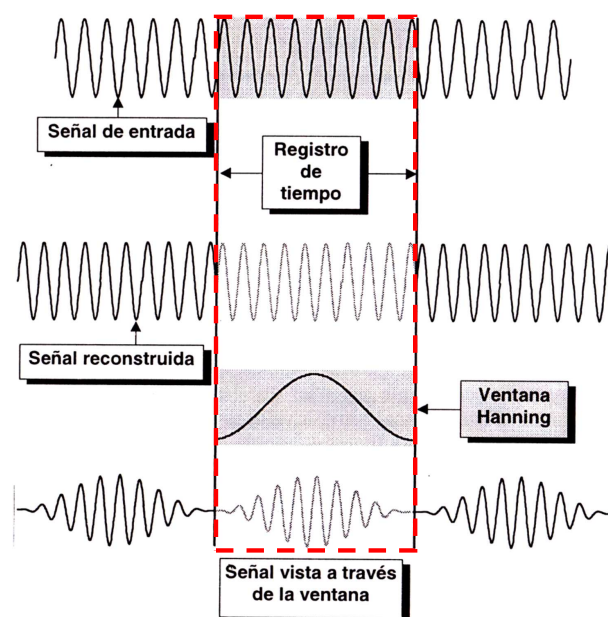


Figura 2.9 Aplicación de la ventana temporal a una señal

Existen muchos tipos de ventana, cada una de las cuales tiene una aplicación restringida. Algunas de ellas son:

- La ventana uniforme. Se aplica en los casos donde la señal no es periódica y por tanto, no hay que forzarla a ello, tal es el caso de los transitorios.
- La ventana Hanning. Se aplica cuando la señal no es periódica en el registro de tiempo y hay que forzarla a ello. Los resultados obtenidos son buenos en la frecuencia pero introduce un cierto grado de atenuación en la amplitud.
- La ventana Flattop. Se aplica de igual forma cuando la señal no es periódica en el registro de tiempo y hay que forzarla a ello. Los resultados obtenidos son buenos en la amplitud pero presenta peores resultados en la frecuencia.

La Tabla 2.2 muestra algunas de las ventanas más comunes y sus características.

<i>Tipo de ventana</i>	<i>Lóbulo más alto (dB)</i>	<i>Ancho de banda ($\times 1/T$)</i>	<i>Caída asintótica (dB/década)</i>	<i>Máxima amplitud del error (dB)</i>
Rectangular	-13.4	1.00	-20	3.9
Bartlett	-26	1.25	-40	-
Hanning	-32	1.50	-60	1.4
Hamming	-43	1.36	-20	1.8
Kaiser-Bessel	-69	1.80	-20	1.0
Gaussiana	-69	1.90	-20	0.9
Flattop	-93	3.70	0	< 0,1

Tabla 2.2 Propiedades espectrales de algunas ventanas temporales

Efecto empalizada o 'Picket-Fence'

Como el espectro es calculado a frecuencias discretas, la amplitud y frecuencia real de las componentes puede perderse tal como muestra la Figura 2.5. Esto se soluciona mejorando la resolución en frecuencia ya sea un mayor número de líneas o una frecuencia máxima de menor valor.

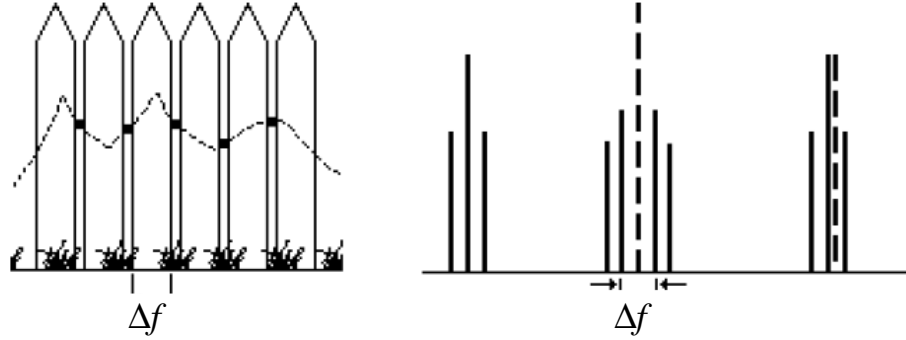


Figura 2.10 Efecto Picket-Fence

2.2.2. PSD y potencia espectral

La Densidad de Potencia Espectral (Power Spectral Density, PSD) de una señal es una función matemática que nos informa de cómo está distribuida la potencia o la energía de dicha señal sobre las distintas frecuencias que la componen (su espectro). Para poder realizar un mejor análisis espectral, tras obtener los valores X_k aplicando la FFT, se muestra la densidad de potencia espectral (PSD).

Supongamos que x_n representa un voltaje. La potencia disipada sobre una resistencia de valor R , vale:

$$P_n = x_n^2 / R \quad (2.8)$$

Si el valor de esta resistencia es de $R = 1$ ohmio, la potencia media disipada durante un periodo de tiempo T , viene dada por la ecuación 2.9

$$P_{media} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 \Delta}{T} \quad (2.9)$$

donde la longitud total de la señal $T = N \cdot \Delta$, siendo N el número de muestras. Por tanto:

$$P_{media} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2}{N} \quad (2.10)$$

Teniendo en cuenta el teorema de Parseval para la DFT:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2 \quad (2.11)$$

podemos poner la ecuación 2.10 como:

$$P_{media} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} |X_k|^2}{N^2} \quad (2.12)$$

En el dominio de la frecuencia, la potencia media puede obtenerse mediante la ecuación

$$P_{media} = \sum_{k=0}^{N-1} S(f)_k \cdot \Delta f \quad (2.13)$$

donde $S(f)_k$ es la densidad de potencia espectral de la frecuencia k .

Combinando las ecuaciones 2.12 y 2.13, resulta:

$$\frac{|X_k|^2}{N^2} = S(f)_k \cdot \Delta f \quad (2.14)$$

teniendo en cuenta que $\Delta f = 1/T$ y que $T = N \cdot \Delta$

$$\frac{|X_k|^2}{N^2} = S(f)_k \cdot \frac{1}{N \cdot \Delta} \quad (2.15)$$

quedando finalmente que la densidad de potencia espectral para cada frecuencia vale:

$$S(f)_k = \frac{\Delta \cdot |X_k|^2}{N} = \frac{\Delta}{N} \cdot X_k \cdot X_k^* \quad (2.16)$$

2.2.3. Envolvente y espectro de la envolvente

El análisis del espectro de la envolvente se ha convertido en una de las técnicas más utilizadas para detectar anomalías en los rodamientos. La técnica utilizada para la detección de defectos de elemento rodantes era de examinar la vibración de baja frecuencia (generalmente inferiores a 500 Hz) en el espectrograma y examinar la presencia (o no) de las frecuencias de defecto. Estas frecuencias de fallo se calculan a partir de la geometría del rodamiento y de la velocidad de rotación del anillo interno y anillo externo.

El diagnóstico consistía simplemente en calcular las frecuencias de defecto y luego supervisar el espectrograma de la señal de vibración hasta que estas frecuencias aparecieran. Pero no siempre se conseguía reconocer un rodamiento defectuoso, en muchas ocasiones, la visión del espectrograma no era suficiente para identificar el problema.

En 1971, Huntsville con la NASA, apoyo un programa para investigar la detección de defectos en rodamientos demostrando que la técnica utilizada hasta entonces, no era capaz de detectar rodamientos defectuosos cuando estos se encontraban en su fase incipiente.

Para investigar esto, se practicó un pequeño defecto en la pista de rodadura del anillo interno en un rodamiento, se colocó en un banco de ensayos de rodamientos donde se capto por medio de distintos sensores: la señal de vibración generada por este rodamiento defectuoso, la señal acústica, el par de accionamiento y la temperatura. Tras analizar detenidamente todas las señales obtenidas, ninguna de ellas mostraba la presencia del defecto. La Figura

2.11 muestra la diferencia de los espectros de la señal de vibración de un rodamiento nuevo y el rodamiento defectuoso ensayado.

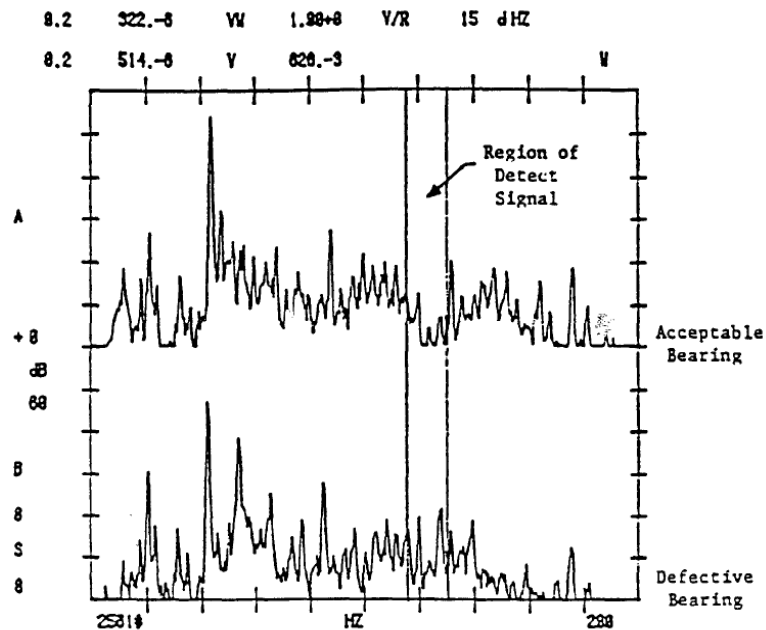


Figura 2.11 Comparación del espectro de vibración de un rodamiento nuevo y defectuoso

Un día decidieron colocar un osciloscopio para observar la señal temporal directamente. La Figura 2.12 muestra esta señal temporal.

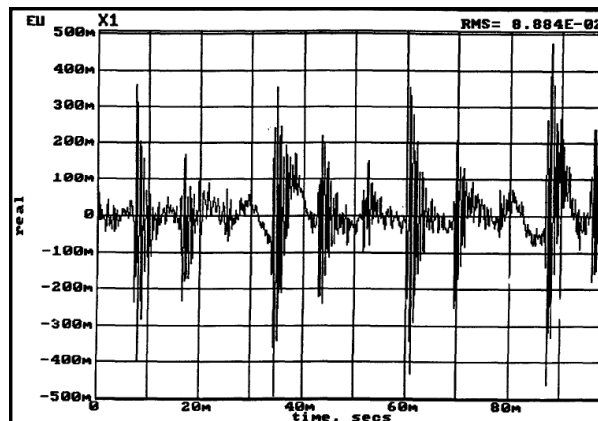


Figura 2.12 Señal temporal del rodamiento defectuoso

El tiempo fue medido entre las señales de impacto y cuando fue convertido a frecuencia, se obtuvo el valor de la frecuencia de defecto para un rodamiento con defecto de pista interna. Si pudiera ser dibujada una línea alrededor de la señal como muestra la Figura 2.13, entonces el espectro de esta nueva señal (envolvente), debería mostrar la frecuencia de defecto. Para obtener la envolvente de la señal, utilizaron un demodulador similar a aquellos usados en la detección de las ondas de radio de amplitud modulada.

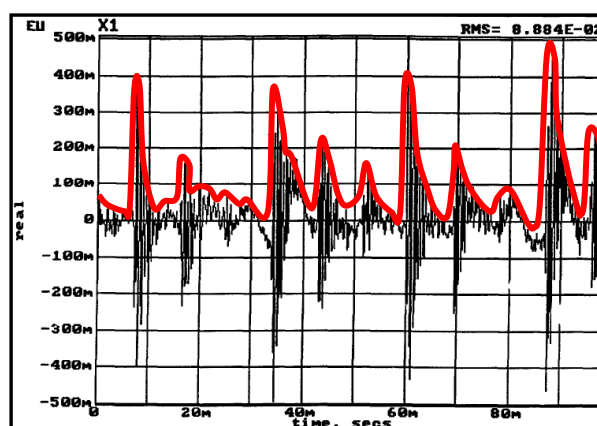


Figura 2.13 Envolvente señal temporal de rodamiento defectuoso

La Figura 2.14 muestra el espectro de la envolvente. La señal de defecto es ahora claramente evidente con una amplitud muy buena a la frecuencia de defecto.

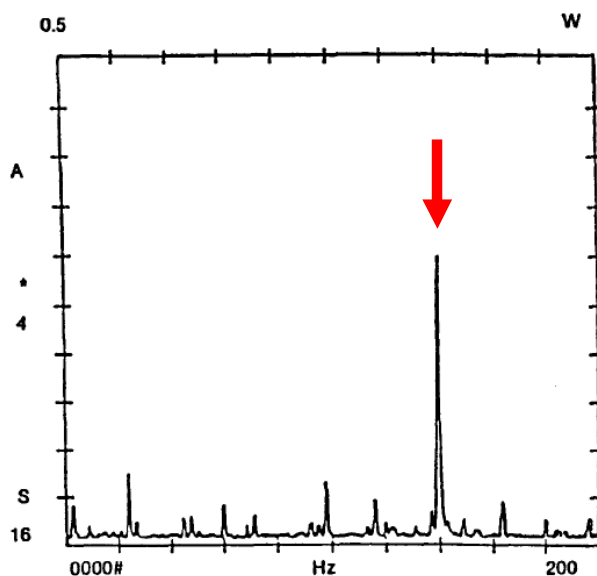


Figura 2.14 Espectro de la envolvente de la señal temporal de rodamiento defectuoso

El estudio de la vibración en alta frecuencia y el análisis de la envolvente fueron descubiertos casi por casualidad en este programa. Mediante ese trabajo demostraron que el análisis directo del espectro a baja frecuencia para la señal de defecto es mucho menos sensible que el análisis del espectro de la envolvente.

El análisis de la envolvente o análisis por demodulación se realiza según una secuencia de acciones que pasamos a detallar:

- Captar la señal y aplicar un filtro paso alto para eliminar señales como desequilibrios, ruido eléctrico (50 Hz) , etc.
- Seguidamente se rectifica la señal y se elimina la componente continua que pudiera presentar la onda.

- Por medio de un detector de envolvente, extraer la señal moduladora que es la que nos interesa.
- A continuación se obtiene el espectro de la envolvente.

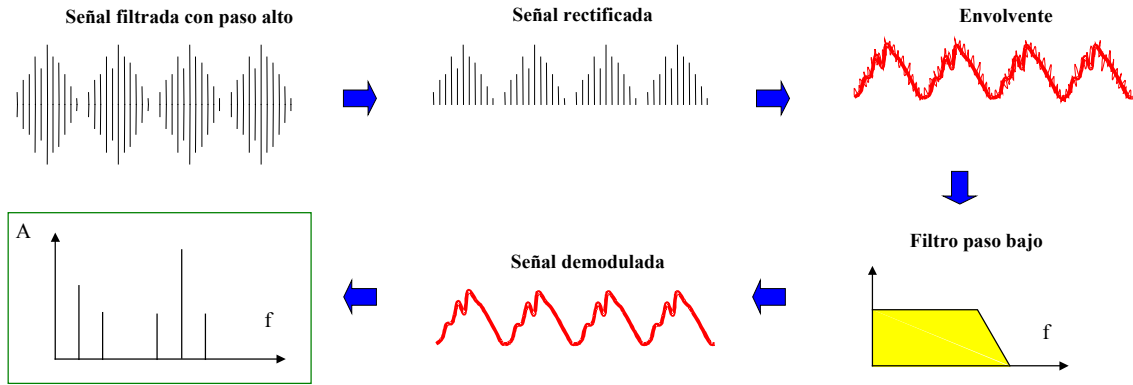


Figura 2.15 Proceso de demodulación

Este método de demodulación presenta algunos inconvenientes causados por el uso del filtro paso bajo, ya que este causa un efecto de promediado que alisa o rebaja los picos en la señal demodulada. Para eliminar estos errores e imperfecciones, se extiende el uso de la transformada de Hilbert para extraer la envolvente de una señal.

Proceso de demodulación

En primer lugar se debe recordar que una señal modulada puede ser representada como la parte real de una señal analítica:

$$g(t) = A(t) \cdot e^{j \cdot \phi(t)}$$

donde $A(t)$ representa la función de la modulación de amplitud de la señal (más un componente directo en continua DC) y $\phi(t)$ representa la función de la modulación de frecuencia de la señal (más la componente de la frecuencia transportadora f_0).

Una señal $x(t)$ puede ser demodulada mediante el proceso de transformada de Hilbert, el cual es el siguiente:

1. Se calcula la transformada de Hilbert de la función dada $x(t)$. El valor de la transformada de Hilbert de $x(t)$ se denotará por $\tilde{x}(t)$.
2. Se forma la señal analítica:

$$z(t) = x(t) + j \cdot \tilde{x}(t)$$

3. Se descompone la señal analítica en su amplitud y en su fase: $z(t) = A(t) \cdot e^{j \cdot \phi(t)}$ La fase de la señal analítica de modulación será:

$$\phi(t) = 2\pi \cdot f_0 \cdot t + \beta \cdot \text{sen}(2\pi \cdot f_m \cdot t)$$

donde f_0 será la frecuencia de la onda transportadora; β será la máxima desviación de fase alrededor de f_0 ; y f_m es la frecuencia moduladora.

4. El factor exponencial se multiplica por $e^{-j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t}$, es decir:

$$e^{j \cdot \phi(t)} \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t}$$

para extraer la componente de frecuencia transportadora f_0 y, así, la función de fase resultante será la señal de modulación de fase $\phi_m(t)$ que se buscaba.

Dicha señal de modulación de fase $\phi_m(t)$ será:

$$\phi_m(t) = \beta \cdot \text{sen}(2\pi \cdot f_m \cdot t)$$

5. Finalmente, se calcula $\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} \phi_m(t)$, esto es:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} \phi_m(t) = \beta \cdot f_m \cdot \cos(2\pi \cdot f_m \cdot t)$$

para poder obtener el valor de la señal de modulación de frecuencia, f_m .

La transformada de Hilbert

La Transformada de Hilbert, en términos generales, puede ser definida de tres maneras distintas:

- Como integral de convolución.
- Como sistema de cambio de fase de $\pi/2$.
- Como parte imaginaria de una señal analítica.

A continuación se presentan los detalles de cada una de estas formas.

1. Definición como integral de convolución

La transformada de Hilbert de una función de valores reales $x(t)$ en el rango $-\infty < t < \infty$ es una función de valores reales $\tilde{x}(t)$ definida como:

$$\tilde{x}(t) = H[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \frac{1}{t-u} du$$

Es decir, $\tilde{x}(t)$ es la integral de convolución de $x(t)$ y $(1/\pi \cdot t)$, lo cual puede expresarse como:

$$\tilde{x}(t) = x(t) * \left(\frac{1}{\pi \cdot t} \right)$$

De manera semejante a lo expuesto, se podría expresar la transformada inversa de Hilbert como:

$$x(t) = H^{-1}[\tilde{x}(t)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(u) \frac{1}{t-u} du$$

2. Definición como sistema de cambio de fase de $\pi/2$.

Si $\tilde{X}(f)$ es la transformada de Fourier de $\tilde{x}(t)$, se cumplirá que:

$$\tilde{X}(f) = F[\tilde{x}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} \cdot dt$$

Entonces, considerando que $X(f)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$ y además:

$$\tilde{x}(t) = x(t) * \left(\frac{1}{\pi \cdot t} \right)$$

se puede afirmar que $\tilde{X}(f)$ es el resultado de multiplicar $X(f)$ por la transformada de Fourier de $(1/\pi \cdot t)$, siendo esta igual a:

$$F\left[\frac{1}{\pi \cdot t}\right] = -j \cdot \text{sgn}f = \begin{cases} -j & f > 0 \\ j & f < 0 \\ 0 & f = 0 \end{cases}$$

De todo lo expuesto hasta ahora, se deduce lo siguiente:

$$\tilde{X}(f) = (-j \cdot \text{sgn}f) \cdot X(f)$$

La variable compleja $\tilde{X}(f)$ no es la transformada de Hilbert de la variable compleja $X(f)$. La relación existente entre $\tilde{X}(f)$ y $\tilde{x}(t)$ consiste en que $\tilde{x}(t)$ es la transformada inversa de Fourier de $\tilde{X}(f)$:

$$\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(f) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} \cdot df$$

La transformada de Fourier de $(1/\pi \cdot t)$, es decir $(-j \cdot \text{sgn}f)$, puede ser representada como $B(f)$:

$$B(f) = -j \cdot \text{sgn}f = \begin{cases} e^{-j \cdot (\frac{\pi}{2})} & f > 0 \\ 0 & f = 0 \\ e^{j \cdot (\frac{\pi}{2})} & f < 0 \end{cases} \Rightarrow B(f) = |B(f)| \cdot e^{-j \cdot \phi(f)}$$

Esto es, $B(f)$ es un sistema de cambio de fase de $(\pi/2)$, donde:

$$|B(f)| = 1 \quad \text{para todo } f \neq 0$$

$$\phi_b(f) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & f > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & f < 0 \end{cases}$$

Si se expresa $X(f)$ como:

$$X(f) = |X(f)| \cdot e^{-j \cdot \phi_x(f)}$$

También se puede expresar $\tilde{X}(f)$ como:

$$\tilde{X}(f) = \tilde{X}(f) \cdot e^{-j \cdot \tilde{\phi}_x(f)} = |X(f)| \cdot e^{-j \cdot [\phi_x(f) + \phi_b(f)]}$$

Con lo que se puede afirmar que la transformada de Hilbert consiste en pasar $x(t)$ a través de un sistema que deja la magnitud de $X(f)$ inalterada, pero cambia la fase de $\phi_x(f)$

a $[\phi_x(f) + \phi_b(f)]$. Por eso, si se utilizan los valores de $\phi_b(f)$ expuestos anteriormente, resulta:

$$\begin{cases} \phi_x(f) \Rightarrow \phi_x(f) + \left(\frac{\pi}{2}\right) & f > 0 \\ \phi_x(f) \Rightarrow \phi_x(f) - \left(\frac{\pi}{2}\right) & f < 0 \end{cases}$$

Es decir, se efectuará un cambio de $(\pi/2)$ para frecuencias positivas y un cambio de $(-\pi/2)$ para frecuencias negativas.

La transformada inversa de Hilbert, para este tipo de definición, puede ser expresada como:

$$x(t) = F^{-1} \left[(j \cdot \text{sgn} f) \cdot \tilde{X}(f) \right]$$

3. Definición como parte imaginaria de una señal analítica.

La tercera manera de entender la transformada de Hilbert $\tilde{x}(t)$ es por medio de la señal analítica $z(t)$ asociada con $x(t)$, y que puede ser definida como:

$$z(t) = x(t) + j \cdot \tilde{x}(t) = A(t) \cdot e^{j \cdot \theta(t)}$$

Al término $A(t)$ se le denomina señal envolvente de $x(t)$.

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)}$$

Y al término $\theta(t)$ señal de fase instantánea $x(t)$.

$$\theta(t) = \tan^{-1} \left[\frac{\tilde{x}(t)}{x(t)} \right] = 2\pi \cdot f_0 \cdot t$$

La frecuencia instantánea f_0 viene dada por:

$$f_0 = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \cdot \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Si se considera que $Z(f)$ es la transformada de Fourier de $z(t)$, entonces:

$$Z(f) = F[z(t)] = F[x(t) + j \cdot \tilde{x}(t)] = F[x(t)] + j \cdot F[\tilde{x}(t)] = X(f) + j \cdot \tilde{X}(f)$$

La transformada inversa de Fourier de $Z(f)$ será:

$$z(t) = F^{-1}[Z(f)] = x(t) + j \cdot \tilde{x}(t)$$

donde $\tilde{x}(t)$ es:

$$\tilde{x}(t) = H[x(t)] = \text{Im}[z(t)]$$

Cálculo de la transformada de Hilbert.

Por la definición de la transformada de Hilbert como sistema de cambio de fase de $\pi/2$, se sabe que:

$$\tilde{X}(f) = (-j \cdot \text{sgn} f) \cdot X(f)$$

De esto y de la definición como parte imaginaria de una señal analítica se deduce que:

$$Z(f) = X(f) + j \cdot \tilde{X}(f) = (1 + \text{sgn} f) \cdot X(f) = B_1(f) \cdot X(f)$$

donde los valores de $B_1(f)$ serán:

$$B_1(f) = \begin{cases} 2 & f > 0 \\ 1 & f = 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$

De todo esto se extrae que, mediante una transformación muy simple, se obtiene $Z(f)$ a partir de $X(f)$. Es decir, primero se calcularía $X(f)$ para todo f y después se definiría $Z(f)$ como:

$$Z(f) = \begin{cases} 2 \cdot X(f) & f > 0 \\ X(0) & f = 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$

La forma más recomendable de calcular la transformada de Hilbert es hallar la transformada inversa de Fourier de $Z(f)$, lo cual nos da el valor de $z(t)$, donde, como ya habíamos visto, $\tilde{x}(t) = \text{Im}[x(t)]$. Esto se puede resumir en las siguientes ecuaciones:

$$x(t) = \text{Re} \left[2 \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} \cdot df \right]$$

$$\tilde{x}(t) = \text{Im} \left[2 \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} \cdot df \right]$$

Cálculo de la transformada discreta de Hilbert.

A continuación se obtendrán las fórmulas discretas para $x(t)$ y $\tilde{x}(t)$. Partiendo de la ecuación de la transformada inversa discreta de Fourier:

$$x_n = x(n \cdot \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}} \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$$

obteniendo para $N = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$ las siguientes ecuaciones:

$$x(n \cdot \Delta t) = 2 \cdot \Delta f \cdot \text{Re} \left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} X(k \cdot \Delta f) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}} \right]$$

$$\tilde{x}(n \cdot \Delta t) = 2 \cdot \Delta f \cdot \text{Im} \left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} X(k \cdot \Delta f) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}} \right]$$

donde:

$$\Delta f = \frac{1}{N \cdot \Delta t}$$

$$X(k \cdot \Delta f) = \Delta t \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n \cdot \Delta t) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}}$$

Es importante resaltar que los valores de $X(k \cdot \Delta f)$ necesarios para la obtención de los valores discretos de $x(n \cdot \Delta t)$ y su transformada de Hilbert $\tilde{x}(n \cdot \Delta t)$, van desde $k = 0$ hasta $k = N/2$, por la frecuencia de Nyquist.

Finalmente, la señal discreta de la envolvente de $x(t)$ estará dada por:

$$A(n \cdot \Delta t) = \sqrt{x^2(n \cdot \Delta t) + \tilde{x}^2(n \cdot \Delta t)}$$

2.2.4. Spike-Energy

Spike energy es una unidad de medida utilizada para evaluar el correcto funcionamiento de un rodamiento. Es muy utilizada en máquinas con rodamientos donde el daño consiste usualmente en el desarrollo de micro-fisuras en las pistas de rodadura. Cada vez que el elemento rodante pasa por estas micro-fisuras se producen pequeños impactos, los cuales a su vez liberan una cierta cantidad de energía en pequeños intervalos de tiempo (pulsos).

La vibración originada por estos pulsos es mucho menor que la vibración total y no puede ser medida utilizando los métodos convencionales. Sin embargo, la aceleración durante los pulsos es muy alta. El método de spike energy consiste en detectar estos pulsos de alta aceleración y relacionarlos con defectos en rodamientos. La medida del Spike Energy se realiza a través de un acelerómetro, cuyas frecuencias naturales, así como las de los componentes de la máquina, son excitadas por los impactos mecánicos en el rango de las frecuencias altas, dando como resultado picos periódicos de energía a alta frecuencia. La magnitud encargada de medir esta señal se denomina 'gSE' (unidad de aceleración de Spike Energy).

El spike energy se suma a la lista de parámetros de vibración, junto a desplazamiento, velocidad y aceleración, dándonos una herramienta mas para realizar un adecuado mantenimiento predictivo. Los equipos o analizadores provistos de esta capacidad registran un único valor de spike energy, al cual podemos evaluarlo con respecto a valores pre-establecidos e ir viendo el desarrollo de su tendencia con respecto al tiempo. El rango de frecuencias va de los 5000 a los 25000 Hz

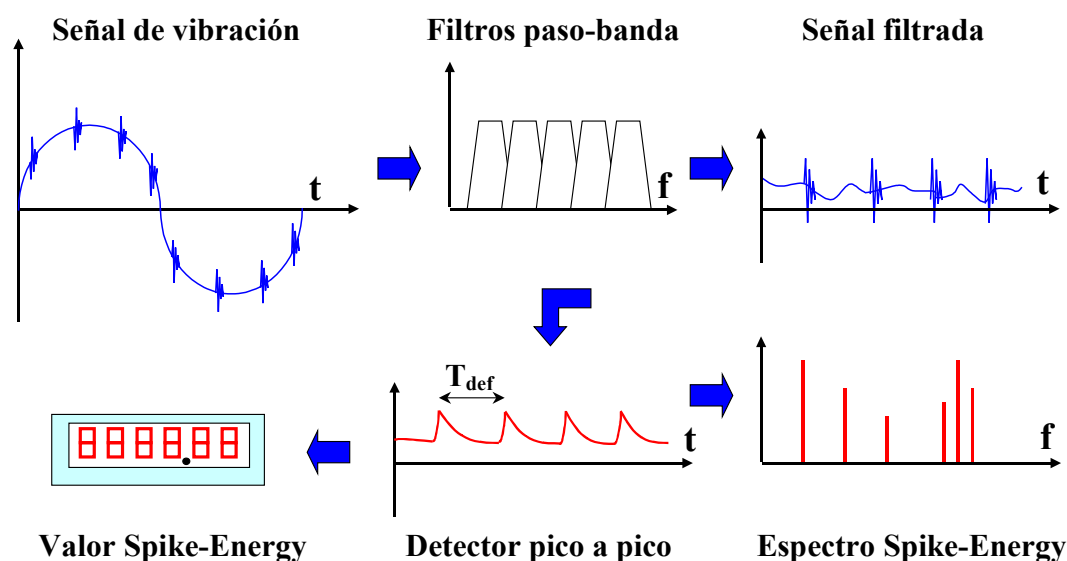


Figura 2.16 Esquema del proceso de análisis de una señal mediante Spike Energy

La señal de vibración es medida por un acelerómetro y filtrada, con filtros pasa banda. El propósito de tener una frecuencia de corte inferior es el de eliminar de la señal las vibraciones a bajas frecuencias, dado que estas son debidas a defectos como desalineamientos, desequilibrios..., los cuales no son objeto de análisis con este método.

Posteriormente, la señal de vibración pasa a través de un detector pico a pico, el cual detecta y mantiene la amplitud pico a pico de la señal. La lectura en unidades gSE está determinada

por la intensidad de estos picos de alta frecuencia. El esquema de procesado de señal mediante el método de Spike Energy será similar al reflejado en la Figura 2.16. En comparación con otros procesos de detección de defectos, tales como la demodulación, el análisis Spike Energy no sólo mantiene el grado de severidad de los defectos, sino que además realza la frecuencia fundamental de estos defectos $f_{def} = 1/T_{def}$, así como sus armónicos, mediante la aplicación de la constante de tiempo de caída correcta. La constante de tiempo de caída es una función dependiente de la frecuencia máxima (Fmax). Esta constante determina la forma de la señal que recibe el detector pico a pico del Spike Energy debido a que afecta tanto a la magnitud global de Spike Energy como a los términos armónicos del espectro.

La Spike Energy es una medida de alta frecuencia y sus resultados pueden ser afectados por las condiciones del acelerómetro, es decir, es posible obtener resultados distintos al usar diferentes acelerómetros, por lo que se debe usar siempre el mismo para asegurar la consistencia de los resultados. Lo mismo ocurre con el lugar de toma de medidas y con el tipo de montaje del acelerómetro, por lo que todos estos parámetros deben permanecer constantes para asegurar un buen diagnóstico al comparar los datos.

2.2.5. Análisis Wavelet

La primera mención registrada del término *wavelet* fue en 1909, en la tesis de Alfred Haar. El concepto de wavelets en su forma teórica actual fue primeramente propuesta por Jean Morlet y por el equipo del Marseille Theoretical Physics Center (Francia), con su formulación de lo que hoy conocemos como transformada wavelet continua, Olov-Strömberg con su trabajo sobre wavelets discretas (1983), Ingrid Daubechies, con su propuesta de wavelets ortogonales con soporte compacto (1988), Mallat y Meyer, con su marco multiresolución (1989), Delrat con su interpretación de la transformada wavelet en tiempo-frecuencia (1991), Newland, con su transformada wavelet armónica.

La Figura 2.17 muestra una señal cuya frecuencia varía en el tiempo.

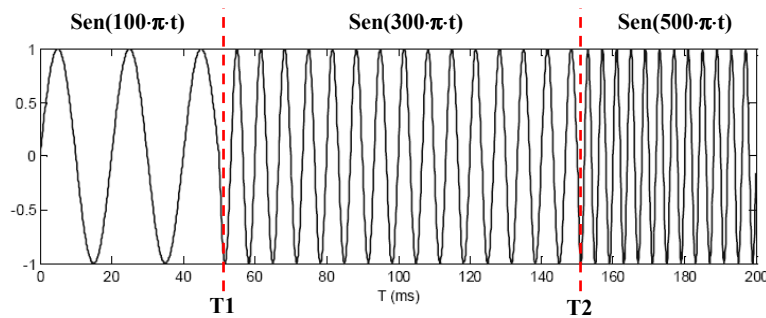


Figura 2.17 Señal de frecuencia variable en el tiempo

La Figura 2.18 muestra el espectro de la señal. Pueden apreciarse los picos de las frecuencias componentes de esta señal de 50 Hz, 150 Hz y 250 Hz, pero no se obtiene ningún tipo de información del instante en que han aparecido o desaparecido en el tiempo.

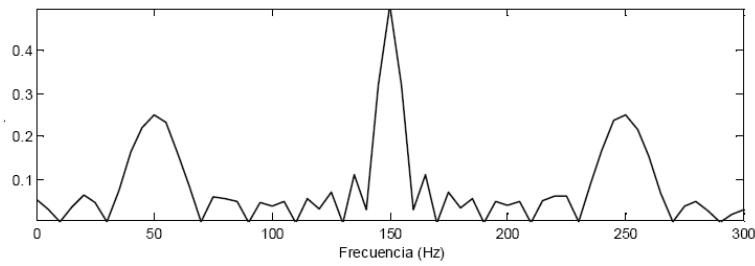


Figura 2.18 Espectro de señal de frecuencia variable en el tiempo

Para intentar corregir las deficiencias que presenta la transformada de Fourier, Dennis Gabor (1946) desarrolla la transformada rápida STFT (Short Time Fourier Transform), para las representaciones en un diagrama tiempo-frecuencia de señales no estacionarias. Básicamente consiste en dividir la señal en diferentes partes donde se puede asumir que la señal es estacionaria. La señal es multiplicada por una función $w(t)$ ventana, cuya anchura debe ser igual a parte de la señal que se puede considerar como estacionaria. Esta función ventana inicialmente está localizada al inicio de la señal, es decir $t = 0$. Si se asume que la anchura de la ventana es " T " seg. entonces esta función se solapará con la señal para los primeros " $T/2$ " seg. La función ventana y la señal son entonces multiplicadas, de esta forma, solamente los primeros " $T/2$ " seg. de la señal están siendo escogidos. Una vez hecho esto la nueva señal es el producto de la función ventana y la señal original a la que se le aplica la transformada de Fourier.

De este modo, se revela la información en frecuencia localizada temporalmente en el dominio efectivo de la ventana. Desplazando temporalmente la ventana se cubre el dominio de la señal obteniéndose la completa información tiempo - frecuencia de la misma: Esta variante de la Transformada de Fourier se denominó STFT y está definida por la ecuación 2.17:

$$STFT(t, f) = \int x(t)w^*(t - t')e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.17)$$

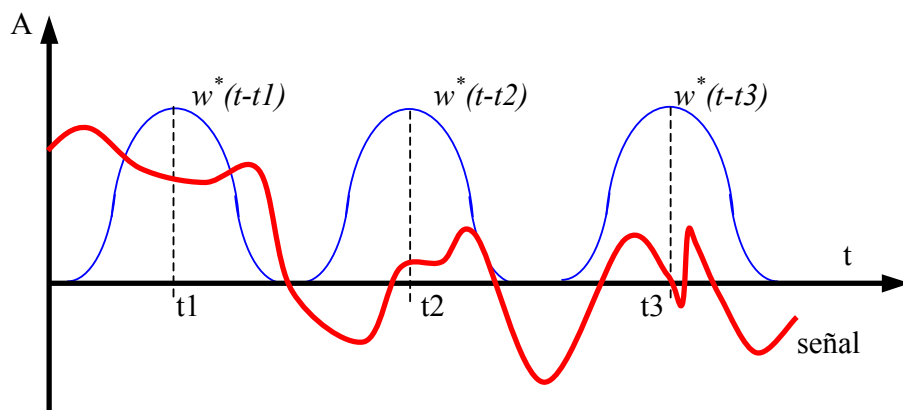


Figura 2.19 Transformada STFT

Puede observarse la similitud con la transformada de Fourier, solo que ahora existe una ventana que se desplaza en el tiempo $w^*(t - t')$, que muestra información de la señal a lo

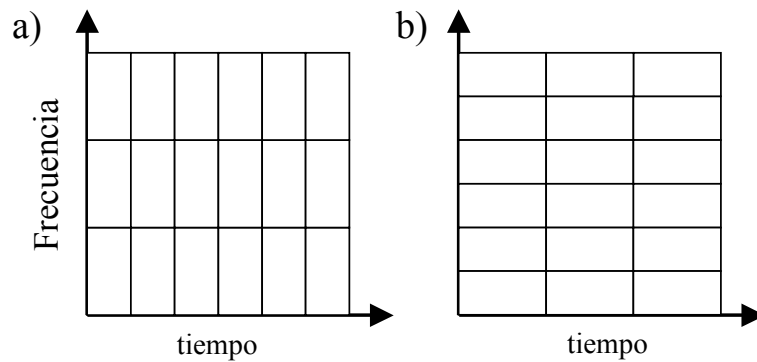


Figura 2.20 Representación tiempo frecuencia, a) mejor resolución temporal ; b) mejor resolución frecuencial

largo del tiempo, paliando algunas limitaciones de la transformada de Fourier.

En la STFT la ventana que se aplica es de longitud finita, es decir sólo se aplica a una parte de la señal, causando una disminución de la resolución en frecuencia, con lo cual sólo es posible conocer una banda de frecuencias y no un valor exacto de frecuencias. En consecuencia, existe un compromiso entre buena resolución en el tiempo o buena resolución en frecuencia. Cuanto más estrecha sea la ventana se obtendrá mejor resolución en el tiempo y por lo tanto una mejor representación de la estacionalidad pero esto presenta una peor resolución en frecuencia. Por tanto, el problema consiste en la selección de una ventana para el análisis, dependiendo de la aplicación.

La STFT presenta a su vez otro inconveniente, ya que a pesar de mostrar información frecuencial y temporal, la anchura de las ventanas deslizantes que se utilizan poseen unas dimensiones fijas, es decir, la resolución con la que se observa la señal es la misma a bajas y altas frecuencias.

Este es el origen de la transformada wavelet, pues esta transformada maneja distintas resoluciones frecuenciales y temporales. Generalmente en las bajas frecuencias de una señal se encuentran la mayor parte de la información, quedando las altas frecuencias para detalles muy específicos, de ahí que no resulte atractivo ni eficiente analizar una señal con la misma resolución para todas las frecuencias.

La Figura 2.21a) representa el estudio tradicional de la amplitud de una señal en el dominio del tiempo, las muestras se toman a intervalos regulares de tiempo. En la Figura 2.21b) correspondiente a la FFT, la amplitud se mide en función de la frecuencia, siendo constantes los intervalos de esta. El siguiente paso, Figura 2.21c) es determinar el espectro de frecuencias de la señal en diferentes intervalos iguales de tiempo. La diferencia entre las figuras Figura 2.21c) y d) está en que mientras que en la STFT se estudia todo el espectro de frecuencias con el mismo intervalo (ventana de anchura constante), en el análisis wavelet, el intervalo entre frecuencias de estudio es función del punto del espectro en el que nos encontremos. En el análisis wavelet, aparece el concepto de escala, relacionado con la frecuencia.

Básicamente, lo que hace la transformada wavelet es filtrar una señal en el dominio del tiempo mediante filtros paso bajo y paso alto que eliminan ciertas componentes de alta o baja frecuencia de la señal, el procedimiento se repite para las señales resultantes del proceso de filtrado anterior.

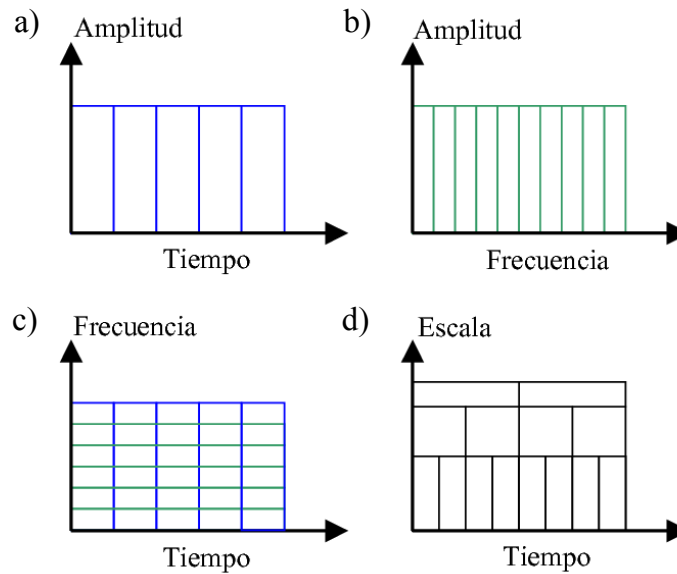


Figura 2.21 Diferentes tipos de transformaciones

Una wavelet es una forma de onda, de duración limitada, que tiene un valor medio de cero.

$$\int \psi(t) dt = 0$$

La Figura 2.22 muestra una de ellas perteneciente a la familia Daubechies.

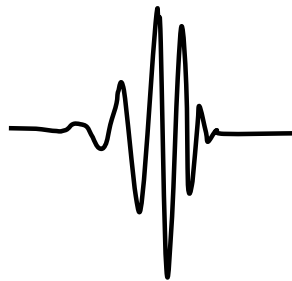


Figura 2.22 Representación de una wavelet tipo Daubechies 10

Las wavelet son unas funciones matemáticas que reacomodan la información contenida en la señal temporal en distintas componentes frecuenciales cuyas resoluciones se asocian a una escala. Una familia wavelet está definida por la ecuación:

$$\psi(t)_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) ; \quad a, b \in R \quad a > 0 \quad (2.18)$$

Donde a es el parámetro de escala o dilatación y b es el parámetro de desplazamiento o traslación. Esta familia de funciones son una copia de una función genérica denominada wavelet madre, trasladada y escalada mediante las variables a y b . Debido a que la WT incluye información relacionada con el tiempo y la frecuencia,

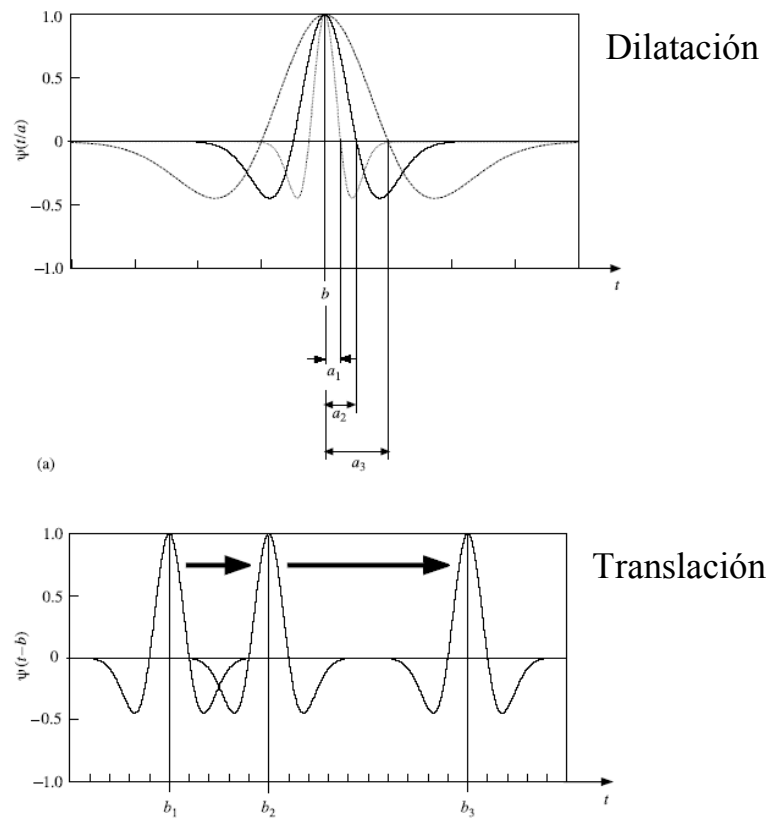


Figura 2.23 Dilatación y traslación de una wavelet madre

La transformación continua de wavelet (CWT) es el resultado de la convolución de la señal a lo largo de todo el tiempo con versiones de la familia wavelet obtenidas a partir de la wavelet madre (versiones estiradas/comprimidas y adelantadas/retardadas). Este proceso produce coeficientes wavelet, que son función de la escala y la posición. Los pasos seguidos en la generación de una CWT son los siguientes:

1. Coger un wavelet y compararlo con una sección de la señal al comienzo de la misma.
2. Calcular un número, C , que represente el grado de correlación del wavelet con esta sección de la señal. Mientras más alto sea C , más similitud existe. Es importante tener en cuenta que los resultados dependerán de la forma del wavelet elegido.

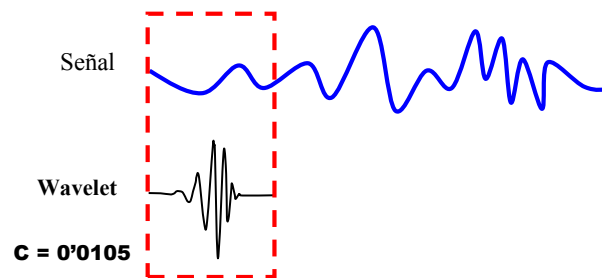


Figura 2.24 Proceso del análisis wavelet I

3. Desplazar el wavelet hacia la derecha y repetir los pasos 1 y 2 hasta que se haya cubierto

toda la señal.

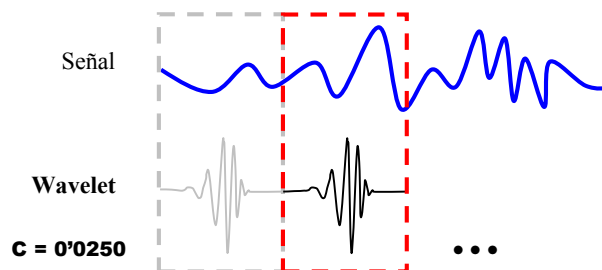


Figura 2.25 Proceso del análisis wavelet II

4. Estirar el wavelet y repetir los pasos 1-3.

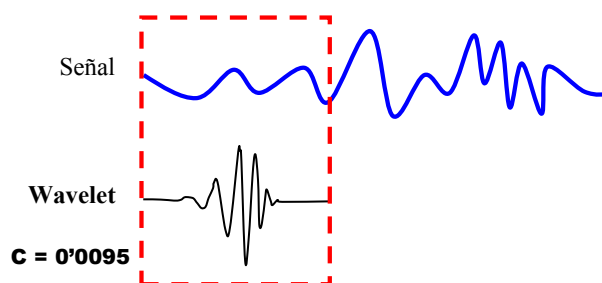


Figura 2.26 Proceso del análisis wavelet III

5. Repetir los pasos 1-4 para todas las escalas.

Cuando se ha completado el proceso, se obtienen los coeficientes producidos en diferentes escalas mediante diferentes secciones de la señal. Los coeficientes constituyen los resultados de una regresión de la señal original realizada con los wavelets.

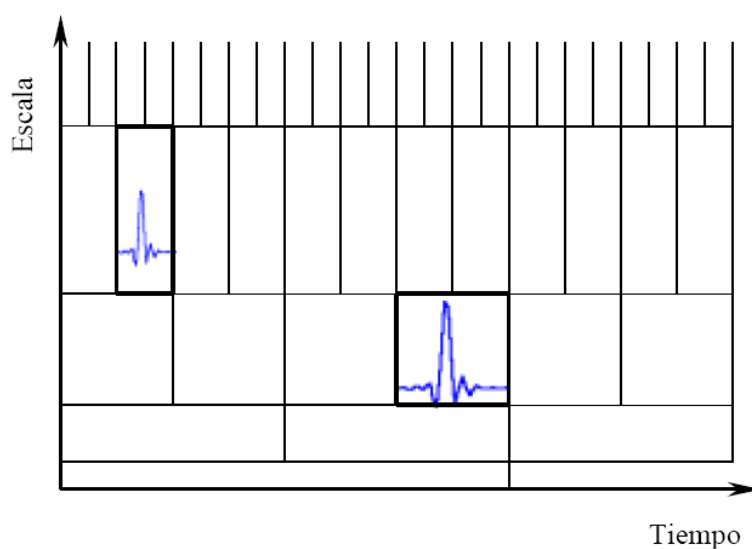


Figura 2.27 Proceso del análisis wavelet IV

Existe una correspondencia entre las escalas y frecuencias de los wavelets, y es la siguiente:

- Baja escala // wavelet comprimida // detalle en cambios rápidos // alta frecuencia.
- Alta escala // wavelet expandida // detalle en cambios lentos // baja frecuencia.

Cada celda en esta figura representa un valor de la WT en dicho plano. Es de destacar el hecho que estas celdas tienen una área no nula, lo cual indica que *no es posible conocer el valor de un punto* particular, sino de una zona o área. Sin tener en cuenta las dimensiones de las celdas, sus áreas, tanto en la STFT como en la WT, son las mismas, y están determinadas por el principio de incertidumbre de Heisenberg. En concreto, el área de cada celda se fija mediante la función de enventanado temporal en la STFT o por la Wavelet madre en la CWT (Transformada Wavelet Continua), con lo que diferentes ventanas o funciones madre dan lugar a diferentes áreas. Sin embargo, todas las áreas tienen una cota inferior dada por $\pi/4$.

Una wavelet madre tiene una serie de limitaciones. Esta he de tener energía finita.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$$

Debe cumplirse que:

$$C_g = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{f} df < \infty$$

donde $\hat{\psi}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)e^{-i2\pi ft} dt$ es la transformada de Fourier de $\psi(t)$.

La Figura 2.28 a) muestra la wavelet sombrero mejicano con tres dilataciones y la Figura 2.28 b) su espectro de energía. Todas ellas han de tener *la misma energía* por tanto, el area bajo sus curvas ha de ser idéntica.

Existen tres conceptos importantes en las wavelets: los momentos de desvanecimiento, soporte compacto y simetría. Los momentos de desvanecimiento nos permiten conocer la forma de la wavelet y es un parámetro para saber la adaptabilidad de la wavelet a un polinomio dado. Los momentos de desvanecimiento están definidos por la ecuación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \cdot t^i dt = 0$$

Una función tiene n momentos de desvanecimiento si la integral es nula para $i = 0, 1, \dots, n-1$. Generalmente el número de momentos de desvanecimiento de una wavelet determina el orden de la transformada.

El soporte compacto de una wavelet se refiere a que las funciones base son distintas de cero en un intervalo finito :

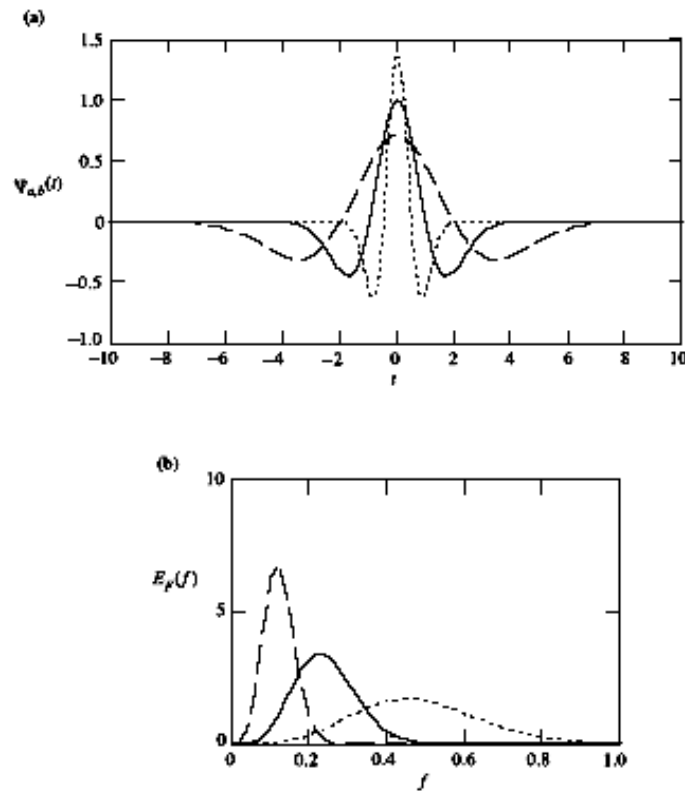


Figura 2.28 Wavelet 'sombrero mejicano' y su densidad espectral

$$\psi(t) = 0 \quad \text{si } |t| > N \quad (N \neq 0)$$

La simetría en los filtros se busca con el fin de evitar distorsiones en la información mediante la fase lineal, esto se expresa como $\varphi(w) = k \cdot w$, donde k es una constante y w es la fase.

A continuación se muestran las wavelet o familias de wavelet mas conocidas y utilizadas.

- **Haar.** La wavelet de Haar o Daubechies de orden 1, es la primera y la más sencilla de las wavelets. No tiene buena localización tiempo-frecuencia además, no es continua, y por tanto no diferenciable.
- **Daubechies.** Desarrolladas por Ingrid Daubechies, se las denomina dbN, donde N es el orden de la ondícula. La wavelet db1 es idéntica a la wavelet de Haar.
- **Biortogonales.** Son pares de wavelet, una de las cuales se utiliza para la descomposición y otra para la reconstrucción. Poseen soporte compacto y la simetría, permiten la reconstrucción exacta de la señal y por tanto, son posibles con filtros FIR (Finite Impulse Response), lo cual en las wavelets ortogonales es imposible, exceptuando la wavelet Haar. El orden de estas wavelets está dado por N_r y N_d .

Comparar la señal con la familia wavelet

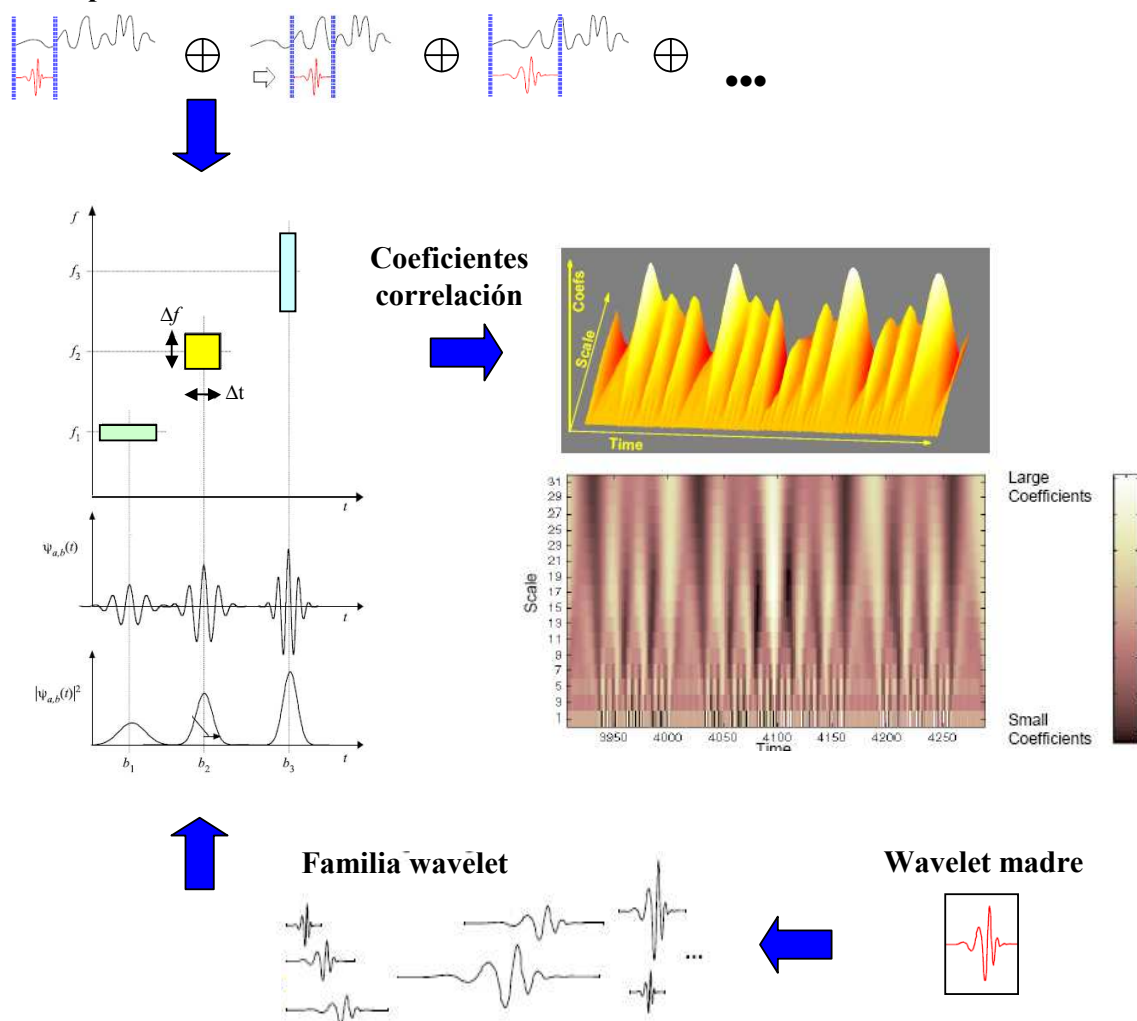


Figura 2.29 Esquema representativo del proceso de la transformada wavelet

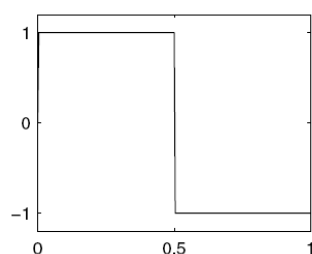


Figura 2.30 Wavelet Haar

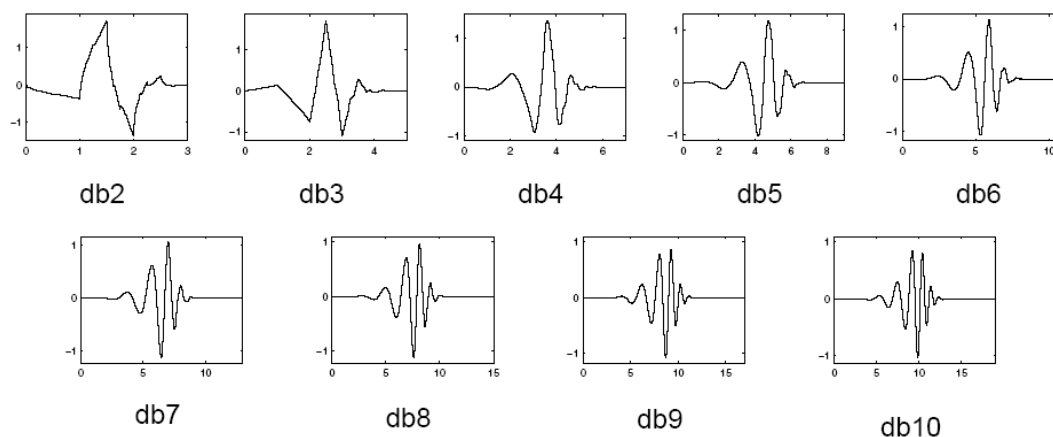


Figura 2.31 Wavelets de la familia Daubechies

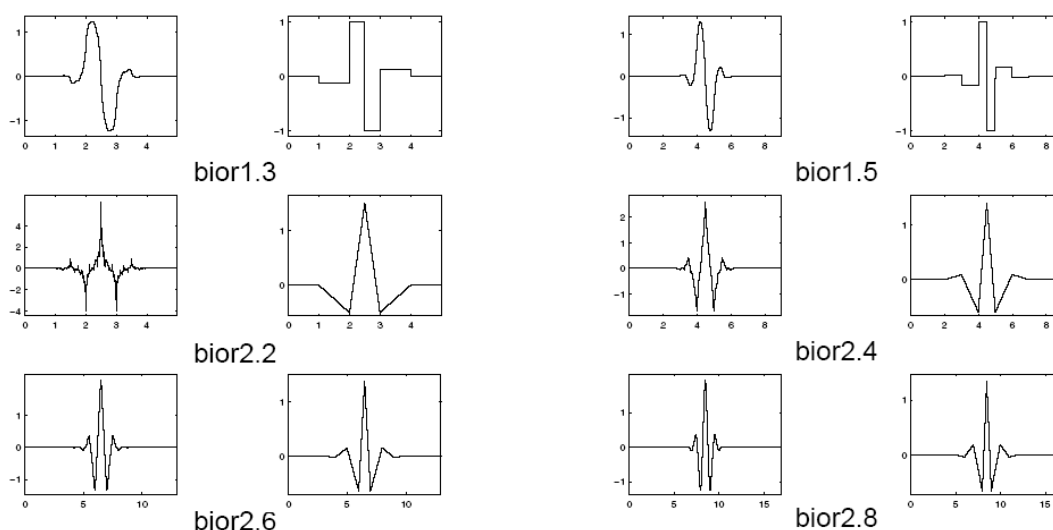


Figura 2.32 Wavelets Biortogonales (muestra)

- Coiflets. Estas wavelets fueron igualmente creadas por Daubechies con ayuda de Coifman. Su denominación es coifN donde N representa el orden de la ondícula. Esta familia de wavelets posee un mayor número de momentos de desvanecimiento: $2N$. La función wavelet y la de escalamiento son mucho más simétricas que las wavelets presentadas con anterioridad. Poseen igualmente soporte compacto y el número de filtros es $6N$.

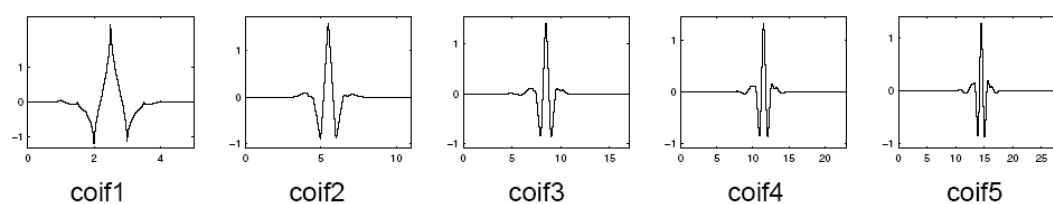


Figura 2.33 Wavelets de la familia Coiflets

- Symmlets. Con el fin de agregar un poco de simetría a sus wavelets, Daubechies creo a

partir de modificaciones de las ondículas db la siguiente familia de wavelets denominadas Symmlets. Esta familia es de soporte compacto y puede realizar la transformada continua y discreta wavelet, son ondículas cercanas a la simetría obtenidas.

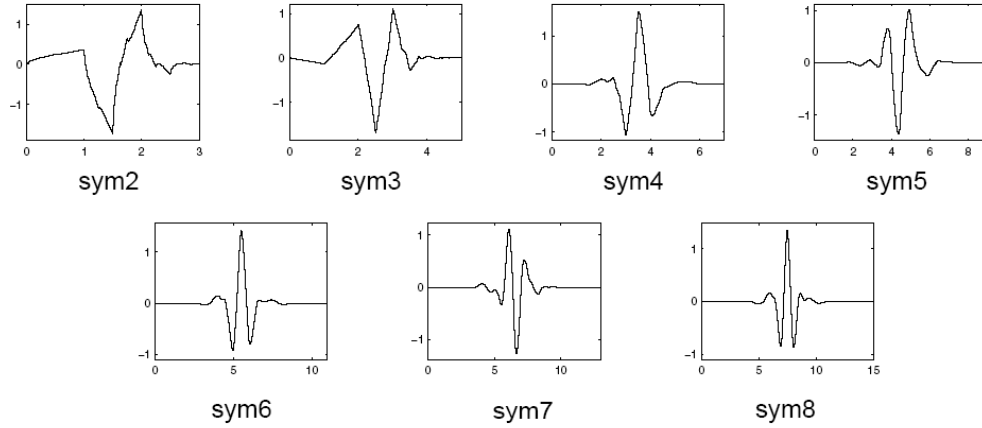


Figura 2.34 Wavelets de la familia Symmlets

- Morlet. Esta wavelet no tiene función de escalado, pero es explícita.

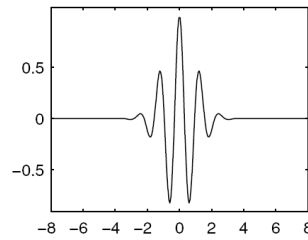


Figura 2.35 Wavelet Morlet

- Mexican hat. Otra wavelet muy recurrida para el análisis de señales es la wavelet Mexican hat por la forma de su gráfico [ALA03] y es la segunda derivada de la función de densidad de probabilidad Gaussiana.

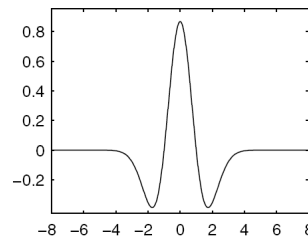


Figura 2.36 Wavelet Mexican hat

La transformada wavelet inversa se lleva a cabo mediante la expresión mostrada en la ecuación 2.19.

$$x(t) = \frac{1}{C_g} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty T(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da \cdot db}{b^2} \quad (2.19)$$

Cuando se usan las wavelet discretas para transformar una señal a , el resultado de la transformación son una serie de coeficientes que se conocen como la descomposición en series wavelet. Para muchas señales, las bajas frecuencias contienen la parte más importante de la información, en cambio, la alta frecuencia contiene los detalles de la misma. Por ejemplo, si escuchamos una voz humana a la que se haya extraído las altas frecuencias, todavía seremos capaces de entender que dice en cambio, si lo que extraemos de la señal son las bajas frecuencias, no podremos entender el mensaje que contiene.

La transformada wavelet discreta se calcula pasando la señal por una serie de filtros. Primero se pasa por un filtro paso bajo $[L]$ que elimina las frecuencias que se encuentran por encima de la mitad de la frecuencia máxima, lo que lleva a la convolución de ambas:

$$y[n] = (x * g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot g[n-k]$$

La señal se descompone de forma simultanea con un filtro paso alto $[H]$. Las salidas del filtro paso alto contienen los coeficientes denominados de detalle, mientras que las salidas del filtro paso bajo, son los coeficientes de aproximación. Ambos filtros están relacionados entre si como filtro espejo quadrature o conjunto de filtros que divide la señal de entrada en dos bandas que se submuestran por 2. Además, estos filtros de media banda forman bases ortonormales que permiten que se pueda reconstruir la señal a partir de la transformada utilizando filtros de síntesis específicos.

Después de pasar la señal por el filtro paso bajo $[L]$ de media banda, como la frecuencia máxima esta reducida a la mitad, la mitad de las muestras pueden ser descartadas, de acuerdo con la regla de Nyquist. Por tanto, se submuestran las salidas de los filtros por 2 y con esto, la escala de la señal se duplica:

$$y_{low}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot g[2 \cdot n - k]$$

$$y_{high}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[2 \cdot n - k]$$

Esta descomposición reduce la resolución en el tiempo a la mitad ya que solamente la mitad de las muestras a la salida de cada filtro caracterizan la señal entera, sin embargo, cada salida tiene la mitad de la banda de frecuencia de la señal original y como consecuencia, la resolución de la frecuencia se duplica.

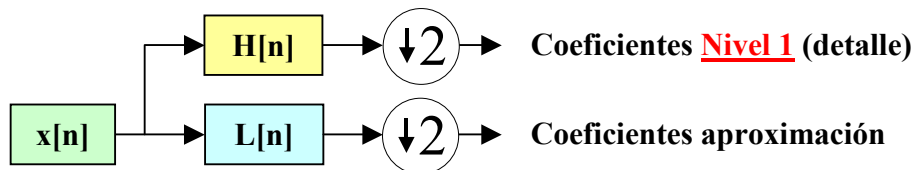


Figura 2.37 Procedimiento seguido en la wavelet discreta I

Este proceso se repite con los coeficientes de aproximación o coeficientes que han pasado por el filtro paso bajo.

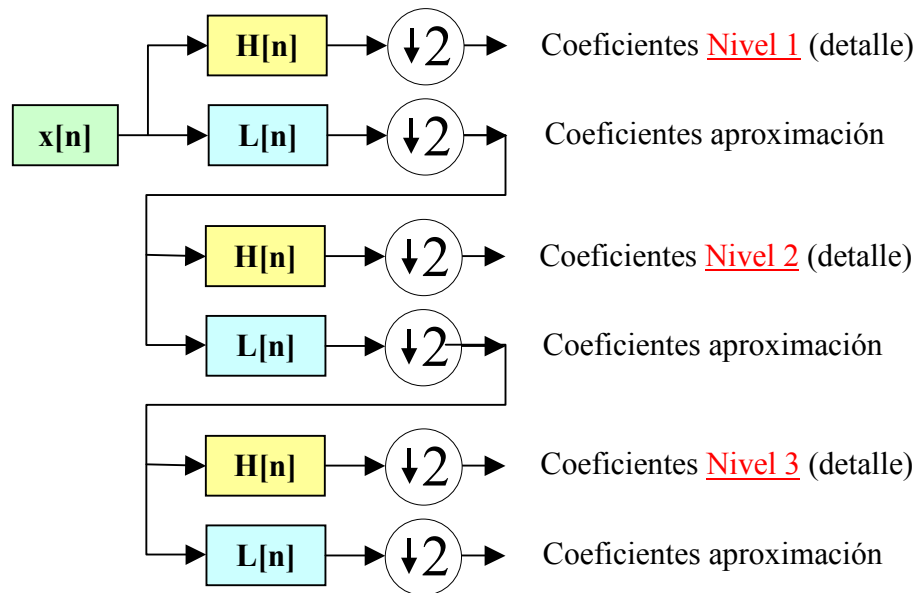


Figura 2.38 Procedimiento seguido en la wavelet discreta II

El resultado de la transformada wavelet consiste en un componente de aproximación final y todos los componentes de información detallada para cada nivel a la salida del filtro paso alto para el nivel correspondiente.

El proceso continúa hasta que queden solamente dos muestras haciendo que las salidas de los filtros paso bajo sean nuevamente filtradas para una mayor descomposición. La transformada wavelet de la señal original se obtiene concatenando todos los coeficientes, comenzando desde el último nivel de descomposición por tanto, la transformada wavelet tendrá entonces el mismo número de coeficientes que la señal original.

Las frecuencias que son más dominantes en la señal original aparecerán como altas amplitudes en la región de la transformada wavelet que incluye esas frecuencias. La diferencia entre la transformada de Fourier y la wavelet es que con la wavelet no se pierde la localización en el tiempo de estas frecuencias. Sin embargo, la localización en el tiempo tendrá una resolución que dependerá del nivel en que aparezca, de este modo si la información principal contenida en la señal está en altas frecuencias, como sucede a menudo, entonces la localización en el tiempo de estas frecuencias será más precisa, puesto que estarán caracterizadas por un mayor número de muestras. Por otro lado, si la información principal está a muy bajas frecuencias entonces su localización en el tiempo no podrá ser muy precisa, dado que existirán muy pocas muestras para caracterizar la señal a estas frecuencias.

La reconstrucción en este caso es muy simple, dado que los filtros de banda media forman una base ortonormal, para estos efectos el procedimiento anteriormente descrito se sigue en sentido inverso, de este modo la señal es interpolada por 2 y pasada a través de los filtros de síntesis $L'[n]$ y $H'[n]$, paso alto y paso bajo respectivamente, para posteriormente sumarse ambas salidas. Un hecho interesante es que los filtros de análisis y síntesis son idénticos. Sin embargo, si los filtros no son de banda media ideal la reconstrucción perfecta de la señal no

puede conseguirse. Aun cuando no es posible realizar filtros ideales, bajo ciertas condiciones es posible encontrar filtros que permitan una reconstrucción perfecta de la señal

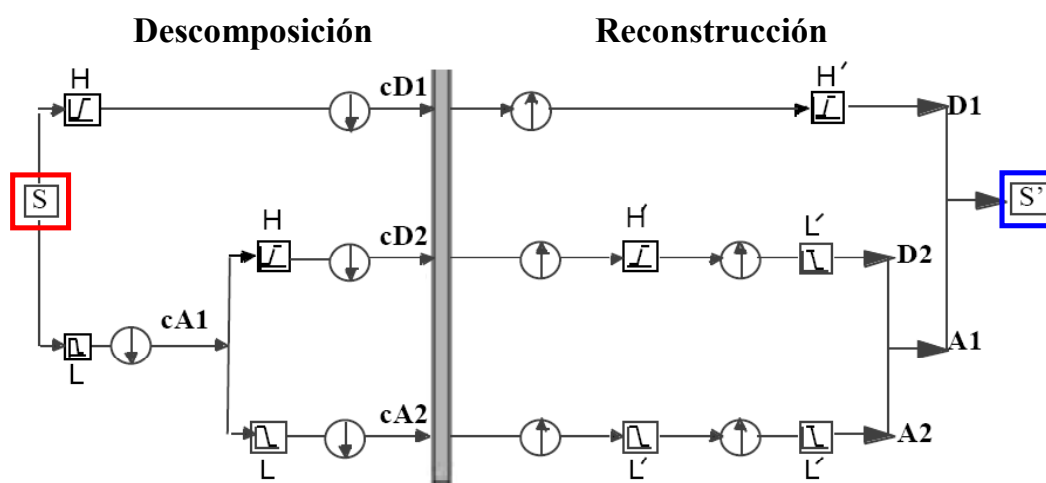


Figura 2.39 Procedimiento seguido en la transformada wavelet discreta inversa

2.3. COMPORTAMIENTO VIBRATORIO DE LOS RODAMIENTOS CON DEFECTOS LOCALIZADOS

Los defectos en los rodamientos pueden clasificarse en defectos localizados y defectos distribuidos.

- Decimos que un *defecto es localizado* cuando este se encuentra en una posición bien definida en alguno de los componentes del rodamiento, ya sea el anillo interno, anillo externo o los elementos rodantes. Los defectos localizados abarcan la formación de hoyos ó picaduras, las grietas, etc, siendo las picaduras o 'spalling' los que predominan. El defecto originado por una grieta de fatiga que surge bajo la superficie del elemento y se propaga hacia el exterior hasta que arranca una lámina de metal, formando así una pequeña picadura de aproximadamente $100 \mu m$. o superior, en su inicio.
- Los *defectos distribuidos* incluyen rugosidad superficial y ondulaciones en las pistas, pistas desalineadas y elementos rodantes de tamaños ó geometrías defectuosas.

Cuando un elemento rodante pasa sobre un defecto local, da origen a una fuerza impulsiva que genera una vibración. Mediante un análisis de la misma, se puede detectar la presencia de dicho defecto.

Cuando el defecto se encuentra en su estado incipiente, estas fuerzas impulsivas, contienen muy poca energía, pues se trata de impulsos de muy corta duración, aunque las amplitudes de la vibración pueden llegar a ser relativamente elevadas. La detección de un defecto en un rodamiento a partir de la señal de vibración generada por una máquina en funcionamiento presenta cierta complejidad respecto a otros defectos como desequilibrios, desalineamientos, holguras, etc. ya que presentan un menor intercambio de energía.

Cuando un rodamiento tiene un defecto, en su espectro de frecuencias aparecen grandes amplitudes a unas frecuencias muy bien definidas. En principio, estas frecuencias dependen de unas características propias del rodamiento, como son el número de elementos rodantes y las dimensiones de los elementos del rodamiento y de las condiciones de funcionamiento.

2.3.1. Frecuencias rotacionales

Para poder interpretar con claridad las ecuaciones que permiten calcular la frecuencia que define el defecto localizado en un elemento del rodamiento, es necesario entender la relación de velocidades relativas entre los elementos móviles del mismo.

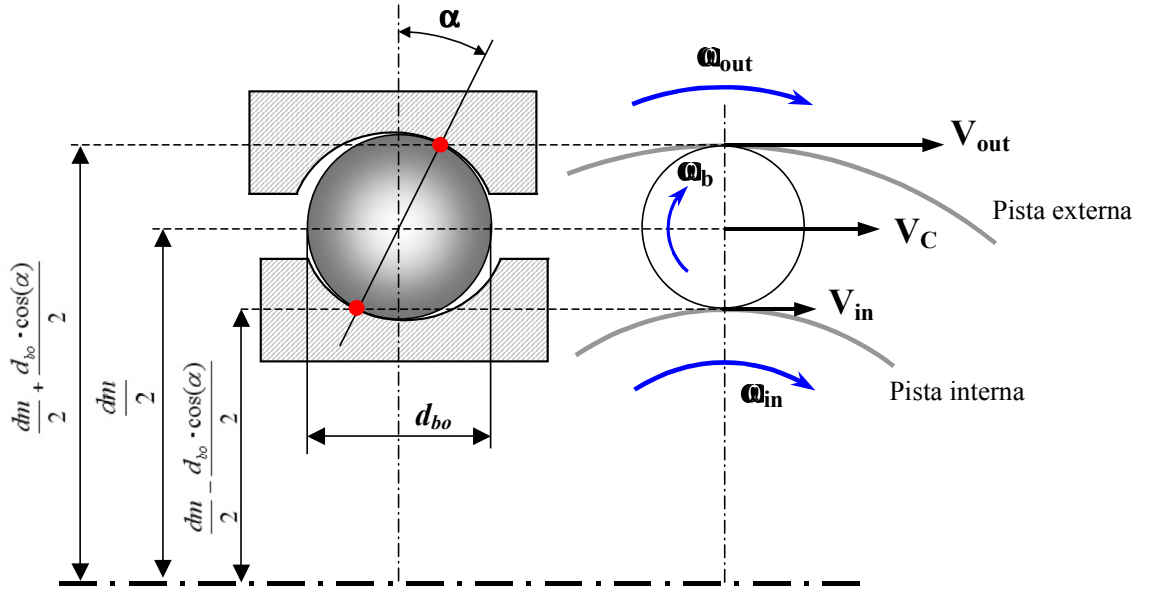


Figura 2.40 Parámetros cinemáticos del rodamiento

La Figura 2.40 muestra la sección frontal y transversal de la geometría de un rodamiento. V_{out} , V_C y V_{in} representan las velocidades lineales del punto de contacto bola-anillo externo, centro de la bola y punto de contacto bola-anillo interno respectivamente. El ángulo α es el ángulo de contacto y d_m es el diámetro medio del rodamiento.

La velocidad lineal del centro de la bola viene dada por la ecuación 2.20:

$$V_C = \frac{V_{out} + V_{in}}{2} \quad (2.20)$$

La velocidad angular de la bola respecto al centro del rodamiento o velocidad angular de la jaula vale:

$$\omega_C = \frac{V_C}{d_m/2} = \frac{(V_{out} + V_{in})/2}{d_m/2} = \frac{V_{out} + V_{in}}{d_m} \quad (2.21)$$

Si la pista externa gira con una velocidad angular ω_{out} , la velocidad lineal del punto de contacto bola-anillo externo, V_{out} es de:

$$V_{out} = \omega_{out} \cdot \left(\frac{dm}{2} + \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{2} \right) \quad (2.22)$$

Si la pista interna gira con una velocidad angular ω_{in} , la velocidad lineal del punto de contacto bola-anillo interno, V_{in} es de:

$$V_{in} = \omega_{in} \cdot \left(\frac{dm}{2} - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{2} \right) \quad (2.23)$$

Sustituyendo en la ecuación 2.21 V_{out} y V_{in} con las expresiones halladas en las ecuaciones 2.22 y 2.23 queda:

$$\omega_C = \frac{\omega_{out} \cdot \left(\frac{dm}{2} + \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{2} \right) + \omega_{in} \cdot \left(\frac{dm}{2} - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{2} \right)}{dm} \quad (2.24)$$

Operando queda finalmente:

$$FTF = \omega_C = \frac{1}{2} \left[\omega_{out} \cdot \left(1 + \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right) + \omega_{in} \cdot \left(1 - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right) \right] \quad (2.25)$$

FTF = Fundamental Train Frequency.

La frecuencia de paso de las bolas por un defecto en el anillo externo, $BPFO$ (Ball Pass Frequency of the Outer race), puede obtenerse como el producto del número de bolas Z por la velocidad angular relativa entre el anillo externo y la jaula:

$$BPFO = Z \cdot (\omega_C - \omega_{out}) \quad (2.26)$$

Sustituyendo ω_C por la ecuación 2.26 queda:

$$BPFO = Z \cdot \left(\frac{1}{2} \left[\omega_{in} \cdot \left(1 - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right) + \omega_{out} \cdot \left(1 + \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right) \right] - \omega_{out} \right) \quad (2.27)$$

$$BPFO = Z \cdot \left(\frac{\omega_{in}}{2} - \frac{\omega_{in} \cdot d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{2 \cdot dm} + \frac{\omega_{out}}{2} - \omega_{out} + \frac{\omega_{out} \cdot d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{2 \cdot dm} \right)$$

$$BPFO = Z \cdot \left[\left(\frac{\omega_{in} - \omega_{out}}{2} \right) - \left(\frac{\omega_{in} - \omega_{out}}{2} \right) \cdot \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right]$$

quedando finalmente

$$BPFO = \frac{Z}{2} (\omega_{in} - \omega_{out}) \cdot \left(1 - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right) \quad (2.28)$$

La frecuencia de paso de las bolas por un defecto en el anillo interno, $BPFI$ (Ball Pass Frequency of the inner race), puede obtenerse como el producto del número de bolas Z por la velocidad angular relativa entre el anillo interno y la jaula:

$$BPFI = Z \cdot (\omega_{in} - \omega_C) \quad (2.29)$$

Sustituyendo ω_C por la ecuación 2.26 queda:

$$BPFI = Z \cdot \left(\omega_{in} - \frac{1}{2} \left[\omega_{in} \cdot \left(1 - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right) + \omega_{out} \cdot \left(1 + \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right) \right] \right) \quad (2.30)$$

$$BPFI = Z \cdot \left(\omega_{in} - \frac{\omega_{in}}{2} + \frac{\omega_{in} \cdot d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{2 \cdot dm} - \frac{\omega_{out}}{2} - \frac{\omega_{out} \cdot d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{2 \cdot dm} \right)$$

$$BPFI = Z \cdot \left[\left(\frac{\omega_{in} - \omega_{out}}{2} \right) + \left(\frac{\omega_{in} - \omega_{out}}{2} \right) \cdot \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right]$$

quedando finalmente

$$BPFI = \frac{Z}{2} (\omega_{in} - \omega_{out}) \cdot \left(1 + \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right) \quad (2.31)$$

Por último, la velocidad angular de una bola sobre su propio centro o *spin*, representa la frecuencia de un defecto localizado en el elemento rodante *BSF* (Ball Spin Frequency). Considerando el punto de contacto de la bola con el anillo interno tenemos:

$$BSF = \frac{(\omega_{in} - \omega_C) \cdot \left(\frac{dm}{2} - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{2} \right)}{\frac{d_{bo}}{2}} \quad (2.32)$$

Sustituyendo ω_C según la ecuación 2.26 tenemos:

$$BSF = \left(\omega_{in} - \frac{1}{2} \left[\omega_{in} \cdot \left(1 - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right) + \omega_{out} \cdot \left(1 + \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right) \right] \right) \cdot \left(\frac{dm - d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{d_{bo}} \right) \quad (2.33)$$

Operando y ordenando de forma conveniente, obtenemos finalmente la ecuación 2.38

$$BSF = \frac{dm}{2 \cdot d_{bo}} (\omega_{in} - \omega_{out}) \cdot \left[1 - \left(\frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right)^2 \right] \quad (2.34)$$

Las ecuaciones 2.26, 2.36, 2.37 y 2.38 son de carácter general, donde los dos anillos se encuentran en movimiento. Generalmente, en anillo exterior es estacionario, siendo $\omega_{out} = 0$. Además, la velocidad angular del anillo interno suele darse en revoluciones por minuto. Realizando estas simplificaciones, las ecuaciones quedan en la forma:

$$FTF = \frac{\omega_{in}}{2} \cdot \left(1 - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right) \quad (2.35)$$

$$BPFO = \frac{Z \cdot \omega_{in}}{2} \cdot \left(1 - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right) \quad (2.36)$$

$$BPFI = \frac{Z \cdot \omega_{in}}{2} \cdot \left(1 + \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right) \quad (2.37)$$

$$BSF = \frac{dm \cdot \omega_{in}}{2 \cdot d_{bo}} \cdot \left[1 - \left(\frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right)^2 \right] \quad (2.38)$$

2.3.2. Zonas del espectro de defectos

En el espectro de potencia de la señal de vibración generada por un rodamiento, (diagrama de la PSD), pueden distinguirse cuatro zonas características [26], tal y como muestra la Figura 2.41.

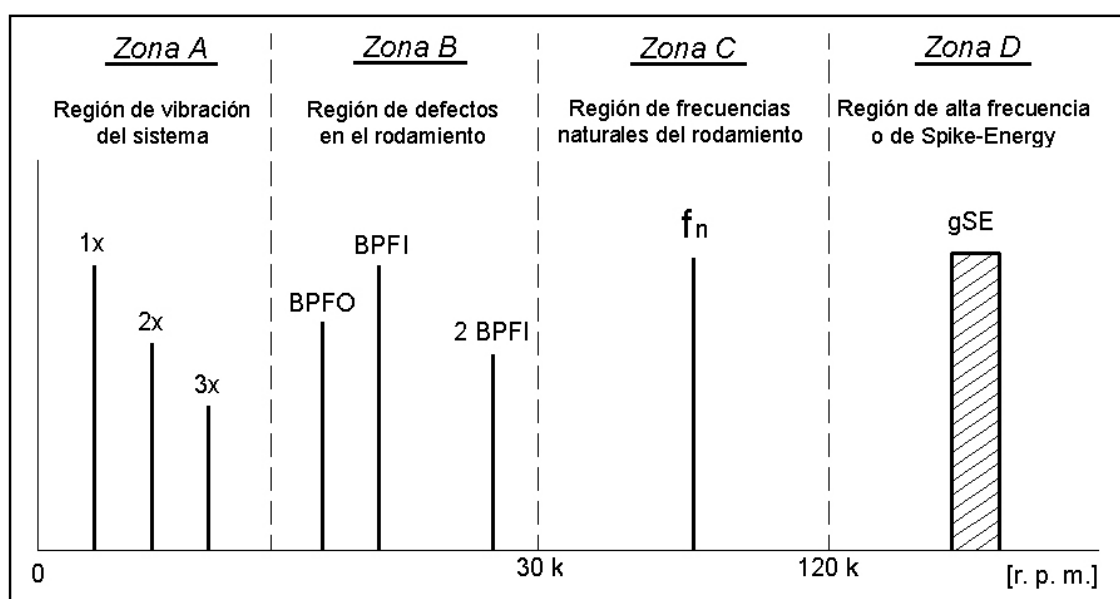


Figura 2.41 Espectro de frecuencia característico de la vibración generada por un rodamiento con defectos

- **Zona A.** *Región de la vibración del sistema.* Las vibraciones ligadas a anomalías tales como el desequilibrio, el desalineamiento o la inestabilidad dinámica del rotor se sitúan en un rango de frecuencia comprendido entre 0.25 y 3 veces la velocidad de rotación del eje de la máquina. Algunas de ellas pueden derivar de un deterioro en los rodamientos, ya que el desgaste o la holgura en los rodamientos producen excentricidad en el eje.
- **Zona B.** *Región de los defectos en el rodamiento.* Esta banda corresponde al rango de frecuencias comprendidas entre la frecuencia de paso de elemento rodante (número de veces que un elemento rodante pasa por un punto de la pista interior o exterior) y siete veces esta frecuencia. Representa la banda que aporta mayor cantidad de información sobre el estado de deterioro de los rodamientos. En ella aparecen reflejadas las frecuencias generadas por los defectos en el rodamiento. El 90 por ciento de los fallos de los rodamientos se deben a grietas en los elementos rodantes, pista de rodadura interna o externa, que generan frecuencias en esta banda. El 10 por ciento restante son producidas

por grietas en la caja de los rodamientos y dan lugar a frecuencias en la región de vibración del rotor.

- **Zona C.** *Región correspondiente a las frecuencias naturales de los componentes de los rodamientos.* Las medidas realizadas en esta región deben ser complementadas con medidas en las otras regiones ya que son más fiables. Esta zona nos proporciona una idea sobre el estado del defecto pero debemos complementarlas con las tomadas en las regiones anteriores para tener información de la naturaleza del defecto.
- **Zona D.** *Región de alta frecuencia o de Spike Energy.* Esta región cubre el rango de frecuencias más elevado. Esta región nos proporciona una clara idea de la evolución del defecto junto con una pronta identificación del defecto ya que es la primera zona en la que se advierten estos deterioros incipientes. El problema de esta zona es que es una región ultrasónica y requiere de un sensor especialmente diseñado para detectar frecuencias muy altas. Circuitos de filtros especiales dejan pasar sólo esta región de frecuencia.

2.3.3. Evolución espectral del desarrollo de los defectos

- **Estado I.** En este estado, el rodamiento todavía dispone de vida remanente considerable (en torno al 10 o 20 por ciento). Los defectos consisten en picaduras, la mayoría microscópicas, difíciles de identificar al tacto o visualmente, sólo identificables al microscopio. Además, no se generará ruido perceptible por el oído humano ni la temperatura se elevará significativamente.

Para este estado, el único indicador del defecto es el marcado incremento de los valores globales del Spike-Energy (SE) o pico de energía (aparecen algunos picos en la región de alta frecuencia), ya que el espectro es normal (como el de un rodamiento nuevo) y no se refleja el defecto en él (Figura 2.42).

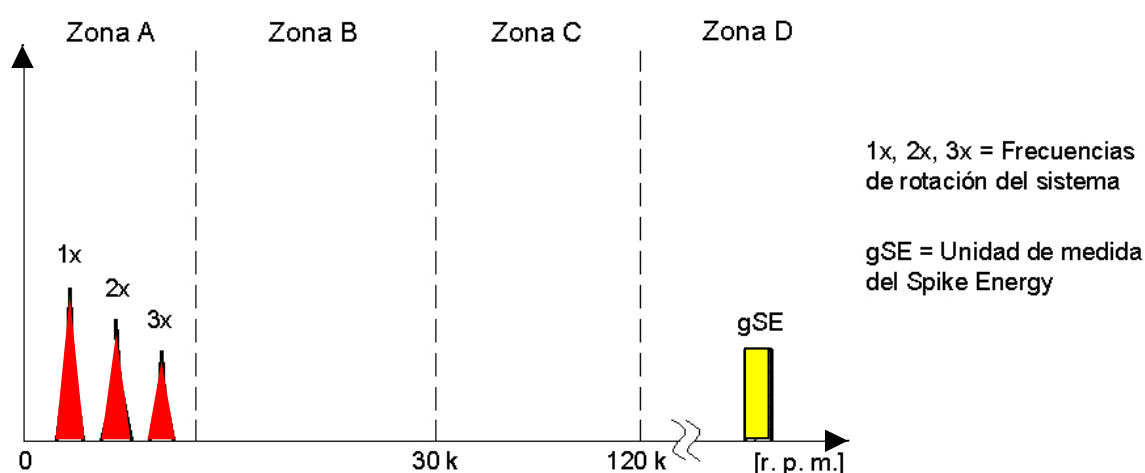


Figura 2.42 Espectro representativo del estado I de la evolución del defecto en el rodamiento

Normalmente, el Spike-Energy (S. E.) incrementa su valor desde un nivel de 0,02-0,04 gSE que presenta en rodamientos nuevos hasta un nivel de 0,15-0,25 gSE. Estos valores

del S. E. son de referencia, pues el valor del S. E. varía mucho con el tipo de máquina, el punto de medición, la velocidad de rotación de la máquina, la lubricación, la rigidez y tamaño del soporte y, sobre todo, si el rodamiento está próximo a engranajes.

- **Estado II.** Cuando llega a este estado, el rodamiento dispone del 5-10 por ciento de vida remanente. Los defectos consisten en picaduras no visibles sin la ayuda de una lente de aumento o microscopio. Se observa un ligero incremento del ruido pero la elevación de la temperatura es prácticamente inapreciable. La aparición de estos pequeños defectos en el rodamiento repercute en el espectro, comenzando a excitarse las frecuencias de resonancia de los componentes del rodamiento y de su soporte que se concentrarán, aproximadamente, en el rango de frecuencias de 500-2000 Hz (Figura 2.43).

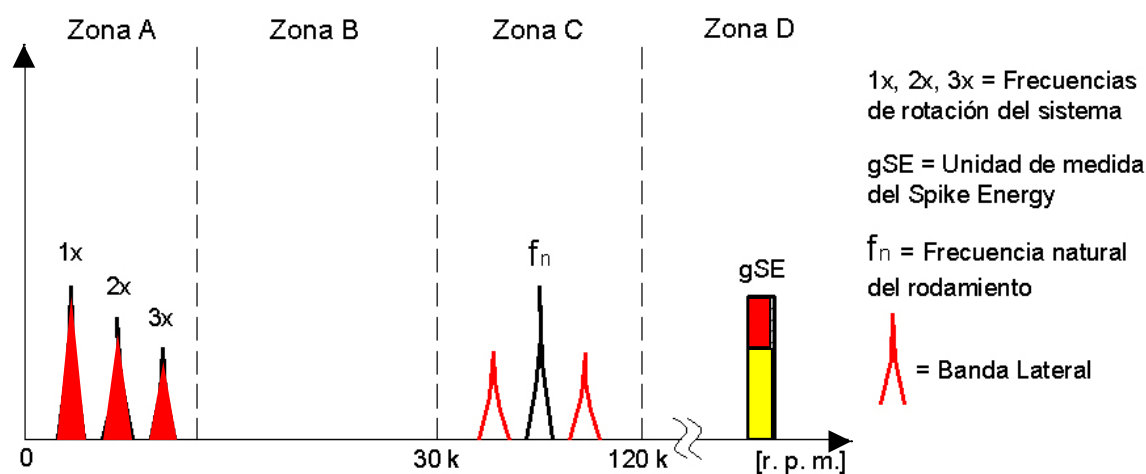


Figura 2.43 Espectro representativo del estado II de la evolución del defecto en el rodamiento

Las frecuencias naturales de la mayor parte de los rodamientos montados en su soporte suelen estar entre los 850 y 1700 Hz, y su ubicación frecuencial no varía con la velocidad, aunque sí la amplitud, puesto que a mayor velocidad de rotación la energía intercambiada en los impactos es más elevada. La respuesta en la zona de Spike-Energy también se ve afectada con un aumento de valor y, en algunos casos, se incrementa hasta duplicarse. Al inicio del estado 2, normalmente, sólo aparecerán en el espectro una o más frecuencias discretas en la zona antes delimitada para las frecuencias de resonancia. Sin embargo, hacia el final del estado 2, dichas frecuencias conservarán la misma amplitud pero estarán moduladas a la velocidad de giro del rodamiento, tanto más cuanto el defecto vaya progresando en su deterioro, lo que se hace patente en el espectro por la aparición de bandas laterales alrededor de la frecuencia de resonancia, con un desplazamiento arriba y abajo de la frecuencia de resonancia de 1 x r.p.m., o, más raramente, dicho desplazamiento toma el valor de la frecuencia de defecto en pista interior (BPFI) o exterior (BPFO).

- **Estado III.** En este estado, el rodamiento dispone del 2-5 por ciento de vida remanente. Los defectos consisten en picaduras claramente visibles y relativamente profundas. El ruido es evidente y la temperatura se incrementa ligeramente. La respuesta del Spike-Energy continuará incrementándose, duplicándose e incluso triplicándose en amplitud, llegando incluso a valores de 30-50 veces más altos que los se obtenían cuando el

rodamiento se colocó nuevo y después de haber realizado el periodo de rodaje de la maquina (Figura 2.44). Por primera vez aparecen frecuencias fundamentales asociadas con los defectos (BPFI, BPFO, BSF y FTF) y, a medida que avanza en el estado 3, van apareciendo armónicos de dichas frecuencias según progresa el desgaste ligeramente alrededor de la periferia de la pista y/o aparecen defectos en más de un elemento rodante.

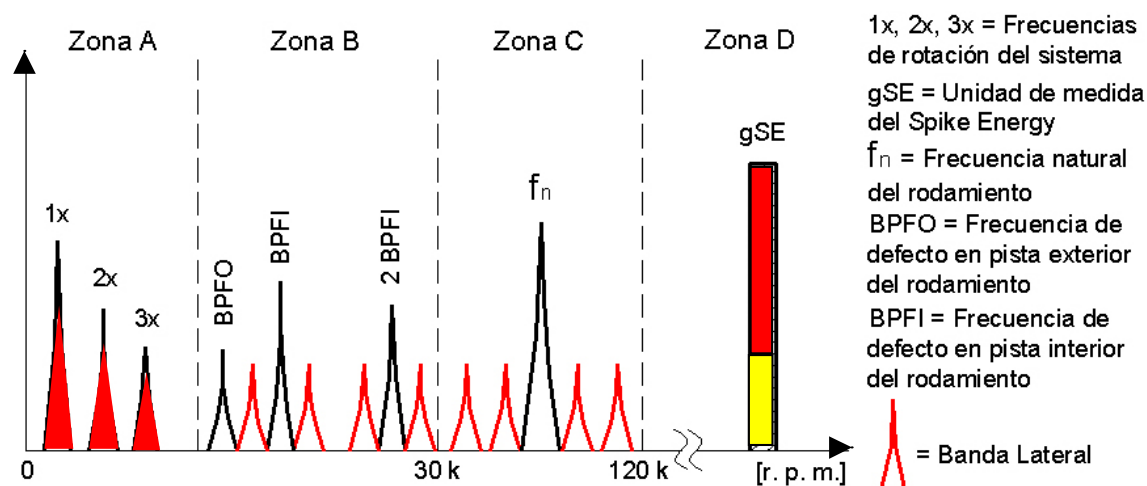


Figura 2.44 Espectro representativo del estado III de la evolución del defecto en el rodamiento

Normalmente, al principio, las frecuencias de defecto no serán moduladas por la velocidad de rotación, pero según progresa el desgaste, comienzan a aparecer bandas laterales alrededor de las frecuencias de defecto y sus armónicos. Hacia el final del estado 3, aparecerán bandas laterales incluso alrededor de las frecuencias de resonancia. En el final del estado 3, se encuentra el rodamiento en la parte exponencial de su curva de desgaste, por lo que la velocidad de desgaste es impredecible y su duración estará condicionada por las condiciones de funcionamiento tales como la lubricación, las cargas, temperatura, etc.

Mejorar la lubricación en este extremo disminuye momentáneamente el nivel global de vibración (reducción del ruido), pero volverá a niveles normales a las 12-24 horas. La adición de un exceso de lubricante es contraproducente y podría acelerar el fallo. Llegados a este punto, debería reemplazarse el rodamiento.

- **Estado IV.** El rodamiento se acerca a la situación de fallo catastrófico o colapso, dispone de una vida remanente de un 1 por ciento. Se puede apreciar en el rodamiento un pronunciado desgaste por toda la periferia de la pista de rodadura. El ruido se incrementa notablemente y hay un significativo aumento de temperatura. En el estado 4, aparecen gran cantidad de bandas laterales a una distancia de 1x r.p.m. alrededor de las frecuencias de defecto. La amplitud de la componente a 1x r.p.m., normalmente, comienza a incrementarse por primera vez a lo largo de todo el proceso descrito, así como sus armónicos 2º y 3º.

El nivel de Spike-Energy no se eleva sino que decrece, y las amplitudes de los armónicos más altos de las frecuencias de defecto y de las de resonancia también decrecerán, tendiendo a "desaparecer" son sustituidos por otros armónicos aleatorios (Figura 2.45).

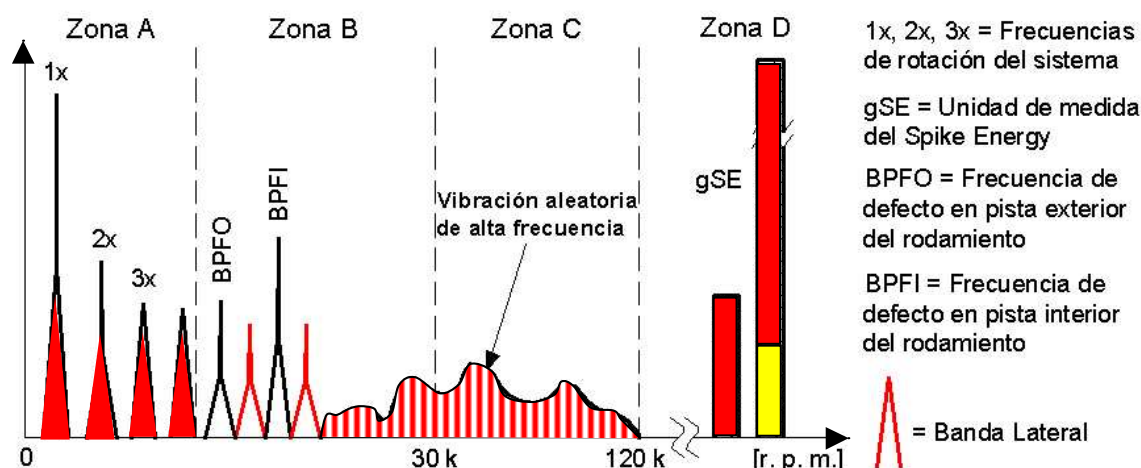


Figura 2.45 Espectro representativo del estado IV de la evolución del defecto en el rodamiento

Al final del estado 4, el nivel de Spike-Energy se reduce todavía más y justo antes del colapso crecerá drásticamente hasta valores muy elevados (50-100 gSE). A medida que este estado avanza, comienzan a desaparecer del espectro las frecuencias de defecto y las frecuencias de resonancia, apareciendo muchas componentes a frecuencias aleatorias que se extienden por el espectro y camuflan los picos de las frecuencias discretas. Llegados a este punto, al rodamiento pueden quedarle una hora o una semana de vida, ello depende de diferentes factores operativos.

2.3.4. Factores que modifican las frecuencias de defecto

Los cálculos teóricos realizados para obtener las frecuencias asociadas a cada uno de los defectos, se hacen considerando situaciones ideales. En la realidad sabemos que existen parámetros que hacen que el comportamiento del sistema se separe de las condiciones ideales de tal forma que se modificarán las frecuencias de defecto, ya sea mediante un desplazamiento de la misma a un valor cercano, o bien, aumentando los picos, tanto en número como en magnitud, de la vibración.

A continuación se describen algunos de los factores que influyen en el espectro de vibraciones del sistema mecánico:

- La existencia de desequilibrio en el sistema mecánico produce una modulación de las frecuencias de defecto por la frecuencia de desequilibrio (frecuencia de giro del eje)
- Las frecuencias de defecto en los rodamientos dependen del ángulo de contacto del rodamiento. Como este varía con la carga, es de esperar pequeñas variaciones.
- Los defectos en los rodamientos no suelen ser unitarios además, suelen aparecer aleatoriamente sobre las superficies de las pistas de rodadura. Esto implica que los picos debidos al defecto no serán tan pronunciados (puntiagudos), y las pendientes espectrales, antes y después del pico, se harán más suaves, elevándose el nivel general de ruido del espectro. También se observa un incremento de las amplitudes de los armónicos de las frecuencias de defecto, a costa de la amplitud del propio armónico del defecto.

- La interacción en la máquina de múltiples elementos vibrando da lugar a la generación de frecuencias suma y resta de las frecuencias de defecto de los elementos afectados. A veces, la existencia de interferencias eléctricas produce modulaciones con la frecuencia de la red.
- Los pequeños defectos que pueden aparecer fuera del camino de rodadura sólo se apreciarán cuando por ejemplo un desequilibrio en el eje modifique la trayectoria de la bola sobre el camino de rodadura, y, entonces, el elemento rodante pase sobre el defecto.

Capítulo 3

MODELO DINÁMICO DEL RODAMIENTO

3.1. CINEMÁTICA Y DINÁMICA DE LOS RODAMIENTOS

Un rodamiento diseñado para soportar carga radial consiste básicamente en un anillo interno solidario al árbol o eje, otro anillo externo unido al soporte del rodamiento y un conjunto de elementos rodantes colocados entre ambos anillos. Como elemento auxiliar se utilizan unas jaulas o separadores cuya única finalidad es mantener a los elementos rodantes separados una cierta distancia. Estas presentan movimiento de rotación junto con los elementos rodantes alrededor del eje del rodamiento.

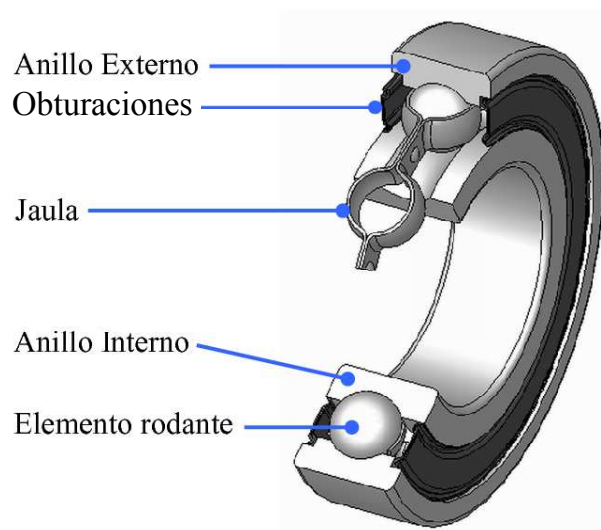


Figura 3.1 Componentes de un rodamiento de bolas

Para el estudio cinemático, se considerará que todos los elementos móviles del rodamiento presentan movimiento plano. Al girar el rotor unido al anillo interno del rodamiento causa el giro de los elementos rodantes sobre sí mismos al tiempo que se trasladan. La velocidad

de rotación del elemento rodante sobre si mismo y la de rotación de estos respecto al eje del rodamiento puede obtenerse según se detalla a continuación.

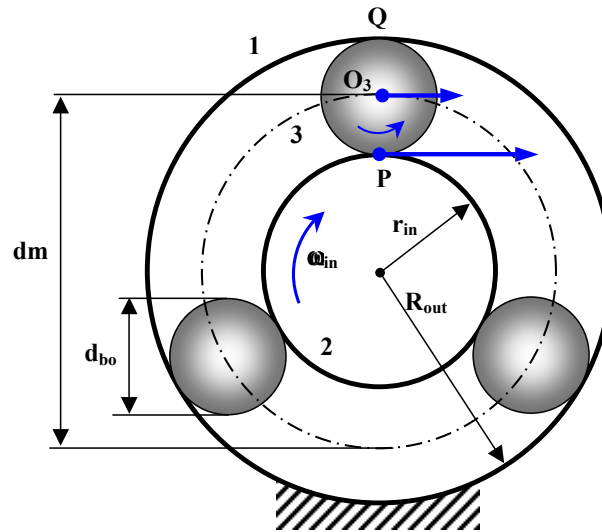


Figura 3.2 Cinemática del rodamiento

Se considera que el anillo interno gira con sentido horario a una velocidad angular w_{in} . y que el anillo externo permanece estacionario. La velocidad del punto 'P' vale:

$$V_{P2} = w_{in} \cdot r_{in} \quad (3.1)$$

Considerando que existe rodadura pura entre los elementos 2 y 3, se tiene que:

$$V_{P2} = V_{P3} \quad (3.2)$$

De la misma forma, por existir rodadura entre los elementos 1 y 3, la velocidad del punto 'Q' es igual a cero. Q es el centro instantáneo de rotación del elemento 3 sobre el elemento 1.

La velocidad del punto $O3$ es la velocidad media de los puntos 'P' y 'Q':

$$V_{O3} = V_m = \frac{V_{P3} + V_{Q3}}{2} = \frac{V_{P3}}{2} \quad (3.3)$$

Como puede apreciarse en la Figura 3.2, el centro de las bolas y la jaula se mueve con una velocidad tangencial V_{O3} . Esta equivale a una velocidad angular $w_{O3/O2}$, alrededor del eje del rodamiento O_2 , que viene dada por:

$$w_{O3/O2} = \frac{V_{O3}}{r_{in} + r_{bo}} = \frac{V_{P3}/2}{r_{in} + r_{bo}} = \frac{w_{in} \cdot r_{in}}{2 \cdot (r_{in} + r_{bo})}$$

$$w_{O3/O2} = w_{jaula} = w_{in} \cdot \frac{r_{in}}{2 \cdot (r_{in} + r_{bo})} \quad (3.4)$$

Para calcular la velocidad angular de los elementos rodantes sobre su propio eje $w_{3/O3}$, comenzamos planteando la ecuación de velocidades relativas:

$$\overrightarrow{V_{P3}} = \overrightarrow{V_{O3}} + \overrightarrow{V_{P3/O3}} \quad (3.5)$$

Teniendo en cuenta que:

$$V_{P3} = V_{P2} = w_{in} \cdot r_{in}$$

$$V_{O3} = \frac{V_{P3}}{2} = \frac{w_{in} \cdot r_{in}}{2}$$

$$V_{P3/O3} = w_{3/O3} \cdot r_{bo}$$

Resulta:

$$w_{in} \cdot r_{in} = \frac{w_{in} \cdot r_{in}}{2} + w_{3/O3} \cdot r_{bo}$$

despejando, queda finalmente que:

$$w_{3/O2} = w_{bola} = w_{in} \cdot \frac{r_{in}}{2 \cdot r_{bo}} \quad (3.6)$$

En los rodamientos, la transmisión de la carga de un anillo a otro se realiza a través de los elementos rodantes. El número de ciclos de presión de un punto de la pista de rodadura sobre el que actúa un elemento rodante cargado, tienen una influencia muy importante en el funcionamiento y la vida de un rodamiento. A la carga que se distribuye sobre los elementos rodantes se denomina distribución de carga en rodamientos. Además de la carga externa que soporta el rodamiento, las fuerzas centrífugas y los momentos giroscópicos de los elementos rodantes contribuyen en un aumento de la distribución de carga.

El estudio dinámico se realiza bajo la hipótesis de que el rodamiento solamente soporta carga radial. Sea el rodamiento mostrado en la Figura 3.3, sometido a la carga Q .

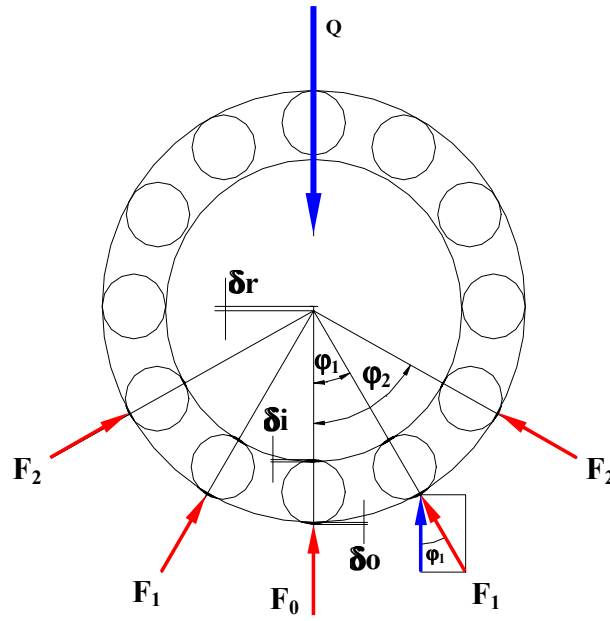


Figura 3.3 Dinámica del rodamiento

La relación genérica carga-desplazamiento relativo en un rodamiento puede ser expresada mediante la ecuación 3.7:

$$\delta_n = K_n \cdot Q^T \quad (3.7)$$

Donde:

- Q , es la carga total aplicada al rodamiento
- T , es un coeficiente dado que vale $2/3$ para punto de contacto (bolas) y $0,9$ para línea de contacto (cilindro).
- K_n , es un coeficiente que depende del tipo de rodamiento

La deformación total en la dirección del elemento más cargado Figura 3.3 , viene dada por:

$$\delta_r = \delta_i + \delta_o \quad (3.8)$$

Donde:

- δ_i es la deformación entre el elemento rodante y la pista interna
- δ_o es la deformación entre el elemento rodante y la pista externa

Supongamos un rodamiento sin holgura sometido a una carga radial Q de tal forma que un elemento rodante queda bajo la dirección de la línea de carga, tal como puede apreciarse en la Figura 3.3. La condición de equilibrio estático viene dada por la ecuación 3.9

$$Q = F_0 + 2 \cdot \sum (F_i \cdot \cos \varphi_i) \quad (3.9)$$

La desviación elástica en la línea de ángulo φ será:

$$\delta_\varphi = \delta_r \cdot \cos(\varphi) \quad (3.10)$$

La relación entre la carga en un elemento rodante y la correspondiente desviación se puede expresar como:

La relación carga-deformación de dos elementos rodantes podemos establecerla a través de la ecuación 3.7, ya que el coeficiente K_n es constante:

$$K_n = \frac{F_0^T}{\delta_r} = \frac{F_\varphi^T}{\delta_\varphi}$$

quedando que:

$$\frac{F_\psi}{F_0} = \sqrt[T]{\frac{\delta_\psi}{\delta_r}}$$

Teniendo en cuenta la ecuación 3.10:

$$F_\psi = F_0 \cdot \sqrt[T]{\cos \varphi}$$

Sustituyendo el valor de F_ψ en la ecuación 3.9:

$$Q = F_0 + 2 \cdot \sum (F_0 \cdot \sqrt[T]{\cos \varphi} \cdot \cos \varphi) \quad (3.11)$$

Operando podemos obtener la expresión que permite calcular el valor de la fuerza que soporta el elemento más cargado F_0 :

$$Q = F_0 \left[1 + 2 \sum (\cos \varphi)^{\frac{T+1}{T}} \right]$$

$$F_0 = \frac{Q}{1 + 2 \sum (\cos \varphi)^{\frac{T+1}{T}}} \quad (3.12)$$

Definiendo el parámetro J_r como:

$$J_r = \frac{1 + 2 \sum (\cos \varphi)^{\frac{T+1}{T}}}{Z} \quad (3.13)$$

Podemos expresar la ecuación 3.12 como:

$$F_0 = \frac{Q}{Z \cdot J_r} \quad (3.14)$$

El valor de $1/J_r$ se calcula para los diferentes números Z de elementos rodantes y para los distintos tipos de elementos rodantes, los valores obtenidos se registran en tablas como la Tabla 3.1.

Elementos Rodantes		Número de Elementos Rodantes						
		6	7	8	10	12	15	20
Tipo	Bolas	4'43	4'34	4'35	4'38	4'36	4'37	4,36
	Rodillos	4'10	4'03	4'07	4'10	4'08	4'07	4'08

Tabla 3.1 Valores de $1/J_r$ para los diferentes números de elementos rodantes

Por ejemplo, para un rodamiento de 12 bolas $1/J_r$ es igual a 4'36, luego la carga máxima en un elemento rodante sería:

$$Q_0 = \frac{F_r \cdot 1/J_r}{Z} = \frac{F_r \cdot 4'36}{12}$$

Si el rodamiento presenta cierta holgura radial, h_r , la carga se distribuye sobre los elementos rodantes según un factor de distribución de carga, ε , siendo:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{h_r}{2 \cdot \delta_r + h_r} \right) \quad (3.15)$$

La deformación sobre la dirección de ángulo φ sería:

$$\delta_\varphi = \left(\delta_r + \frac{h_r}{2} \right) \cdot \cos \varphi - \frac{h_r}{2} = \delta_r \cdot \left[1 - \frac{1}{2 \cdot \varepsilon} \cdot (1 - \cos \varphi) \right] \quad (3.16)$$

Si en la ecuación 3.16 ponemos $\delta_\varphi = 0$, se puede hallar la extensión angular de la zona de carga en el rodamiento, φ_L . Esto puede expresarse como:

$$\varphi_L = \arccos \left(\frac{h_r}{2 \cdot \delta_r + h_r} \right) \quad (3.17)$$

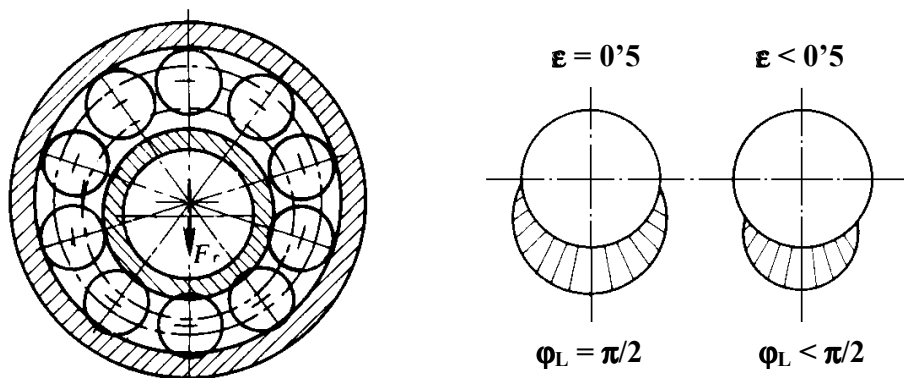


Figura 3.4 Distribución de carga en rodamiento con holgura

De la ecuación 3.17 se deduce que:

- Si no hay holgura $h_r = 0$) entonces el factor de distribución de carga es $\varepsilon = 0,5$ y la extensión angular $\varphi_L = \pi/2$.
- Si $h_r > 0$ (holgura), entonces $\varepsilon < 0,5$ y $\varphi_L < \pi/2$.
- Si $h_r < 0$ (montaje con apriete), entonces $\varepsilon > 0,5$ y $\varphi_L > \pi/2$.
- Si $\varphi_L = 360^\circ/Z$ sólo estará cargado un elemento rodante.

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores se deduce la expresión de la carga en el elemento rodante con ángulo φ como:

$$F_\varphi = F_0 \cdot \left[1 - \frac{1}{2 \cdot \varepsilon} \cdot (1 - \cos \varphi) \right]^{\frac{1}{T}} \quad (3.18)$$

Utilizando la ecuación de equilibrio da la siguiente expresión:

$$Q = Z \cdot F_0 \cdot \frac{\sum \left[1 - \frac{1}{2 \cdot \varepsilon} \cdot (1 - \cos \varphi) \right]^{\frac{1}{T}} \cdot \cos \varphi}{Z} = Z \cdot F_0 \cdot J_r(\varepsilon) \quad (3.19)$$

El factor $J_r(\varepsilon)$ expresado en forma integral quedaría:

$$J_r(\varepsilon) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\varphi_L}^{\varphi_L} \left[1 - \frac{1}{2 \cdot \varepsilon} \cdot (1 - \cos \varphi) \right]^{\frac{1}{T}} \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \quad (3.20)$$

Los valores que toma $1/T$ en la ecuación 3.20 son de 1'5 cuando el elemento rodante es una bola y de 1'1 cuando es un cilindro.

Dados los parámetros geométricos internos, la holgura radial y la carga radial de un rodamiento, entonces se podrá determinar el valor de la carga de contacto en los elementos rodantes.

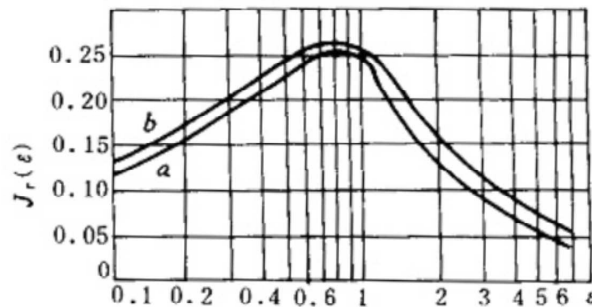


Figura 3.5 Factor $J_r(\varepsilon)$ para a: rodamientos de bolas, b: rodamientos de rodillos

Sabiendo que el valor de la integral de $J_r(\varepsilon)$ está relacionado con δ_r y este es necesario para calcular $J_r(\varepsilon)$, es necesario recurrir a un proceso iterativo para obtener la carga de los elementos rodantes.

Los valores de $J_r(\varepsilon)$ suelen estar tabulados, pero también pueden representarse en gráficas como la de la Figura 3.5. En la citada gráfica se representa la evolución del factor $J_r(\varepsilon)$ en función del valor de ε (la curva a para rodamientos de bolas y la curva b para rodamientos de cilindros).

3.2. MODELO CON 2 G.D.L.

3.2.1. Ecuaciones cartesianas

La Figura 3.6 muestra un diagrama esquemático del rodamiento que vamos a modelar. Se considera en este caso, que la distancia radial del centro de las bolas al origen del sistema de referencia situado en el centro del anillo externo, es constante, quedando libre el conjunto rotor-anillo interno. Para averiguar las características vibratorias, el modelado del rodamiento puede realizarse considerándolo como un sistema masa-muelle, con el correspondiente amortiguamiento cuando sea necesario considerarlo. El anillo externo del rodamiento se encuentra en reposo, mientras que el anillo interno se encuentra rígidamente fijado al árbol o rotor girando a una determinada velocidad angular w_{in} .

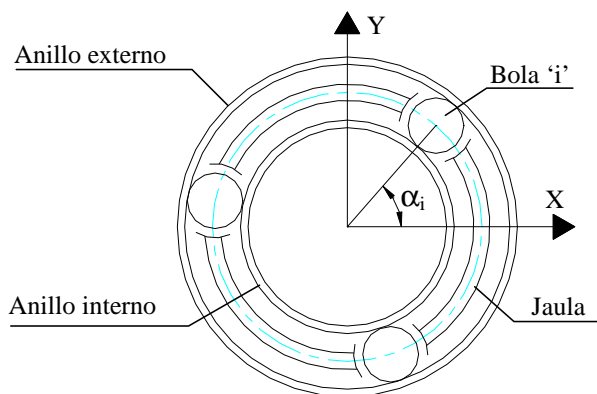


Figura 3.6 Modelo esquemático de un rodamiento de 3 bolas

La deformación elástica entre las pistas de rodadura y los elementos rodantes, en este caso bolas, presenta una relación fuerza-deformación no lineal, que se obtiene aplicando la teoría de Hertz.

En el modelado matemático, el rodamiento de bolas es considerado como un sistema masa-muelle y las bolas actúan como resortes no lineales, tal como muestra la Figura 3.7. Ya que las fuerzas Hertzianas actúan únicamente cuando existe contacto de la bola con la pista interna o externa, los resortes actúan únicamente a compresión. Cuando la bola se encuentra separada de la pista de rodadura, la fuerza de contacto es cero.

En primer lugar, necesitamos conocer el valor de las constantes de resorte en los contactos bola-anillo interno, C_{in} y bola-anillo externo, C_{out} . El contacto entre la bola y la pista de rodadura se desarrolla en un área de contacto que tiene la forma de una elipse con a y b como el semieje mayor y semieje menor respectivamente. Para obtener la fuerza de contacto en la bola, es necesario calcular la curvatura suma y curvatura diferencia.

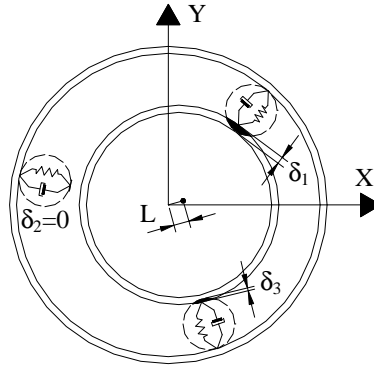


Figura 3.7 Modelo masa-muelle del rodamiento

La curvatura suma se obtiene como se indica en [112] y se expresa como:

$$\sum \rho = \rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22} = \frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{22}} \quad (3.21)$$

Donde r_{ij} denotan los radios de curvatura de las superficies de contacto según dos planos xz e yz que se cortan formando un ángulo de 90° y cuya recta de corte pasa por el punto de contacto. La curvatura diferencia $F(\rho)$ viene dada por:

$$F(\rho) = \frac{\left(\frac{1}{r_{11}} - \frac{1}{r_{12}}\right) + \left(\frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{22}}\right)}{\sum \rho} \quad (3.22)$$

Estas ecuaciones hay que particularizarlas para el contacto bola-anillo interno y bola-anillo externo, teniendo en cuenta que cuando la superficie es cóncava en el punto de contacto, el radio de curvatura es negativo. La Figura 3.9 muestra las principales dimensiones del rodamiento de bolas 6206 que van a ser utilizadas para realizar los cálculos.

Se comienzan los cálculos para el contacto bola-anillo interno. La Figura 3.8 muestra los parámetros de curvatura correspondientes a este contacto sobre los planos xz , yz .

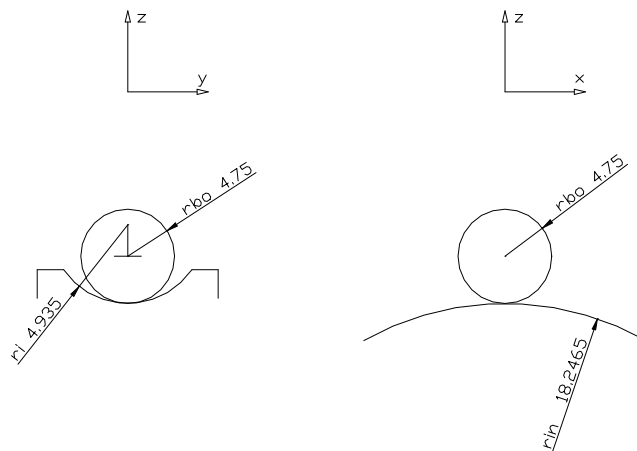


Figura 3.8 Radios de curvatura en el contacto bola-anillo interno

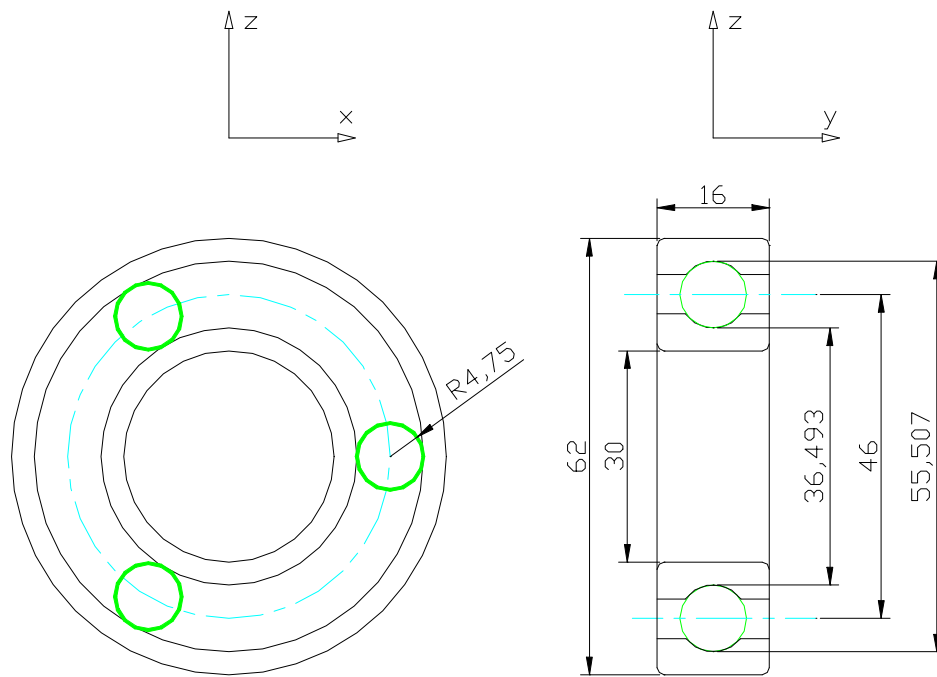


Figura 3.9 Dimensiones del rodamiento de bolas 6206

Aplicando la ecuación 3.21 se obtiene la curvatura suma:

$$\sum \rho_i = \frac{1}{4,75} + \frac{1}{4,75} + \frac{1}{18,2465} + \frac{1}{-4,935} = 0,2732 \text{ mm}^{-1} \quad (3.23)$$

La curvatura diferencia, se calcula mediante la ecuación 3.22

$$F(\rho)_i = \frac{\left(\frac{1}{4,75} - \frac{1}{4,75}\right) + \left(\frac{1}{18,2465} - \frac{1}{-4,935}\right)}{0,2732} = 0,9423 \quad (3.24)$$

Conociendo el valor de la curvatura diferencia, se pueden obtener los parámetros a^* , b^* y δ^* , a partir del gráfico de la Figura 3.10. Estos valores permiten conocer los valores de deformación y tensión normal máxima para una carga determinada.

Los valores que se obtienen del gráfico para el rodamiento objeto de estudio son los siguientes:

Contacto bola-pista interna		
a_i^*	b_i^*	δ_i^*
3.85	0.41	0.59

Para un área de contacto elíptica, el esfuerzo máximo se da en el centro geométrico de la elipse de contacto, como se muestra en la Figura 3.11.

La magnitud de este esfuerzo es:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot b} \quad (3.25)$$

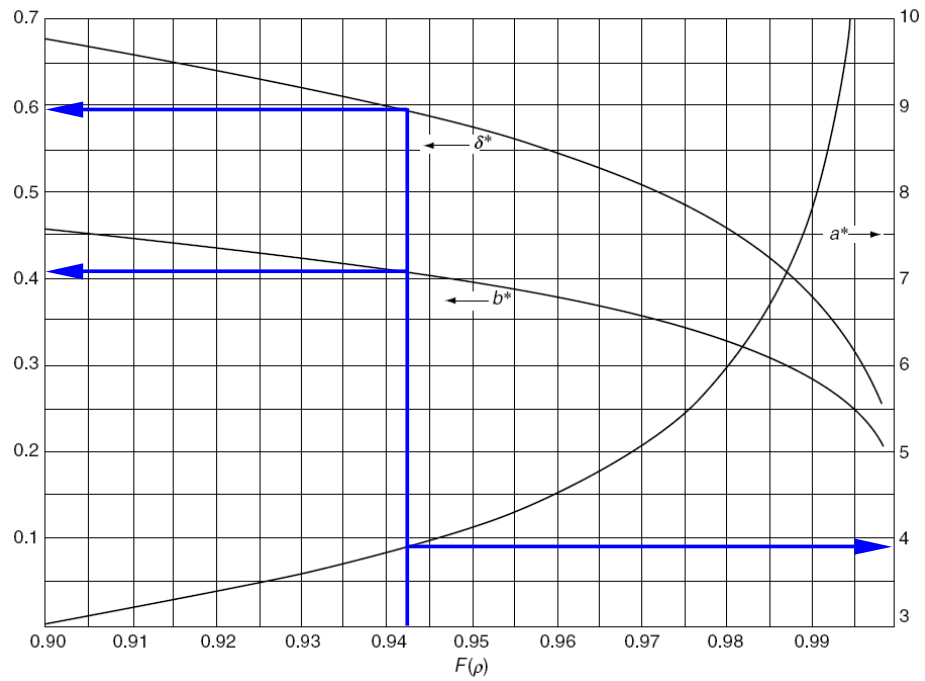


Figura 3.10 Valores de los parámetros a^* , b^* y δ^* para contacto bola-pista interna

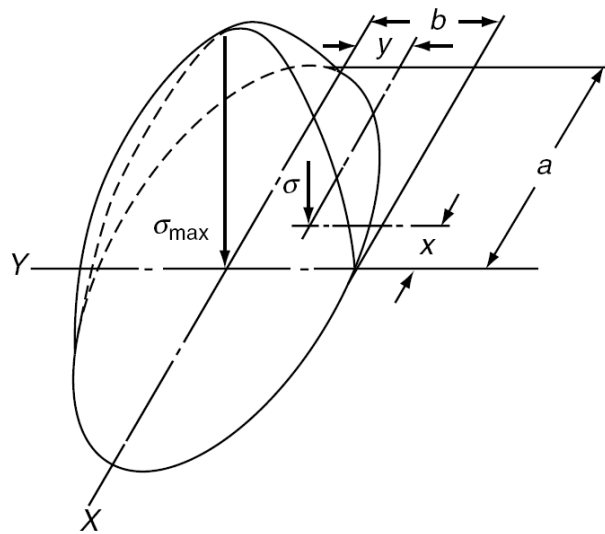


Figura 3.11 Distribución de tensiones en el área de contacto

Siendo Q la fuerza aplicada sobre los cuerpos en contacto en Newton. Para rodamientos de acero, los valores de los semiejes mayor y menor de la elipse vienen dados por:

$$a = 0,0236 \cdot a^* \cdot \left(\frac{Q}{\sum \rho} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.26)$$

$$b = 0,0236 \cdot b^* \cdot \left(\frac{Q}{\sum \rho} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.27)$$

En nuestro caso, para el contacto bola-anillo interno, se tiene:

$$a = 0,0236 \cdot 3,85 \cdot \left(\frac{Q}{\sum \rho} \right)^{\frac{1}{3}} = 0,14 \cdot Q^{\frac{1}{3}} \quad (3.28)$$

$$b = 0,0236 \cdot 0,41 \cdot \left(\frac{Q}{0,2732} \right)^{\frac{1}{3}} = 0,0149 \cdot Q^{\frac{1}{3}} \quad (3.29)$$

Conocidos los valores de a y b , aplicando la ecuación 3.25, se obtiene la expresión que nos permite calcular la tensión máxima en función de la carga aplicada:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot \pi \cdot 0,14 \cdot Q^{\frac{1}{3}} \cdot 0,0149 \cdot Q^{\frac{1}{3}}} = 228,89 \cdot Q^{\frac{1}{3}} \quad (3.30)$$

La relación carga-deformación, viene dada, para rodamientos de acero, por la expresión:

$$\delta = 2,79 \cdot 10^{-4} \cdot \delta^* \cdot Q^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\sum \rho \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.31)$$

Sustituyendo los valores conocidos en la ecuación 3.31 queda:

$$\delta = 2,79 \cdot 10^{-4} \cdot 0,59 \cdot Q^{\frac{2}{3}} \cdot 0,2732^{\frac{1}{3}} = 1,0681 \cdot 10^{-4} \cdot Q^{\frac{2}{3}} \quad (3.32)$$

La ecuación 3.32 permite calcular la constante de rigidez C_{in} , en el contacto bola-anillo interno.

$$Q = \left(\frac{\delta}{1,0681 \cdot 10^{-4}} \right)^{\frac{3}{2}} = 905890 \cdot \delta^{\frac{3}{2}} \quad (3.33)$$

Por lo tanto, podemos considerar que $C_{in} = 905890 \frac{N}{mm^{3/2}}$

Para obtener el valor de C_{out} se deben realizar los mismos cálculos para el contacto bola-pista externa. En primer lugar, considerando los datos de la Figura 3.12, se calcula la curvatura suma.

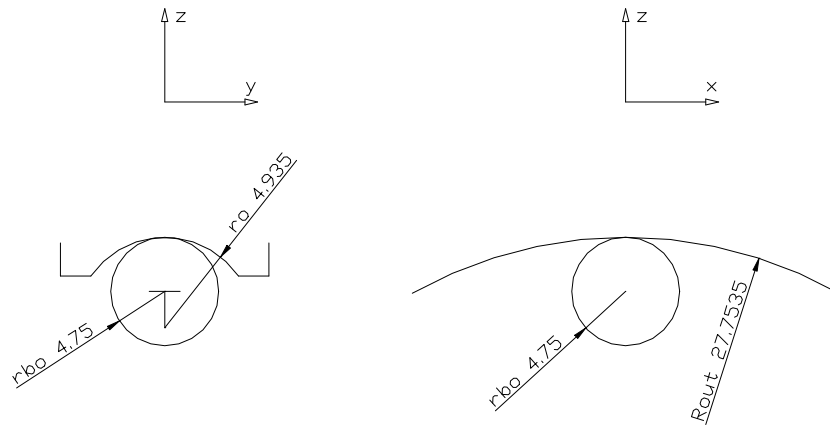


Figura 3.12 Curvaturas en contacto bola-pista externa

$$\rho_o = \frac{1}{4,75} + \frac{1}{4,75} + \frac{1}{-27,7535} + \frac{1}{-4,935} = 0,1823 \text{ mm}^{-1} \quad (3.34)$$

La curvatura diferencia, se obtiene mediante la ecuación 3.22:

$$F(\rho)_o = \frac{\left(\frac{1}{4,75} - \frac{1}{4,75}\right) + \left(\frac{1}{-27,7535} - \frac{1}{-4,935}\right)}{0,1823} = 0,9138 \quad (3.35)$$

Conociendo el valor de la curvatura diferencia, se pueden calcular los parámetros a^* , b^* y δ^* a partir del gráfico de la Figura 3.13. Estos valores permiten conocer los valores de deformación y tensión normal máxima para una carga determinada.

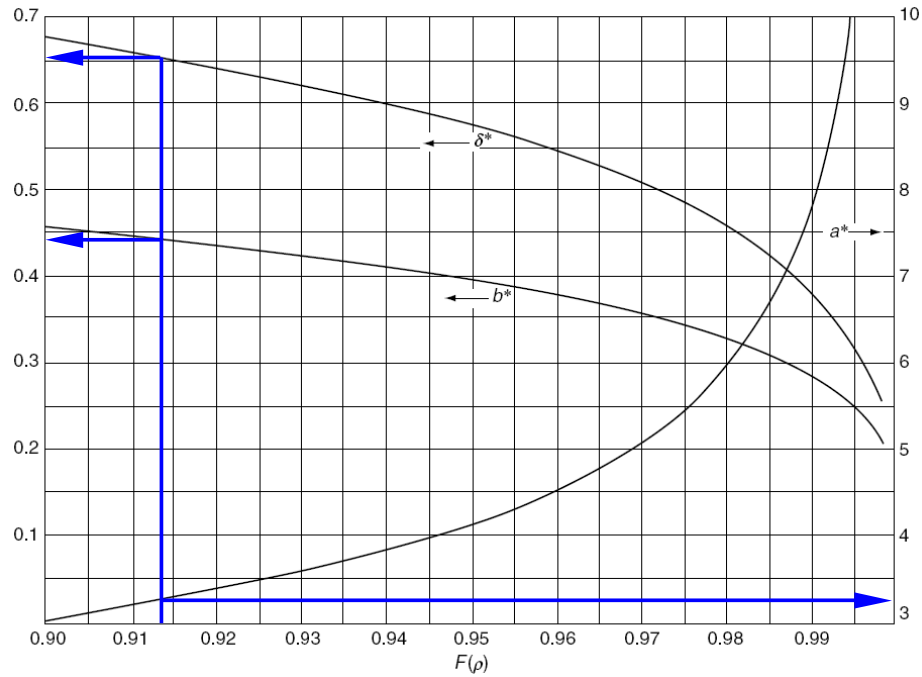


Figura 3.13 Valores de los parámetros a^* , b^* y δ^* para contacto bola-pista externa

Los valores que se obtienen del gráfico son los siguientes:

Contacto bola-pista interna		
a_o^*	b_o^*	δ_o^*
3.25	0.445	0.66

Los valores de los semiejes mayor y menor de la elipse de contacto se calculan aplicando las ecuaciones 3.26 y 3.27:

$$a = 0,0236 \cdot 3,25 \cdot \left(\frac{Q}{\sum \rho} \right)^{\frac{1}{3}} = 0,1353 \cdot Q^{\frac{1}{3}} \quad (3.36)$$

$$b = 0,0236 \cdot 0,445 \cdot \left(\frac{Q}{0,2732} \right)^{\frac{1}{3}} = 0,0185 \cdot Q^{\frac{1}{3}} \quad (3.37)$$

Conocidos los valores de a y b , aplicando la ecuación 3.25, se obtiene la expresión que permite calcular la tensión máxima en el área de contacto, en función de la carga aplicada:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot \pi \cdot 0,1353 \cdot Q^{\frac{1}{3}} \cdot 0,0185 \cdot Q^{\frac{1}{3}}} = 190,75 \cdot Q^{\frac{1}{3}} \quad (3.38)$$

La relación carga-deformación, para rodamientos de acero, viene dada por la ecuación 3.31: Sustituyendo los valores conocidos en la ecuación 3.31 queda:

$$\delta = 2,79 \cdot 10^{-4} \cdot 0,66 \cdot Q^{\frac{2}{3}} \cdot 0,1823^{\frac{1}{3}} = 1,0441 \cdot 10^{-4} \cdot Q^{\frac{2}{3}} \quad (3.39)$$

La ecuación 3.39 permite calcular la constante de rigidez C_{out} en el contacto bola-anillo interno.

$$Q = \left(\frac{\delta}{1,0441 \cdot 10^{-4}} \right)^{\frac{3}{2}} = 937318 \cdot \delta^{\frac{3}{2}} \quad (3.40)$$

Por lo tanto, se puede considerar que $C_{out} = 937318 \frac{N}{mm^{3/2}}$

En la Figura 3.14 se representa el contacto de una bola con los anillos interno y externo. En el centro del anillo externo, que consideramos estacionario, situamos un sistema de referencia global SR. Las posiciones del centro del anillo interno y el centro de la bola 'i' respecto al SR, vienen definidas por los vectores de posición \vec{L}_{in} y \vec{r}_i respectivamente. La posición del centro de la bola 'i' respecto al centro del anillo interno viene determinada por el vector de posición $\vec{\rho}_i$.

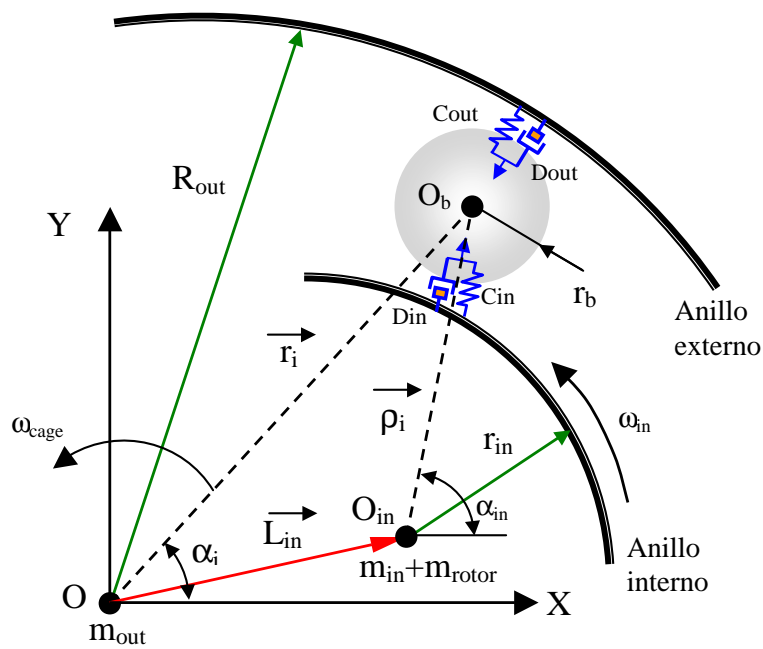


Figura 3.14 Modelo de rodamiento propuesto

Pueden apreciarse, además, en la Figura 3.14, las constantes de rigidez y el factor de amortiguamiento en los puntos de contacto de la bola con el anillo interno, C_{in} , D_{in} y con el anillo externo C_{out} , D_{out} . Se pretende establecer las ecuaciones del movimiento del conjunto rotor-anillo interno por aplicación de las ecuaciones de la dinámica de Newton según las direcciones de los ejes del sistema de referencia, presentando por tanto, dos grados de libertad. Antes de plantear las ecuaciones y para evitar que el modelo matemático resulta excesivamente complejo, se realizan las siguientes hipótesis:

- Las deformaciones ocurren tal y como describe la teoría de Hertz.
- Las bolas y rotor presentan un movimiento plano, siendo común a todos los elementos el mismo plano del movimiento.
- La velocidad angular de la jaula es constante.
- Las bolas no tienen velocidad angular de rotación.
- Todos los componentes del rodamiento son rígidos.
- El funcionamiento se bajo condiciones isoterma, por tanto no se consideran variaciones de dimensiones por efecto de la temperatura.
- No existe deslizamiento entre las bolas y las superficies sobre las que se produce el movimiento.
- La jaula mantiene las bolas equidistantes, por tanto, no existe interacción entre las bolas.
- El centro de las bolas dista del centro del anillo externo una distancia constante de 27 mm.

- Aunque la deformación bola-anillo interno tiene lugar según la dirección de la recta $O_b - O_{in}$, como el ángulo β es muy pequeño (Figura 3.16), supondremos que esta deformación lleva la dirección de la recta $O - O_b$. Por el mismo motivo, supondremos que la fuerza de reacción, F_i , de la bola sobre el anillo interno, lleva la misma dirección $O - O_b$, y se calculan sus componentes utilizando el ángulo α_i de la bola correspondiente.

Para un modelo con 2 grados de libertad, las ecuaciones del movimiento se deducen aplicando las ecuaciones de Newton al diagrama de sólido libre del conjunto rotor-anillo interno. La Figura 3.15 muestra las fuerzas que actúan sobre el anillo interno y son las siguientes:

- Peso del anillo interno y peso del rotor, $(m_{in} + m_{rotor}) \cdot g$
- Una fuerza exterior, F_{e_x}, F_{e_y}
- Una fuerza originada por disequilibrio en rotor, F_u
- Las fuerzas debidas a la elasticidad del contacto, Fin_x^i, Fin_y^i

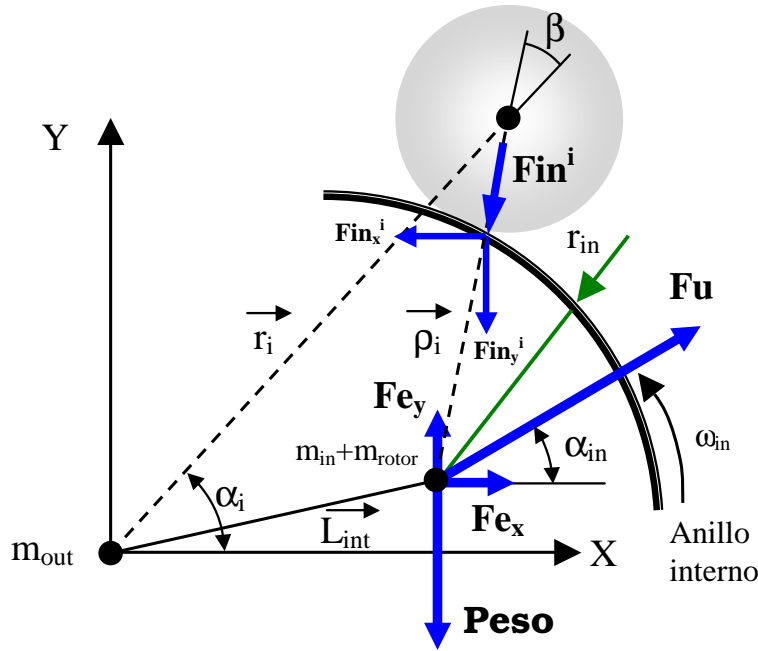


Figura 3.15 Diagrama de sólido libre anillo interno (2 GDL)

La segunda ley del movimiento de Newton, en coordenadas rectangulares, viene dada por:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{x} = \sum F_x \quad ; \quad (m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{y} = \sum F_y \quad (3.41)$$

Para simplificar la complejidad del modelo y puesto que el ángulo β es muy pequeño (del orden de 1° , en el caso más desfavorable), se calculan las componentes de la fuerza de contacto de cada bola Fin_x^i y Fin_y^i utilizando el ángulo de posición de la misma α_i .

En la dirección x, se tiene:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{x} = F_{e_x} + F_u \cdot \cos(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^3 F_{in_i} \cdot \cos(\alpha_i) \quad (3.42)$$

En la dirección y, se tiene:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{y} = F_{e_y} + F_u \cdot \sin(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^3 F_{in_i} \cdot \sin(\alpha_i) - (m_{in} + m_{rotor}) \cdot g \quad (3.43)$$

La fuerza de reacción sobre el anillo interno, originada por el contacto entre las bolas y los anillos interno/externo, depende de las constantes de rigidez C_{in} y C_{out} calculadas anteriormente, y de la posición del centro del anillo interno/rotor respecto al centro del anillo externo donde se encuentra situado el sistema de referencia global. Esta viene dada por el vector de posición \vec{L}_{in} .

Teniendo en cuenta la teoría de contacto de Hertz, la relación entre la fuerza de contacto y la deformación, para un rodamiento, viene dada por:

$$F_{in_i} = C \cdot (\delta_i)^{3/2} \quad (3.44)$$

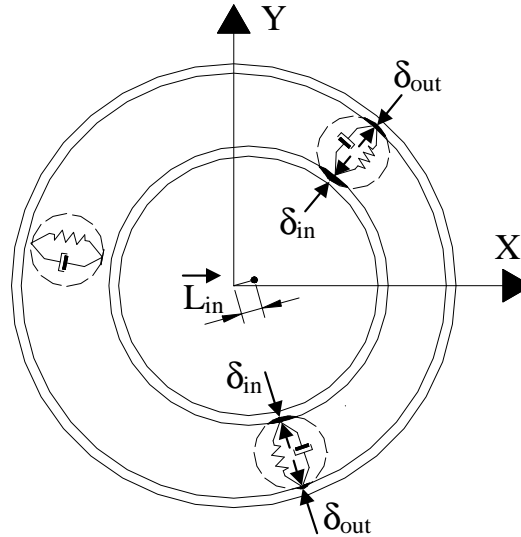


Figura 3.16 Fuerzas contacto bola-anillos interno/externo

Conociendo la deformación local elemento rodante-anillo, se puede calcular la fuerza de contacto mediante la ecuación 3.44.

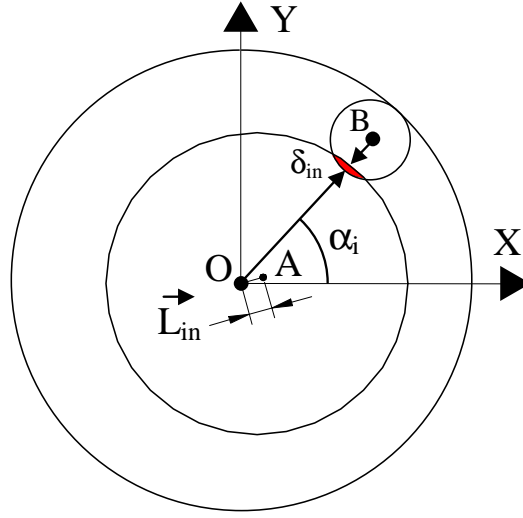


Figura 3.17 Deformación en contacto bola-anillo interno

Cuando el centro del anillo interno abandona el origen de coordenadas y pasa a la posición A , de coordenadas (x, y) , sobre la bola i , que ocupa una posición angular α_i , se produce una deformación δ_{in} . De la Figura 3.17, se deduce que:

$$\begin{aligned} \delta_i &= x_{in} \cdot \cos(\alpha_i) + y_{in} \cdot \sen(\alpha_i) & \text{Si } \delta_i \geq 0 \\ \delta_i &= 0 & \text{Si } \delta_i < 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Anticipándonos a lo que se plantea en el modelo de 2+Z G.D.L., a continuación, se expone otra forma de calcular la deformación δ_{in} . Observando la Figura 3.15 se aprecia que:

$$\vec{r}_i = \vec{L}_{in} + \vec{\rho}_i \quad (3.46)$$

Como

$$\vec{r}_i = r_i \cdot \cos(\alpha_i) \cdot \vec{i} + r_i \cdot \sen(\alpha_i) \cdot \vec{j} \quad (3.47)$$

$$\vec{L}_{in} = x_{in} \cdot \vec{i} + y_{in} \cdot \vec{j} \quad (3.48)$$

$$\vec{\rho}_i = \rho_i \cdot \cos(\alpha_{in}) \cdot \vec{i} + \rho_i \cdot \sen(\alpha_{in}) \cdot \vec{j} \quad (3.49)$$

Agrupando según las direcciones \vec{i} y \vec{j} , se tiene:

$$\begin{aligned} r_i \cdot \cos(\alpha_i) &= x_{in} + \rho_i \cdot \cos(\alpha_{in}) \\ r_i \cdot \sen(\alpha_i) &= y_{in} + \rho_i \cdot \sen(\alpha_{in}) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Para eliminar el ángulo α_{in} , se despejan, en las ecuaciones 3.50, los términos que contienen este valor, se elevan al cuadrado ambas ecuaciones y se suman.

$$\begin{aligned}\rho_i \cdot \cos(\alpha_{in}) &= x_{in} - r_i \cdot \cos(\alpha_i) \\ \rho_i \cdot \sin(\alpha_{in}) &= y_{in} - r_i \cdot \sin(\alpha_i)\end{aligned}\quad (3.51)$$

Elevando al cuadrado y desarrollando:

$$\begin{aligned}\rho_i^2 \cdot \cos^2(\alpha_{in}) &= x_{in}^2 + r_i^2 \cdot \cos^2(\alpha_i) - 2 \cdot r_i \cdot \cos(\alpha_i) \cdot x_{in} \\ \rho_i^2 \cdot \sin^2(\alpha_{in}) &= y_{in}^2 + r_i^2 \cdot \sin^2(\alpha_i) - 2 \cdot r_i \cdot \sin(\alpha_i) \cdot y_{in}\end{aligned}\quad (3.52)$$

Sumando, queda, finalmente:

$$\rho_i^2 = r_i^2 + x_{in}^2 + y_{in}^2 - 2 \cdot r_i \cdot \cos(\alpha_i) \cdot x_{in} - 2 \cdot r_i \cdot \sin(\alpha_i) \cdot y_{in}\quad (3.53)$$

La deformación δ_{in} vale:

$$\delta_{in} = r_i - \rho_i\quad (3.54)$$

En el modelo de 2 G.D.L. , el valor de r_i es constante, ya que la distancia del centro de las bolas al origen del sistema de referencia no varía. Considerando esto, resulta que:

$$r_i = R_{out} - r_b\quad (3.55)$$

Sustituyendo en la ecuación 3.54 queda:

$$\begin{aligned}\delta_i &= R_{out} - r_b - \rho_i & \text{si } \delta_i \geq 0 \\ \delta_i &= 0 & \text{si } \delta_i < 0\end{aligned}\quad (3.56)$$

Hay que tener en cuenta también que el contacto bola-anillo interno y bola-anillo externo se produce simultáneamente, por tanto, no se puede utilizar C_{in} ni C_{out} de forma directa y se debe calcular un coeficiente de rigidez adecuado C_{eq} . Considerando que $\beta = 0$ (Figura 3.15) y que las deformaciones se producen según la dirección del vector \vec{r}_i , se puede considerar la analogía mostrada en la Figura 3.18:

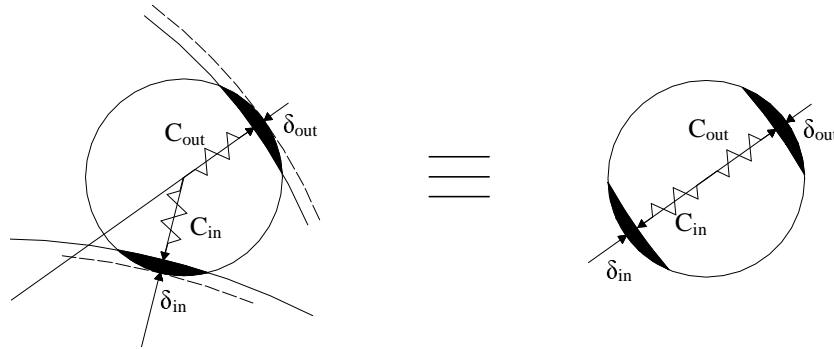


Figura 3.18 Contacto bola-anillos interno/externo

Por otro lado, al quedar los dos resortes en serie, se puede determinar una constante de rigidez equivalente C_{eq} y no tener que considerar los dos contactos bola-anillo interno y bola-anillo externo de forma separada.

La fuerza F es la misma para el contacto interno que el contacto externo por tanto:

$$F = C_{in} \cdot \delta_{in}^{\frac{3}{2}} = C_{out} \cdot \delta_{out}^{\frac{3}{2}} \quad (3.57)$$

La deformación total es igual a la suma de las deformaciones en el contacto interno y contacto externo:

$$\delta = \delta_{in} + \delta_{out} \quad (3.58)$$

De las ecuaciones 3.57 y 3.58 se deduce:

$$\delta = \frac{F^{\frac{2}{3}}}{C_{in}^{\frac{2}{3}}} + \frac{F^{\frac{2}{3}}}{C_{out}^{\frac{2}{3}}} = F^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{C_{in}^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{C_{out}^{\frac{2}{3}}} \right) = F^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{C_{eq}^{\frac{2}{3}}} \quad (3.59)$$

donde

$$\frac{1}{C_{eq}^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{C_{in}^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{C_{out}^{\frac{2}{3}}} \quad (3.60)$$

Como se conocen las constantes C_{in} y C_{out} del rodamiento, se puede calcular la C_{eq} :

$$C_{eq} = 325757 \frac{N}{mm^{\frac{3}{2}}} \quad (3.61)$$

La fuerza de contacto elemento rodante-anillo interno puede calcularse mediante:

$$Fin_i = C_{eq} \cdot \delta_{in}^{\frac{3}{2}} \quad (3.62)$$

3.2.2. Ecuaciones diferenciales del movimiento del modelo con 2 G.D.L.

Ecuaciones diferenciales del movimiento. Rodamiento con 3 bolas

Las ecuaciones 3.63 y 3.64, representan las ecuaciones diferenciales del movimiento del rotor, aplicando la 2ª ley de Newton, cuando el rodamiento tiene únicamente tres bolas. En la dirección x , se tiene:

$$(m_{int} + m_{rotor}) \cdot \ddot{x} = Fe_x + Fu \cdot \cos(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^3 Fin_i \cdot \cos(\alpha_i) \quad (3.63)$$

En la dirección y , se tiene:

$$(m_{int} + m_{rotor}) \cdot \ddot{y} = Fe_y + Fu \cdot \text{sen}(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^3 Fin_i \cdot \text{sen}(\alpha_i) - (m_{in} + m_{rotor}) \cdot g \quad (3.64)$$

Ecuaciones diferenciales del movimiento. Rodamiento con 9 bolas

Las ecuaciones 3.65 y 3.66, representan las ecuaciones diferenciales del movimiento del rotor cuando el rodamiento tiene nueve bolas. Para la dirección x , se tiene:

$$(m_{int} + m_{rotor}) \cdot \ddot{x} = Fe_x + Fu \cdot \cos(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^9 Fin_i \cdot \cos(\alpha_i) \quad (3.65)$$

En la dirección y , se tiene:

$$(m_{int} + m_{rotor}) \cdot \ddot{y} = Fe_y + Fu \cdot \text{sen}(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^9 Fin_i \cdot \text{sen}(\alpha_i) - (m_{in} + m_{rotor}) \cdot g \quad (3.66)$$

3.3. MODELO 2 + Z G.D.L.

3.3.1. Modelado del sistema. Ecuaciones de Newton

En el modelo de 2 G.D.L., se ha considerado que la distancia radial del centro de las bolas al origen del sistema de referencia situado en el centro del anillo externo, es constante y solamente el conjunto rotor-anillo interno, queda libre para moverse en el plano con un movimiento calculado según los parámetros de funcionamiento del modelo. En un intento de reproducir con mayor fidelidad el sistema real, se dotará a cada bola de un grado de libertad y, de esta forma, la distancia del centro de las mismas al origen de coordenadas ya no será constante sino variable en el tiempo. Con estas consideraciones, el modelo presenta 2+Z G.D.L., dos correspondientes al anillo interno y uno por cada bola que tenga el rodamiento.

Se quieren establecer las ecuaciones del movimiento del sistema aplicando las ecuaciones de la dinámica de Newton. Para ello, se representa el diagrama de sólido libre de los elementos del sistema que presentan movimiento, en este caso, las bolas y el anillo interno y se establece, para cada uno de ellos, la ecuación:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (3.67)$$

Si se considera que las fuerzas que actúan sobre el conjunto rotor-anillo interno son las mismas que en el modelo de 2 G.D.L. y se modela el sistema bajo las mismas hipótesis, las ecuaciones diferenciales del movimiento son idénticas a las ecuaciones 3.63 y 3.64.

La figura 3.19 muestra las fuerzas que actúan sobre la bola 'i'.

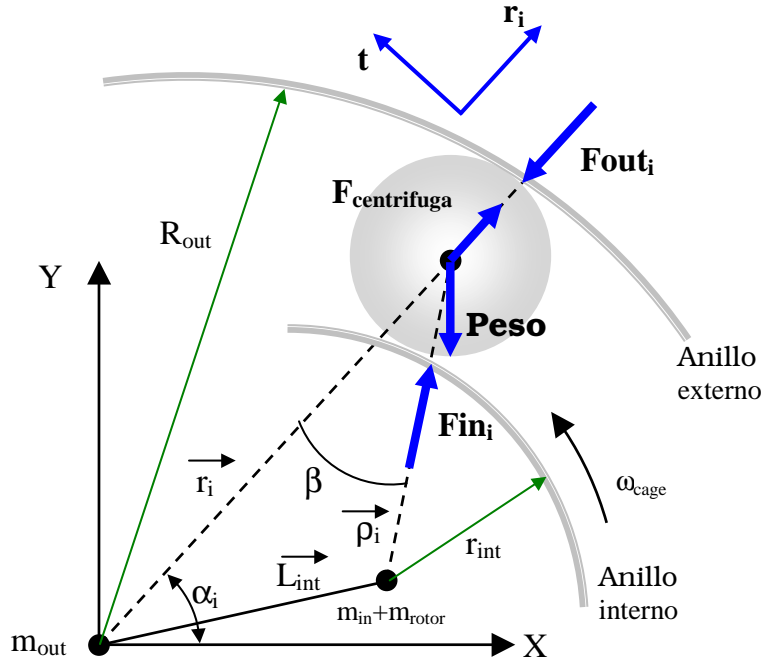


Figura 3.19 Diagrama sólido libre de una bola

Proyectando las fuerzas sobre la dirección r_i , y pasando la componente centrífuga al miembro de la derecha, se tiene que:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_i = F_{in_i} \cdot \cos(\beta) + F_{centrifuga} - Peso \cdot \sin(\alpha_i) - F_{out_i} \quad (3.68)$$

Donde:

- $F_{in_i} = C_{in} \cdot \delta in_i^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{\rho}_i \cdot \Gamma_{in} = 905890 \cdot (r_{int} + r_{bo} - \rho_i)^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{\rho}_i \cdot \Gamma_{in}$
- $F_{centrifuga} = m_{bo} \cdot r_i \cdot \dot{\alpha}_i^2$
- $Peso = m_{bo} \cdot g$
- $F_{out_i} = C_{out} \cdot \delta out_i^{3/2} + D_{out} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{out} = 937317 \cdot (r_i + r_{bo} - R_{out}) + D_{out} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{out}$

Como el ángulo β es muy pequeño, se puede suponer que la fuerza F_{in_i} actúa según la dirección de la recta que pasa por el origen de coordenadas y el centro de la bola, tal y como muestra la Figura 3.20.

La ecuación diferencial del movimiento de cada bola, $i = 1, 2, \dots, Z$, queda finalmente:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_i = C_{in} \cdot \delta in_i^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{\rho}_i \cdot \Gamma_{in} - C_{out} \cdot \delta out_i^{3/2} - D_{out} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_i \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \sin(\alpha_i) \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{in} &= 0 & \text{si } \delta_{in} < 0 & ; & \Gamma_{in} = 1 & \text{si } \delta_{in} \geq 0 \\ \Gamma_{out} &= 0 & \text{si } \delta_{out} < 0 & ; & \Gamma_{out} = 1 & \text{si } \delta_{out} \geq 0 \end{aligned}$$

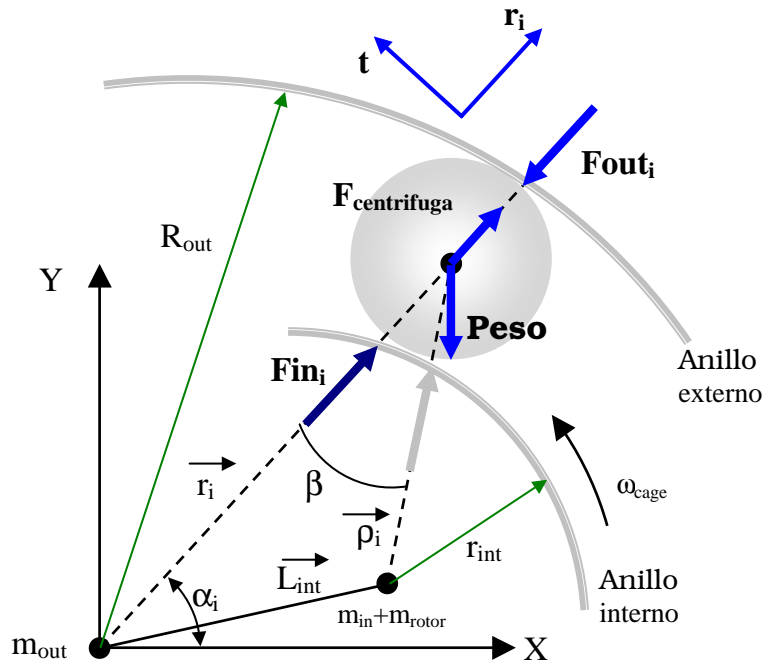


Figura 3.20 Fuerzas sobre la bola 'i'

3.3.2. Modelado del sistema. Ecuaciones de Lagrange

En esta sección se pretende obtener las ecuaciones del movimiento a partir de las ecuaciones de Lagrange. El modelado del sistema se realiza bajo las mismas hipótesis contempladas en el modelo de 2 G.D.L.. La aplicación de las ecuaciones de Lagrange a los problemas prácticos resulta notablemente sencilla aun cuando se trate de sistemas mecánicos complejos. El procedimiento de Lagrange se basa en magnitudes escalares como la energía cinética, energía potencial y trabajo virtual. Al tratar los problemas de la dinámica con las ecuaciones de Newton, nos encontramos con fuerzas, velocidades, aceleraciones, etc. todas ellas de carácter vectorial. Las ecuaciones de Lagrange, basadas en magnitudes escalares, tienen en cuenta estas magnitudes vectoriales sin necesidad de recurrir a métodos vectoriales formales.

Supongamos un sistema formado por i partículas con j grados de libertad. El número de coordenadas generalizadas, igual al número de grados de libertad, para especificar el movimiento, las denotaremos por:

$$q_1, q_2, q_3 \dots, q_j \quad (3.70)$$

El vector de posición de la i -ésima partícula puede escribirse como:

$$r_i = f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_j) \quad (3.71)$$

Las ecuaciones del movimiento se obtienen mediante la ecuación de Lagrange para un conjunto de coordenadas generalizadas. Si el sistema es no conservativo y por tanto existen fuerzas disipativas, podemos escribir la ecuación de Lagrange en su forma más general como :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial Ec}{\partial q_j} + \frac{\partial Ep}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = Q'_j \quad (3.72)$$

donde D es la función de disipación de Rayleigh y Q'_j es la fuerza generalizada no conservativa, tal como el rozamiento.

Si se comparan las formas de la energía cinética, Ec , energía potencial elástica, Ep , y la función de disipación, D , para un sistema con 1 grado de libertad, se tiene:

$$Ec = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{q}_1^2 \quad ; \quad Ep = \frac{1}{2} \cdot C \cdot q_1^2 \quad ; \quad D = \frac{1}{2} \cdot D' \cdot \dot{q}_1^2 \quad (3.73)$$

donde C es el coeficiente de rigidez (considerado según la ley de Hooke $F = C \cdot x$) y D' es el coeficiente de amortiguamiento.

La energía cinética y energía potencial total del sistema, pueden obtenerse sumando las energías de los distintos componentes. Así, la energía cinética total, viene dada por:

$$Ec_T = Ec_{rotor} + Ec_{A_{Interno}} + Ec_{A_{Externo}} + \sum_{i=1}^{Z_{bolas}} Ec_{bola} \quad (3.74)$$

La energía potencial total viene dada por :

$$Ep_T = Ep_{rotor} + Ep_{A_{Interno}} + Ep_{A_{Externo}} + \sum_{i=1}^{Z_{bolas}} Ep_{bola} + \sum_{i=1}^{Z_{bolas}} Ep_{contacto} \quad (3.75)$$

Si se considera que además existe amortiguamiento cuando se produce el contacto de las bolas con el anillo interno o el anillo externo, la función de disipación de Rayleigh viene dada por:

$$D_T = \sum_{i=1}^{Z_{bolas}} D_{contacto} \quad (3.76)$$

En la Tabla 3.2 y de acuerdo con la Figura 3.19 se refleja la notación empleada de las coordenadas generalizadas elegidas para el modelado del sistema.

r_1	Posición centro de masa de la bola 1
r_2	Posición centro de masa de la bola 2
\dots	\dots
r_Z	Posición centro de masa de la bola Z
(x_{in}, y_{in})	Posición centro de masas de la pista interna

Tabla 3.2 Coordenadas generalizadas

Con lo que se dispone de un sistema de $2+Z$ grados de libertad. A continuación se detallan las ecuaciones de cada uno de los componentes que integran el rodamiento.

Anillo Interno

Comenzamos calculando la energía cinética del anillo interno. El vector de posición del centro de masas del anillo interno respecto al sistema de referencia global, viene dado por:

$$\vec{L}_{in} = x_{in} \vec{i} + y_{in} \vec{j} \quad (3.77)$$

El valor de la energía cinética se obtiene de forma:

$$Ec_{A_{Interno}} = \frac{1}{2} m_{in} \left(\vec{L}_{in} \cdot \vec{L}_{in} \right) + \frac{1}{2} I_{in} \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 \quad (3.78)$$

La velocidad se obtiene derivando respecto al tiempo el vector de posición:

$$\dot{\vec{L}}_{in} = \dot{x}_{in} \vec{i} + \dot{y}_{in} \vec{j} \quad (3.79)$$

En consecuencia:

$$Ec_{A_{Interno}} = \frac{1}{2} m_{in} (\dot{x}_{in}^2 + \dot{y}_{in}^2) + \frac{1}{2} I_{in} \dot{\Phi}_{in}^2 \quad (3.80)$$

Tomando como referencia de energía potencial el centro de la pista externa, (origen de coordenadas), la energía potencial de la pista interna viene dada por:

$$Ep_{A_{Interno}} = m_{in} \cdot g \cdot h_{in} = m_{in} \cdot g \cdot y_{in} \quad (3.81)$$

Halladas las expresiones de energía cinética y energía potencial, los términos de la ecuación de Lagrange se obtienen derivando respecto a las coordenadas generalizadas $(x_{in}, y_{in}, r_1, \dots, r_i, \dots, r_Z)$ y sus derivadas respecto al tiempo $(\dot{x}_{in}, \dot{y}_{in}, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_i, \dots, \dot{r}_Z)$ las expresiones de energía cinética, energía potencial y la función de disipación cuando esta exista. En nuestro caso, para el anillo interno se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{x}_{in}} \right) &= \frac{d}{dt} (m_{in} \dot{x}_{in}) = m_{in} \dot{x}_{in} \quad ; \quad \frac{\partial Ec}{\partial x_{in}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Ec}{\partial x_{in}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{y}_{in}} \right) &= \frac{d}{dt} (m_{in} \dot{y}_{in}) = m_{in} \dot{y}_{in} \quad ; \quad \frac{\partial Ec}{\partial y_{in}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Ep}{\partial x_{in}} = m_{in} g \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{r}_i} \right) &= 0_{i=1,2,\dots,Z} \quad ; \quad \frac{\partial Ec}{\partial r_i} = 0_{i=1,2,\dots,Z} \quad ; \quad \frac{\partial Ep}{\partial r_i} = 0_{i=1,2,\dots,Z} \end{aligned} \quad (3.82)$$

Rotor

Al ser solidario el rotor y el anillo interno, ambos presentan el mismo movimiento y posición por tanto, presentan expresiones similares para energía cinética y energía potencial, diferenciándose tan solo en la masa y momento de inercia.

$$Ec_{rotor} = \frac{1}{2} m_{rotor} (\dot{x}_{in}^2 + \dot{y}_{in}^2) + \frac{1}{2} I_{rotor} \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 \quad (3.83)$$

$$Ep_{rotor} = m_{rotor} \cdot g \cdot h_{in} = m_{rotor} \cdot g \cdot y_{in} \quad (3.84)$$

Los términos de la ecuación de Lagrange para el rotor se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{x}_{in}} \right) &= \frac{d}{dt} (m_{in} \dot{x}_{in}) = m_{rotor} \dot{x}_{in} \quad ; \quad \frac{\partial Ec}{\partial x_{in}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Ec}{\partial \dot{x}_{in}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{y}_{in}} \right) &= \frac{d}{dt} (m_{in} \dot{y}_{in}) = m_{rotor} \dot{y}_{in} \quad ; \quad \frac{\partial Ec}{\partial y_{in}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Ep}{\partial x_{in}} = m_{rotor} g \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{r}_i} \right) &= 0_{i=1,2,\dots,Z} \quad ; \quad \frac{\partial Ec}{\partial r_i} = 0_{i=1,2,\dots,Z} \quad ; \quad \frac{\partial Ep}{\partial r_i} = 0_{i=1,2,\dots,Z} \end{aligned} \quad (3.85)$$

Anillo Externo

El anillo externo se encuentra estacionario por tanto su contribución a la energía cinética total y energía potencial total es nulo.

Bolas

El vector de posición del centro de masas de la bola i respecto al S.I. considerado es:

$$\vec{r}_i = r_i \cdot \cos(\alpha_i) \vec{i} + r_i \cdot \sin(\alpha_i) \vec{j} \quad (3.86)$$

El valor de la energía cinética viene dado por:

$$Ec_{bola_i} = \frac{1}{2} m_{bo} (\vec{\dot{r}}_i \cdot \vec{\dot{r}}_i) + \frac{1}{2} I_{bo} \dot{\theta}_{bo}^2 \quad (3.87)$$

Derivando la velocidad a partir del vector de posición, se obtiene finalmente:

$$Ec_{bola_i} = \frac{1}{2} m_{bo} (\dot{r}_i^2 + r_i^2 \dot{\alpha}_i^2) + \frac{1}{2} I_{bo} \dot{\theta}_{bo}^2 \quad (3.88)$$

Para el calculo de la energía potencial de la bola i , tomando como referencia el centro del anillo externo, (origen de coordenadas), se tiene:

$$Ep_{bola_i} = m_{bo} \cdot g \cdot h_{bo} = m_{bo} \cdot g \cdot r_i \sin(\alpha_i) \quad (3.89)$$

Los términos de la ecuación de Lagrange para la bola 'i' se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{x}_{in}} \right) &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial Ec}{\partial x_{in}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Ep}{\partial x_{in}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{y}_{in}} \right) &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial Ec}{\partial y_{in}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Ep}{\partial y_{in}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{r}_i} \right) &= m_{bo} \cdot \dot{r}_i \quad ; \quad \frac{\partial Ec}{\partial r_i} = m_{bo} \cdot r_i \cdot \dot{\alpha}_i^2 \quad ; \quad \frac{\partial Ep}{\partial r_i} = m_{bo} \cdot g \cdot r_i \cdot \sin(\alpha_i) \\ & \quad i = 1, 2, \dots, Z \end{aligned} \quad (3.90)$$

Contacto Bola-Anillo Interno

La fuerza de reacción, en Newton, debida a la deformación en el punto de contacto viene dada por:

$$F = C_{in} \cdot \delta_{in}^{\frac{3}{2}} \quad (3.91)$$

donde C es el coeficiente de rigidez, en $N/mm^{3/2}$ y δ es la deformación en mm .

El trabajo realizado durante una deformación infinitesimal vale:

$$dW = F \cdot d\delta \quad (3.92)$$

El trabajo desarrollado queda acumulado en forma de energía potencial elástica, y viene dado por:

$$\Delta W = \Delta Ep = \int F \, d\delta = \int C_{in} \cdot \delta_{in}^{\frac{3}{2}} \, d\delta = \frac{2}{5} C_{in} \cdot \delta_{in}^{\frac{5}{2}} \quad (3.93)$$

La energía potencial elástica total viene dada por:

$$Ep_{elastica} = \sum_{i=1}^{Z_{bolas}} \frac{2}{5} \cdot C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{\frac{5}{2}} \quad (3.94)$$

Teniendo en cuenta las dimensiones de los elementos del rodamiento y el vector de posición del centro de masas de la bola respecto al centro de masas del anillo interno, ρ_i , el valor de la deformación δ_{in} en el contacto entre el anillo interno y la bola i , viene dado por:

$$\begin{aligned} Si \quad \rho_i < r_{in} + r_{bo} &\rightarrow \delta_{in_i} = r_{in} + r_{bo} - \rho_i \\ Si \quad \rho_i \geq r_{in} + r_{bo} &\rightarrow \delta_{in_i} = 0 \end{aligned} \quad (3.95)$$

El valor de ρ_i viene dado por la ecuación deducida anteriormente en la ecuación 3.53:

$$\rho_i = [r_i^2 + x_{in}^2 + y_{in}^2 - 2r_i \cos(\alpha_i)x_{in} - 2r_i \sin(\alpha_i)y_{in}]^{\frac{1}{2}} \quad (3.96)$$

Como solamente se tiene energía potencial elástica, se tiene que hallar la variación de esta energía respecto a las coordenadas generalizadas $(x_{in}, y_{in}, r_1, \dots, r_i, \dots, r_Z)$.

- Respecto a la coordenada generalizada, x_{in} :

$$\frac{\partial Ep}{\partial x_{in}} = \frac{2}{5} \cdot C_{in} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{in}} \left(\delta_{in_i}^{\frac{5}{2}} \right) = C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial \delta_{in_i}}{\partial x_{in}} \quad (3.97)$$

donde:

$$\frac{\partial \delta_{in_i}}{\partial x_{in}} = \frac{\partial \delta_{in_i}}{\partial \rho_i} \cdot \frac{\partial \rho_i}{\partial x_{in}} = -\frac{\partial \rho_i}{\partial x_{in}} \quad (3.98)$$

teniendo finalmente:

$$\frac{\partial Ep}{\partial x_{in}} = -C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x_{in} - r_i \cos(\alpha_i)}{\rho_i} \quad (3.99)$$

- Respecto a la coordenada generalizada, y_{in} :

$$\frac{\partial Ep}{\partial y_{in}} = \frac{2}{5} \cdot C_{in} \cdot \frac{\partial}{\partial y_{in}} \left(\delta_{in_i}^{\frac{5}{2}} \right) = C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial \delta_{in_i}}{\partial y_{in}} \quad (3.100)$$

y de forma similar se obtiene:

$$\frac{\partial Ep}{\partial y_{in}} = -C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{y_{in} - r_i \sin(\alpha_i)}{\rho_i} \quad (3.101)$$

- Respecto a las coordenadas generalizadas, $r_1, \dots, r_i, \dots, r_Z$:

$$\frac{\partial Ep}{\partial r_i} = \frac{2}{5} \cdot C_{in} \cdot \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\delta_{in_i}^{\frac{5}{2}} \right) = C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial \delta_{in_i}}{\partial r_i} \quad i=1,2,\dots,Z \quad (3.102)$$

donde:

$$\frac{\partial \delta_{in_i}}{\partial r_i} = \frac{\partial \delta_{in_i}}{\partial \rho_i} \cdot \frac{\partial \rho_i}{\partial r_i} = -\frac{\partial \rho_i}{\partial r_i} \quad (3.103)$$

queda finalmente que:

$$\frac{\partial Ep}{\partial r_i} = -C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{r_i - \cos(\alpha_i)x_{in} - \sin(\alpha_i)y_{in}}{\rho_i} \quad i=1,2,\dots,Z \quad (3.104)$$

La función de disipación de Rayleigh, D , considerando un amortiguamiento o una pérdida de energía cuando se produce el contacto de la bola con el anillo, viene dada por:

$$D_i = \sum_{i=1}^{Z_{bolas}} \frac{1}{2} \cdot D_{in} \cdot \dot{\rho}_i^2 \quad (3.105)$$

Contacto Bola-Anillo Externo

La energía potencial elástica del contacto bola-anillo externo, viene dada por:

$$Ep_{elastica} = \sum_{i=1}^{Z_{bolas}} \frac{2}{5} \cdot C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{\frac{5}{2}} \quad (3.106)$$

Teniendo en cuenta las dimensiones de los elementos del rodamiento y el vector de posición del centro de masas de la bola respecto origen del S.R. global, r_i , el valor de la deformación δ_{out_i} en el contacto entre el anillo interno y la bola i , viene dado por:

$$\begin{aligned} Si \quad r_i > R_{out} - r_{bo} &\rightarrow \delta_{out_i} = r_i + r_{bo} - R_{out} \\ Si \quad r_i \leq R_{out} - r_{bo} &\rightarrow \delta_{out_i} = 0 \end{aligned} \quad (3.107)$$

Como solamente se tiene energía potencial elástica, se tiene que hallar la variación de esta energía respecto a las coordenadas generalizadas $(x_{in}, y_{in}, r_1, \dots, r_i, \dots, r_Z)$.

- Respecto a la coordenada generalizada, x_{in} :

$$\frac{\partial Ep}{\partial x_{in}} = \frac{2}{5} \cdot C_{out} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{in}} \cdot (\delta_{out_i}^{\frac{5}{2}}) = C_{out} \cdot \delta_{out_i}^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial \delta_{out_i}}{\partial x_{in}} = 0 \quad (3.108)$$

puesto que:

$$\frac{\partial \delta_{in_i}}{\partial x_{in}} = 0 \quad (3.109)$$

- Respecto a la coordenada generalizada, y_{in} :

$$\frac{\partial Ep}{\partial y_{in}} = \frac{2}{5} \cdot C_{out} \cdot \frac{\partial}{\partial y_{in}} \left(\delta_{out_i}^{\frac{5}{2}} \right) = C_{out} \cdot \delta_{out_i}^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial \delta_{out_i}}{\partial y_{in}} = 0 \quad (3.110)$$

ya que:

$$\frac{\partial \delta_{in_i}}{\partial y_{in}} = 0 \quad (3.111)$$

- Respecto a las coordenadas generalizadas, $r_1, \dots, r_i, \dots, r_Z$:

$$\frac{\partial Ep}{\partial r_i} = \frac{2}{5} \cdot C_{out} \cdot \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\delta_{out_i}^{\frac{5}{2}} \right) = C_{out} \cdot \delta_{out_i}^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial \delta_{out_i}}{\partial r_i} \quad i=1,2,\dots,Z \quad (3.112)$$

quedando:

$$\frac{\partial Ep}{\partial r_i} = C_{out} \cdot \delta_{out_i}^{\frac{3}{2}} \quad i=1,2,\dots,Z \quad (3.113)$$

La función de disipación de Rayleigh, D , en el contacto de la bola-anillo externo, viene dada por:

$$D_o = \sum_{i=1}^{Z_{bolas}} \frac{1}{2} \cdot D_{out} \cdot \dot{r}_i^2 \quad (3.114)$$

Ecuaciones globales del movimiento

A partir de los apartados previos se llega a las siguientes ecuaciones globales del movimiento:

- Para la coordenada generalizada x_{in} se tiene:

$$\sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{x}_{in}} \right) - \sum \frac{\partial Ec}{\partial x_{in}} + \sum \frac{\partial Ep}{\partial x_{in}} + \sum \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_{in}} = Q'_j$$

La ecuación diferencial del movimiento queda:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{x}_{in} - \left[\sum_{i=1}^{Z_{bolas}} (C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{3/2} + D_{in} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{in}) \right] \cdot \frac{x_{in} - r_i \cos(\alpha_i)}{\rho_i} = \\ = F_{ex} + F u \cos \alpha_{in} \quad (3.115)$$

$$\Gamma_{in} = 0 \quad \text{si} \quad \delta_{in} < 0 \quad ; \quad \Gamma_{in} = 1 \quad \text{si} \quad \delta_{in} \geq 0$$

- Para la coordenada generalizada y_{in} se tiene:

$$\sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{y}_{in}} \right) - \sum \frac{\partial Ec}{\partial y_{in}} + \sum \frac{\partial Ep}{\partial y_{in}} + \sum \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_{in}} = Q'_j$$

La ecuación diferencial del movimiento queda:

$$(m_{in} + m_{rotor}) (\ddot{y}_{in} + g) - \left[\sum_{i=1}^{Z_{bolas}} (C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{in}) \right] \cdot \frac{y_{in} - r_i \sin(\alpha_i)}{\rho_i} = \\ = F_{ex} + F u \cos \alpha_{in} \quad (3.116)$$

$$\Gamma_{out} = 0 \quad \text{si} \quad \delta_{out} < 0 \quad ; \quad \Gamma_{out} = 1 \quad \text{si} \quad \delta_{out} \geq 0$$

- Para las coordenadas generalizadas r_i desde $i = 1, 2, \dots, Z$, se tiene:

$$\sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{r}_i} \right) - \sum \frac{\partial Ec}{\partial r_i} + \sum \frac{\partial Ep}{\partial r_i} + \sum \frac{\partial D}{\partial \dot{r}_i} = Q'_j$$

$$m_{bo} \ddot{r}_i - m_{bo} \cdot \dot{r}_i \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \sin(\alpha_i) - \left[C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{in} \right] \cdot \frac{\partial \rho_i}{\partial r_i} + \\ + C_{out} \cdot \delta_{out_i}^{3/2} + D_{out} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad , i=1,2,\dots,Z \quad (3.117)$$

$$\Gamma_{in} = 0 \quad \text{si} \quad \delta_{in} < 0 \quad ; \quad \Gamma_{in} = 1 \quad \text{si} \quad \delta_{in} \geq 0$$

$$\Gamma_{out} = 0 \quad \text{si} \quad \delta_{out} < 0 \quad ; \quad \Gamma_{out} = 1 \quad \text{si} \quad \delta_{out} \geq 0$$

3.4. PARTICULARIZACIÓN DE LAS ECUACIONES A MODELOS CON 5 y 11 G.D.L.

3.4.1. Modelo con ecuaciones de Newton

Obtenidas las ecuaciones diferenciales del movimiento para un sistema con 2+Z G.D.L., podemos plantear el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento de un sistema particular, esto es, un rodamiento que posteriormente ensayaremos y nos permitirá validar el modelo.

Ecuaciones diferenciales del movimiento. Rodamiento con 3 bolas

El rodamiento más simple consta de un anillo interno, un anillo externo, y tres bolas interpuestas entre los anillos uniformemente espaciadas, tal y como muestra la Figura 3.15. Tendremos un sistema de 5 ecuaciones diferenciales no lineales con 5 incógnitas, cuya solución nos permite determinar la posición del centro del anillo interno y la posición de cada bola en cualquier instante $(x_{in}, y_{in}, r_1, r_2, r_3)$. En la dirección x , se tiene:

$$(m_{int} + m_{rotor}) \cdot \ddot{x}_{in} = Fe_x + Fu \cdot \cos(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^3 Fin_i \cdot \cos(\alpha_i) \quad (3.118)$$

En la dirección y , se tiene:

$$(m_{int} + m_{rotor}) \cdot \ddot{y}_{in} = Fe_y + Fu \cdot \sen(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^3 Fin_i \cdot \sen(\alpha_i) - (m_{in} + m_{rotor}) \cdot g \quad (3.119)$$

En la dirección r_1 :

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_1 = C_{in} \cdot \delta in_1^{3/2} - C_{out} \cdot \delta out_1^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_1 \cdot \Gamma_{in} - D_{out} \cdot \dot{r}_1 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_1 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \sen(\alpha_1) \quad (3.120)$$

En la dirección r_2 :

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_2 = C_{in} \cdot \delta in_2^{3/2} - C_{out} \cdot \delta out_2^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_2 \cdot \Gamma_{in} - D_{out} \cdot \dot{r}_2 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_2 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \sen(\alpha_2) \quad (3.121)$$

En la dirección r_3 :

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_3 = C_{in} \cdot \delta in_3^{3/2} - C_{out} \cdot \delta out_3^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_3 \cdot \Gamma_{in} - D_{out} \cdot \dot{r}_3 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_3 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \sen(\alpha_3) \quad (3.122)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{in} &= 0 & \text{si} & \delta_{in} < 0 & ; & \Gamma_{in} = 1 & \text{si} & \delta_{in} \geq 0 \\ \Gamma_{out} &= 0 & \text{si} & \delta_{out} < 0 & ; & \Gamma_{out} = 1 & \text{si} & \delta_{out} \geq 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones diferenciales del movimiento. Rodamiento con 9 bolas

El rodamiento real consta de un anillo interno, un anillo externo, y nueve bolas interpuestas entre los anillos uniformemente espaciadas. Para este modelo, tendremos un sistema de 11

ecuaciones diferenciales no lineales con 11 incógnitas, cuya solución nos permite determinar la posición del centro del anillo interno y la posición de cada bola en cualquier instante ($x_{in}, y_{in}, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9$). En la dirección x , se tiene:

$$(m_{int} + m_{rotor}) \cdot \ddot{x}_{in} = Fe_x + Fu \cdot \cos(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^9 Fin_i \cdot \cos(\alpha_i) \quad (3.123)$$

En la dirección y , se tiene:

$$(m_{int} + m_{rotor}) \cdot \ddot{y}_{in} = Fe_y + Fu \cdot \sen(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^9 Fin_i \cdot \sen(\alpha_i) - (m_{in} + m_{rotor}) \cdot g \quad (3.124)$$

En la dirección r_1 :

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_1 = C_{in} \cdot \delta in_1^{3/2} - C_{out} \cdot \delta out_1^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_1 \cdot \Gamma_{in} - D_{out} \cdot \dot{r}_1 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_1 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \sen(\alpha_1) \quad (3.125)$$

En la dirección r_2 :

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_2 = C_{in} \cdot \delta in_2^{3/2} - C_{out} \cdot \delta out_2^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_2 \cdot \Gamma_{in} - D_{out} \cdot \dot{r}_2 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_2 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \sen(\alpha_2) \quad (3.126)$$

En la dirección r_3 :

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_3 = C_{in} \cdot \delta in_3^{3/2} - C_{out} \cdot \delta out_3^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_3 \cdot \Gamma_{in} - D_{out} \cdot \dot{r}_3 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_3 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \sen(\alpha_3) \quad (3.127)$$

En la dirección r_4 :

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_4 = C_{in} \cdot \delta in_4^{3/2} - C_{out} \cdot \delta out_4^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_4 \cdot \Gamma_{in} - D_{out} \cdot \dot{r}_4 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_4 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \sen(\alpha_4) \quad (3.128)$$

En la dirección r_5 :

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_5 = C_{in} \cdot \delta in_5^{3/2} - C_{out} \cdot \delta out_5^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_5 \cdot \Gamma_{in} - D_{out} \cdot \dot{r}_5 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_5 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \sen(\alpha_5) \quad (3.129)$$

En la dirección r_6 :

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_6 = C_{in} \cdot \delta in_6^{3/2} - C_{out} \cdot \delta out_6^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_6 \cdot \Gamma_{in} - D_{out} \cdot \dot{r}_6 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_6 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \sen(\alpha_6) \quad (3.130)$$

En la dirección r_7 :

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_7 = C_{in} \cdot \delta in_7^{3/2} - C_{out} \cdot \delta out_7^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_7 \cdot \Gamma_{in} - D_{out} \cdot \dot{r}_7 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_7 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \sen(\alpha_7) \quad (3.131)$$

En la dirección r_8 :

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_8 = C_{in} \cdot \delta in_8^{3/2} - C_{out} \cdot \delta out_8^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_8 \cdot \Gamma_{in} - D_{out} \cdot \dot{r}_8 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_8 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \sen(\alpha_8) \quad (3.132)$$

En la dirección r_9 :

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_9 = C_{in} \cdot \delta in_9^{3/2} - C_{out} \cdot \delta out_9^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_9 \cdot \Gamma_{in} - D_{out} \cdot \dot{r}_9 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_9 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \sen(\alpha_9) \quad (3.133)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{in} &= 0 \quad \text{si} \quad \delta_{in} < 0 \quad ; \quad \Gamma_{in} = 1 \quad \text{si} \quad \delta_{in} \geq 0 \\ \Gamma_{out} &= 0 \quad \text{si} \quad \delta_{out} < 0 \quad ; \quad \Gamma_{out} = 1 \quad \text{si} \quad \delta_{out} \geq 0 \end{aligned}$$

3.4.2. Modelo con ecuaciones de Lagrange

De igual forma, utilizando las ecuaciones de Lagrange, hemos hallado las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un rodamiento compuesto de anillo interno, anillo externo, y 'Z' bolas interpuestas entre los anillos uniformemente espaciadas.

Ecuaciones diferenciales del movimiento. Rodamiento con 3 bolas

Particularizando estas ecuaciones a nuestro rodamiento con tres bolas solamente, el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales viene dado por:

En la dirección x , se tiene:

$$\begin{aligned} (m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{x}_{in} - \left[\sum_{i=1}^3 (C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{3/2} + D_{in} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{in}) \right] \cdot \frac{x_{in} - r_i \cos(\alpha_i)}{\rho_i} = \\ = F_{ex} + F_u \cos \alpha_{in} \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.134)$$

$$\Gamma_{in} = 0 \quad \text{si} \quad \delta_{in} < 0 \quad ; \quad \Gamma_{in} = 1 \quad \text{si} \quad \delta_{in} \geq 0$$

En la dirección y , se tiene:

$$\begin{aligned} (m_{in} + m_{rotor}) (\ddot{y}_{in} + g) - \left[\sum_{i=1}^3 (C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{in}) \right] \cdot \frac{y_{in} - r_i \sin(\alpha_i)}{\rho_i} = \\ = F_{ex} + F_u \cos \alpha_{in} \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$\Gamma_{in} = 0 \quad \text{si} \quad \delta_{in} < 0 \quad ; \quad \Gamma_{in} = 1 \quad \text{si} \quad \delta_{in} \geq 0$$

En la dirección r_1 :

$$\begin{aligned} m_{bo} \ddot{r}_1 - m_{bo} \cdot r_1 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_1) - \left[C_{in} \cdot \delta_{in_1}^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_1 \cdot \Gamma_{in} \right] \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial r_1} + \\ + C_{out} \cdot \delta_{out_1}^{3/2} + D_{out} \cdot \dot{r}_1 \cdot \Gamma_{out} = 0 \end{aligned} \quad (3.136)$$

En la dirección r_2 :

$$\begin{aligned} m_{bo} \ddot{r}_2 - m_{bo} \cdot r_2 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_2) - \left[C_{in} \cdot \delta_{in_2}^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_2 \cdot \Gamma_{in} \right] \cdot \frac{\partial \rho_2}{\partial r_2} + \\ + C_{out} \cdot \delta_{out_2}^{3/2} + D_{out} \cdot \dot{r}_2 \cdot \Gamma_{out} = 0 \end{aligned} \quad (3.137)$$

En la dirección r_3 :

$$m_{bo}\ddot{r}_3 - m_{bo} \cdot r_3 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_3) - \left[C_{in} \cdot \delta_{in3}^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_3 \cdot \Gamma_{in} \right] \cdot \frac{\partial \rho_3}{\partial r_3} + \\ + C_{out} \cdot \delta_{out3}^{3/2} + D_{out} \cdot \dot{r}_3 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.138)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{in} &= 0 & \text{si} & \delta_{in} < 0 & ; & \Gamma_{in} = 1 & \text{si} & \delta_{in} \geq 0 \\ \Gamma_{out} &= 0 & \text{si} & \delta_{out} < 0 & ; & \Gamma_{out} = 1 & \text{si} & \delta_{out} \geq 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones diferenciales del movimiento. Rodamiento con 9 bolas

Para un rodamiento real con nueve bolas, el sistema de ecuaciones diferenciales viene dado por:

En la dirección x , se tiene:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{x}_{in} - \left[\sum_{i=1}^9 (C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{3/2} + D_{in} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{in}) \right] \cdot \frac{x_{in} - r_i \cos(\alpha_i)}{\rho_i} = \\ = F_{ex} + Fu \cos \alpha_{in} \quad i = 1, 2, \dots, 9 \quad (3.139)$$

$$\Gamma_{in} = 0 \quad \text{si} \quad \delta_{in} < 0 \quad ; \quad \Gamma_{in} = 1 \quad \text{si} \quad \delta_{in} \geq 0$$

En la dirección y , se tiene:

$$(m_{in} + m_{rotor}) (\ddot{y}_{in} + g) - \left[\sum_{i=1}^9 (C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{in}) \right] \cdot \frac{y_{in} - r_i \sin(\alpha_i)}{\rho_i} = \\ = F_{ex} + Fu \cos \alpha_{in} \quad i = 1, 2, \dots, 9 \quad (3.140)$$

$$\Gamma_{in} = 0 \quad \text{si} \quad \delta_{in} < 0 \quad ; \quad \Gamma_{in} = 1 \quad \text{si} \quad \delta_{in} \geq 0$$

En la dirección r_1 :

$$m_{bo}\ddot{r}_1 - m_{bo} \cdot r_1 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_1) - \left[C_{in} \cdot \delta_{in1}^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_1 \cdot \Gamma_{in} \right] \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial r_1} + \\ + C_{out} \cdot \delta_{out1}^{3/2} + D_{out} \cdot \dot{r}_1 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.141)$$

En la dirección r_2 :

$$m_{bo}\ddot{r}_2 - m_{bo} \cdot r_2 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_2) - \left[C_{in} \cdot \delta_{in2}^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_2 \cdot \Gamma_{in} \right] \cdot \frac{\partial \rho_2}{\partial r_2} + \\ + C_{out} \cdot \delta_{out2}^{3/2} + D_{out} \cdot \dot{r}_2 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.142)$$

En la dirección r_3 :

$$m_{bo}\ddot{r}_3 - m_{bo} \cdot r_3 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_3) - \left[C_{in} \cdot \delta_{in3}^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_3 \cdot \Gamma_{in} \right] \cdot \frac{\partial \rho_3}{\partial r_3} + \\ + C_{out} \cdot \delta_{out3}^{3/2} + D_{out} \cdot \dot{r}_3 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.143)$$

En la dirección r_4 :

$$m_{bo}\ddot{r}_4 - m_{bo} \cdot r_4 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_4) - \left[C_{in} \cdot \delta_{in4}^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_4 \cdot \Gamma_{in} \right] \cdot \frac{\partial \rho_4}{\partial r_4} + \\ + C_{out} \cdot \delta_{out4}^{3/2} + D_{out} \cdot \dot{r}_4 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.144)$$

En la dirección r_5 :

$$m_{bo}\ddot{r}_5 - m_{bo} \cdot r_5 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_5) - \left[C_{in} \cdot \delta_{in5}^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_5 \cdot \Gamma_{in} \right] \cdot \frac{\partial \rho_5}{\partial r_5} + \\ + C_{out} \cdot \delta_{out5}^{3/2} + D_{out} \cdot \dot{r}_5 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.145)$$

En la dirección r_6 :

$$m_{bo}\ddot{r}_6 - m_{bo} \cdot r_6 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_6) - \left[C_{in} \cdot \delta_{in6}^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_6 \cdot \Gamma_{in} \right] \cdot \frac{\partial \rho_6}{\partial r_6} + \\ + C_{out} \cdot \delta_{out6}^{3/2} + D_{out} \cdot \dot{r}_6 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.146)$$

En la dirección r_7 :

$$m_{bo}\ddot{r}_7 - m_{bo} \cdot r_7 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_7) - \left[C_{in} \cdot \delta_{in7}^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_7 \cdot \Gamma_{in} \right] \cdot \frac{\partial \rho_7}{\partial r_7} + \\ + C_{out} \cdot \delta_{out7}^{3/2} + D_{out} \cdot \dot{r}_7 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.147)$$

En la dirección r_8 :

$$m_{bo}\ddot{r}_8 - m_{bo} \cdot r_8 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_8) - \left[C_{in} \cdot \delta_{in8}^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_8 \cdot \Gamma_{in} \right] \cdot \frac{\partial \rho_8}{\partial r_8} + \\ + C_{out} \cdot \delta_{out8}^{3/2} + D_{out} \cdot \dot{r}_8 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.148)$$

En la dirección r_9 :

$$m_{bo}\ddot{r}_9 - m_{bo} \cdot r_9 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_9) - \left[C_{in} \cdot \delta_{in9}^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_9 \cdot \Gamma_{in} \right] \cdot \frac{\partial \rho_9}{\partial r_9} + \\ + C_{out} \cdot \delta_{out9}^{3/2} + D_{out} \cdot \dot{r}_9 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.149)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{in} &= 0 \quad \text{si} \quad \delta_{in} < 0 \quad ; \quad \Gamma_{in} = 1 \quad \text{si} \quad \delta_{in} \geq 0 \\ \Gamma_{out} &= 0 \quad \text{si} \quad \delta_{out} < 0 \quad ; \quad \Gamma_{out} = 1 \quad \text{si} \quad \delta_{out} \geq 0 \end{aligned}$$

3.5. INCORPORACIÓN DE DEFECTOS LOCALIZADOS

Se entiende por *defecto localizado* aquella anomalía presente en alguno de los elementos del rodamiento tal como grietas, picaduras, hoyuelos, etc. A la hora de construir un modelo, el defecto será simplemente la variación, repentina o progresiva, del radio de curvatura de la superficie del anillo que ejerce de pista de rodadura del elemento rodante. Esta variación del radio de curvatura podrá ser positiva o negativa dependiendo de la causa del defecto, ya que este puede ser una erosión en la pista de rodadura o una impureza interpuesta entre el elemento rodante y la pista de rodadura.

Los defectos que se van a generar en el modelo de rodamiento son los siguientes:

- Defecto en el anillo externo.
- Defecto en el anillo interno

El defecto en bola se descarta dada su aleatoriedad y por tanto, la imposibilidad de establecerlo matemáticamente sin necesidad de recurrir a complejas técnicas estadísticas.

Pretendemos modelar en primer lugar, un defecto sobre la pista de rodadura del anillo externo. El radio de curvatura de esta superficie sobre el plano medio del rodamiento perpendicular al eje del mismo, viene dado por el valor R_{out} . Este valor en ausencia de defectos es un valor constante que, en nuestro caso, para el rodamiento 6206, tiene un valor de 27'7535 mm. . El defecto más básico que podemos generar, es una variación repentina de esta valor R_{out} a otro valor que denominaremos R_{out_d} , entreteniéndose este valor durante un periodo de tiempo determinado para después volver a su valor inicial R_{out} , tal y como puede apreciarse en la Figura 3.21.

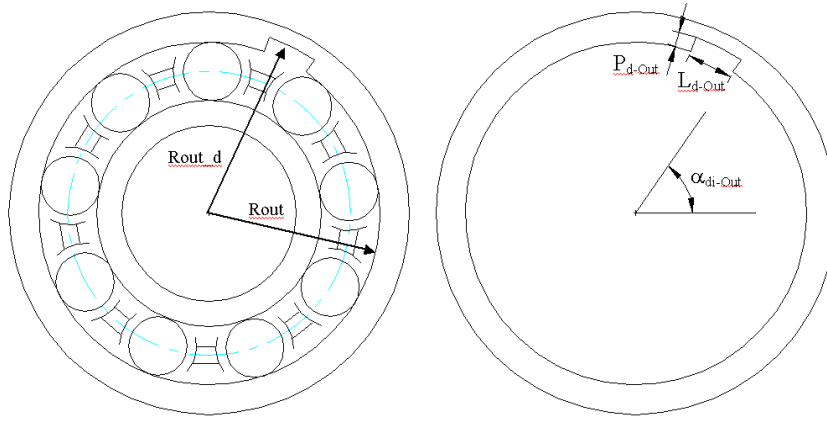


Figura 3.21 Defecto en anillo externo

Este defecto viene definido, según se aprecia en la Figura 3.21, por su posición angular α_{di_Out} , la profundidad del defecto P_{d_Out} y la longitud del arco sobre R_{out} que abarca el defecto que designaremos con L_{d_Out} .

Conocida la posición angular inicial α_{di_Out} y la longitud del defecto L_{d_Out} , podemos determinar la posición angular final del defecto α_{df_Out} , ecuación 3.150:

$$L_{d_Out} = R_{out} \cdot (\alpha_{df_Out} - \alpha_{di_Out})$$

$$\alpha_{df_Out} = \frac{L_{d_Out}}{R_{out}} + \alpha_{di_Out} \quad (3.150)$$

Cuando la posición angular una bola α_i se encuentra dentro de la zona de defecto se cumple que:

$$\cos(\alpha_{di_Out}) < \cos(\alpha_i) < \cos(\alpha_{df_Out}) \quad (3.151)$$

además, si el defecto se encuentra situado sobre el primer o segundo cuadrante, se cumple que $\text{sen}(\alpha_i) > 0$. Si el defecto se encuentra sobre el tercer o cuarto cuadrante, $\text{sen}(\alpha_i) < 0$.

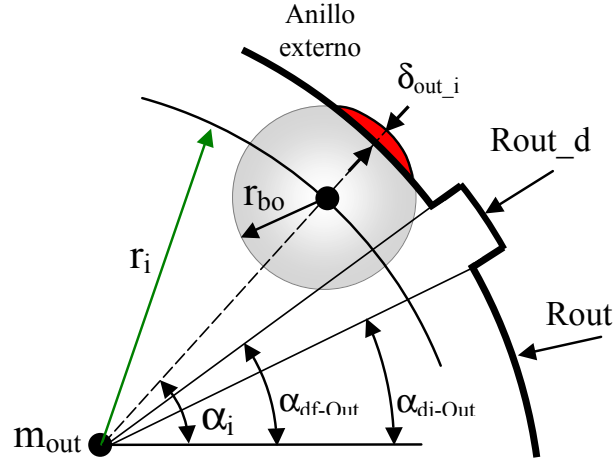


Figura 3.22 Defecto en anillo externo

Esta variación del radio de curvatura, R_{out} , se traduce en una variación de la deformación en el punto de contacto del elemento rodante con el anillo, δ_{out} , que a su vez modifica la fuerza de reacción entre los dos elementos. La condición no lineal de la deformación en el punto de contacto bola-anillo externo, viene dada ahora por la expresión:

- Bola sobre pista de rodadura del anillo externo:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Si } r_i + r_{bo} > R_{out} & \text{entonces, } \delta_{out_i} = r_i + r_{bo} - R_{out} \\ & \text{en otro caso, } \delta_{out_i} = 0 \end{array}} \quad (3.152)$$

- Bola sobre defecto en pista rodadura:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Si } r_i + r_{bo} > R_{out_d} & \text{entonces, } \delta_{out_i} = r_i + r_{bo} - R_{out_d} \\ & \text{en otro caso, } \delta_{out_i} = 0 \end{array}} \quad (3.153)$$

Hemos considerado en todo momento que el anillo externo es estacionario y que el anillo interno es el que gira a una velocidad angular ω_{in} . Para modelar un defecto en el anillo interno, no podemos definir un ángulo inicial como en el anillo externo, sino que tendremos que definir una posición angular inicial α_{di_in} .

Este ángulo irá variando con el tiempo según el incremento de la posición angular del anillo interno α_{in} , de modo que en todo instante, el valor de la posición inicial del defecto viene dada por $\alpha_{di_int} = \alpha_{in} + \alpha_{di_in}$.

Además de la posición inicial, el defecto sobre el anillo interno viene definido, según se aprecia en la Figura 3.23, por la profundidad del defecto P_{d_in} y la longitud del arco sobre r_{in} que abarca el defecto que designaremos con L_{d_in} .

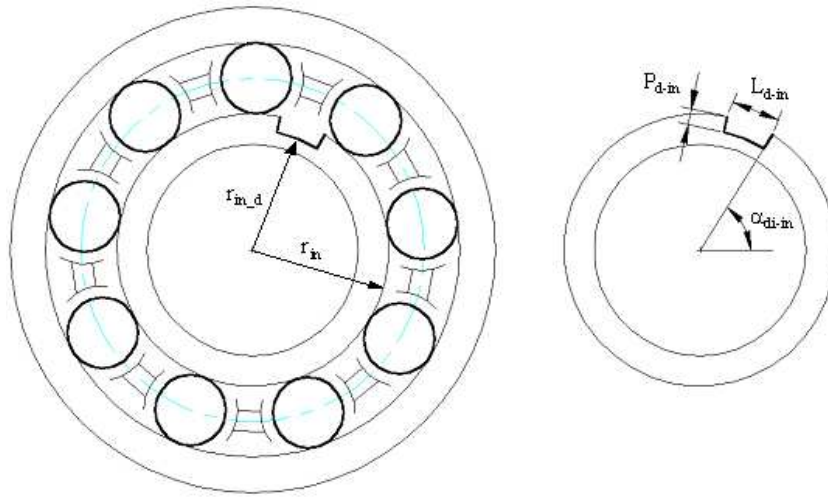


Figura 3.23 Defecto en anillo interno

Conocida la posición angular inicial del defecto en el instante 't', α_{di_int} y la longitud del defecto L_{d_in} , podemos determinar la posición angular final del defecto α_{df_in} .

$$\alpha_{df_in} = \frac{L_{d_in}}{r_{in}} + \alpha_{di_int}$$

Cuando la posición angular una bola α_i se encuentra dentro de la zona de defecto se cumple que:

$$\alpha_{di_int} < \alpha_i < \alpha_{df_in}$$

Mientras dura la permanencia de la bola dentro de la zona de defecto, el radio de curvatura que inicialmente tenía un valor r_{in} experimenta una variación y pasa a valer r_{in_d} . Tal variación se traduce en una variación de la deformación en el punto de contacto del elemento rodante con el anillo, δ_{in} . La condición no lineal de la deformación en el punto de contacto bola-anillo interno, viene dada ahora por la expresión:

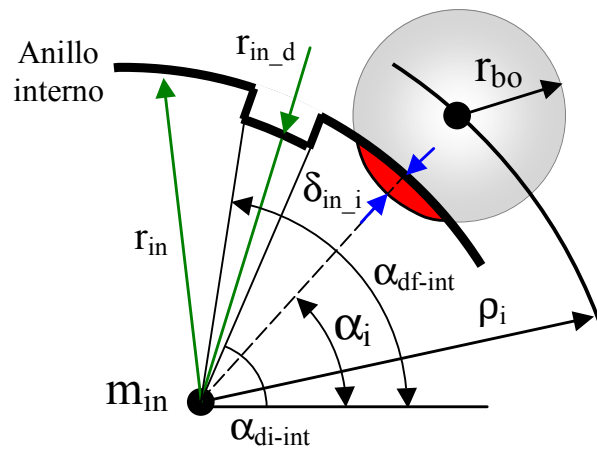


Figura 3.24 Defecto en anillo interno

- Bola sobre pista de rodadura del anillo interno:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Si } r_{in} + r_{bo} > \rho_i & \text{entonces, } \delta_{in_i} = r_{in} + r_{bo} - \rho_i \\ \text{en otro caso,} & \delta_{in_i} = 0 \end{array}} \quad (3.154)$$

- Bola sobre defecto en pista rodadura:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Si } r_{in_d} + r_{bo} > \rho_i & \text{entonces, } \delta_{in_i} = r_{in_d} + r_{bo} - \rho_i \\ \text{en otro caso,} & \delta_{in_i} = 0 \end{array}} \quad (3.155)$$

Capítulo 4

MODELO DE LA EVOLUCIÓN TÉRMICA DEL RODAMIENTO ORIGINADA POR EL PAR DE ROZAMIENTO

En esta sección se estudiará el comportamiento térmico del rodamiento. Se calculará el calor generado en el mismo debido al rozamiento y, posteriormente, la evolución de la temperatura mediante un modelo de elementos finitos.

4.1. MOMENTO RESISTENTE DEL RODAMIENTO

Cuando los rodamientos se encuentran en funcionamiento, se genera internamente calor que es disipado hacia los elementos que se encuentran en contacto con los mismos, como ejes o carcasa, hacia el fluido lubricante y hacia el ambiente. La fricción así como otras causas, representan una pérdida de potencia que se manifiesta en forma de calor. Este calor debe ser evacuado para mantener una temperatura de funcionamiento satisfactoria en el rodamiento.

La potencia perdida por fricción en un rodamiento viene dada por la ecuación 4.1 [112].

$$\dot{q} = 1,047 \cdot 10^{-4} \cdot n \cdot M_r \quad (4.1)$$

Donde:

- \dot{q} , es la potencia, en watios.
- n , es la velocidad de giro del rodamiento, en *revoluciones por minuto*.
- M_r , es el momento resistente debido a la fricción, en *Newton · mm*.

Una vez calculada la potencia disipada en forma de calor, es posible determinar la temperatura en los elementos del rodamiento y elementos adyacentes. Tal y como se muestra en este capítulo, para un determinado régimen de giro, se puede obtener la potencia perdida

cuando se haya calculado el par resistente que presenta el rodamiento en las condiciones de funcionamiento impuestas.

4.1.1. Cálculo del momento resistente del rodamiento. Método simplificado SKF

El rodamiento objeto de estudio es un rodamiento rígido de bolas, de una hilera, de la firma SKF, cuyo código es 6206 . Las principales características del mismo se muestran en la Tabla 4.1:

Diámetro externo del rodamiento, mm.	D	62
diámetro del agujero del rodamiento, mm.	d	30
Anchura del rodamiento, mm.	B	16
Radio de las bolas, mm.	r_b	4,75
radio curvatura de la pista de rodadura del anillo interno plano xz, mm.	r_{in}	36,493/2
Radio curvatura de la pista de rodadura del anillo externo plano xz, mm.	R_{out}	55,507/2
Diámetro medio, mm.	dm	46
radio curvatura de la pista de rodadura del anillo interno plano yz, mm.	ri	4,935
Radio curvatura de la pista de rodadura del anillo externo plano yz, mm.	ro	4,935
Capacidad de carga dinámica, N.	C	15000
Capacidad de carga estática, N.	$C_o = C_s$	10000

Tabla 4.1 Características rodamiento 6206

El momento de rozamiento de un rodamiento depende de muchos factores tales como carga, velocidad de giro, tipo constructivo de rodamiento, propiedades del lubricante, tipo de jaula y el rozamiento de las tapas de obturación cuando este las lleve. Debido al gran número de factores que influyen, se establece que el momento de rozamiento para condiciones de funcionamiento normales, una carga del 10 % de la capacidad dinámica del rodamiento y lubricación adecuada, puede calcularse con suficiente aproximación mediante la ecuación 4.2 que aporta el fabricante de rodamientos en sus catálogos.

$$Mr = \frac{\mu \cdot F \cdot d}{2} \quad (4.2)$$

Donde:

- Mr es el par resistente, en N·mm
- μ es el coeficiente de rozamiento según Tabla 4.2
- F es la carga aplicada sobre el rodamiento, en N
- d es el diámetro del agujero del rodamiento, en mm.

TIPO DE RODAMIENTO	μ
Rodamientos rígidos de bolas	0.0015
Rodamientos de bolas a rótula	0.0010
Rodamientos de bolas concontacto angular de una hileras	0.0020
Rodamientos de bolas concontacto angular de dos hileras	0.0024
Rodamientos de rodillos cilíndricos	0.0011
Rodamientos de agujas	0.0025
Rodamientos de rodillos a rotula	0.0018
Rodamientos de rodillos cónicos	0.0018
Rodamientos axiales de bolas	0.0013
Rodamientos axiales de rodillos cilíndricos	0.0040
Rodamientos axiales de agujas	0.0040
Rodamientos axiales de rodillos a rotula	0.0018

Tabla 4.2 Coeficiente de rozamiento

4.1.2. Cálculo del momento resistente del rodamiento. Método ajustado SKF

Para cálculos más precisos y para condiciones de funcionamiento distintas a las indicadas, el par de rozamiento total del rodamiento se obtiene sumando el par de rozamiento M_0 , el cual es independiente de la carga aplicada sobre el rodamiento, y el par M_1 que depende de esa carga aplicada, según muestra la ecuación 4.3.

$$Mr = M_0 + M_1 \quad (4.3)$$

Cálculo de M_0 . El par M_0 , (independiente de la carga aplicada sobre el rodamiento), es el predominante en el caso de rodamientos funcionando a gran velocidad y poco cargados, y proviene fundamentalmente de las pérdidas hidrodinámicas en el lubricante. Depende de la cantidad de lubricante, de su viscosidad y de la velocidad de rotación del rodamiento. M_0 se obtiene de la ecuación 4.4.

$$M_0 = 10^{-7} \cdot f_0 \cdot (\nu \cdot n)^{2/3} \cdot \left(\frac{d + D}{2} \right)^3 \quad (4.4)$$

Donde:

- M_0 es el par resistente, en N·mm
- f_0 es un coeficiente que depende del tipo de rodamiento y de su lubricación.
- ν es la viscosidad cinemática del lubricante, en mm^2/s
- n es la velocidad de rotación del rodamiento, en *r.p.m.*
- d es el diámetro del agujero del rodamiento, en *mm*.
- D es el diámetro externo del rodamiento, en *mm*.

La ecuación 4.4 es válida para valores $\nu \cdot n \geq 2000$. Cuando se verifica que $\nu \cdot n < 2000$, debe usarse para calcular el valor de M_0 la ecuación 4.5.

$$M_0 = 160 \cdot 10^{-7} \cdot f_0 \cdot \left(\frac{d + D}{2} \right)^3 \quad (4.5)$$

Calculo de M_1 . El par M_1 , (depende de la carga aplicada sobre el rodamiento), es el predominante para bajas velocidades y proviene de las deformaciones elásticas y del deslizamiento parcial que se produce en las superficies de contacto de los elementos rodantes con las pistas de rodadura. El valor de M_1 , se obtiene de la ecuación 4.6.

$$M_1 = f_{11} \cdot g_1 \cdot P_0 \cdot \left(\frac{d + D}{2} \right) \quad (4.6)$$

Donde:

- M_1 es el par resistente, en N·mm
- f_{11} es un coeficiente que depende del tipo de rodamiento y de la carga aplicada sobre el mismo, según Tabla 4.3
- g_1 es un coeficiente que depende de la dirección de la carga, según Tabla 4.4
- d es el diámetro interno del rodamiento, en mm.
- D es el diámetro externo del rodamiento, en mm.
- P_0 es la carga estática equivalente aplicada al rodamiento, en N
- F_r es la carga radial aplicada al rodamiento, en N.
- F_a es la carga axial aplicada al rodamiento, en N.
- C_0 es la capacidad de carga estática del rodamiento, en N según catálogo.
- X es el factor de carga radial, adimensional.
- Y es el factor de carga axial, adimensional.

4.1.3. Método generalizado según Palmgren

Palmgren determinó empíricamente una expresión para evaluar el par de rozamiento teniendo en cuenta únicamente el tipo de rodamiento y la carga aplicada al mismo. Esta expresión, para rodamientos de bolas, viene dada por la ecuación 4.7.

$$Mr = f_1 \cdot F_\beta \cdot dm \quad (4.7)$$

Donde:

TIPO DE RODAMIENTO	f_{11}
Rodamientos rígidos de bolas	$0,0009 \cdot \left(\frac{P_0}{C_0}\right)^{0,55}$
Rodamientos de bolas a rotula	$0,0003 \cdot \left(\frac{P_0}{C_0}\right)^{0,4}$
Rodamientos de bolas contacto angular de una hilera	$0,0013 \cdot \left(\frac{P_0}{C_0}\right)^{0,33}$
Rodamientos de bolas contacto angular de dos hileras	$0,001 \cdot \left(\frac{P_0}{C_0}\right)^{0,33}$
Rodamientos de rodillos cilíndricos	0,00025 a 0,0003
Rodamientos de agujas	0,00025 a 0,0003
Rodamientos de rodillos a rotula	0,0004 a 0,0005
Rodamientos de rodillos conicos	0,0004 a 0,0005
Rodamientos axiales de bolas	$0,0012 \cdot \left(\frac{P_0}{C_0}\right)^{0,33}$
Rodamientos axiales de rodillos cilíndricos	0,0018
Rodamientos axiales de agujas	0,0018
Rodamientos axiales de rodillos a rótula	0,0005 a 0,0006

Tabla 4.3 Factor f_{11}

- f_1 es un factor que depende del tipo de rodamiento y de la carga aplicada sobre el mismo. Para rodamientos de bolas, este factor viene dado por la ecuación 4.8:

$$f_1 = z \cdot \left(\frac{F_s}{C_s}\right)^\gamma \quad (4.8)$$

- Los valores de z y γ , pueden obtenerse de la Tabla 4.5:
- F_s es la carga estática equivalente aplicada al rodamiento, su valor viene dado por la ecuación 4.9.

$$F_s = X_s \cdot Fr + Y_s \cdot Fa \quad (4.9)$$

En la Tabla 4.6 se muestran los valores de X_s e Y_s para rodamientos de bolas con una sola hilera.

Para rodamientos de bolas radiales, el elemento rodante más cargado, tendrá una carga máxima $Q_{\text{máx}}$ que viene dada por [112] la ecuación 4.10:

$$Q_{\text{máx}} = \frac{5 \cdot Fr}{i \cdot Z \cdot \cos(\alpha)} \quad (4.10)$$

Donde:

- Fr es la carga radial, en este caso $Fr = C_s$
- i es el número de hileras de bolas en el rodamiento
- Z es el número de elementos rodantes
- α es el ángulo de contacto

Haciendo $Fr = C_s$ y despejando C_s en la ecuación 4.10 queda:

$$C_s = 0,2 \cdot i \cdot Z \cdot Q_{\text{máx}} \cdot \cos(\alpha) \quad (4.11)$$

TIPO DE RODAMIENTO	g_1
Rodamientos rígidos de bolas	$(2 \text{ a } 3) \cdot Fa - 0,1 \cdot Fr$
Rodamientos de bolas a rótula	$1,4 \cdot Y \cdot Fa - 0,1 \cdot Fr$
Rodamientos de bolas contacto angular de una hilera	$Fa - 0,1 \cdot Fr$
Rodamientos de bolas contacto angular de dos hileras	$1,4 \cdot Fa - 0,1 \cdot Fr$
Rodamientos de rodillos cilíndricos	Fr (si $Fa=0$)
Rodamientos de agujas	Fr (si $Fa=0$)
Rodamientos de rodillos a rótula	$1,2 \cdot Y \cdot Fa$
Rodamientos de rodillos cónicos	$2 \cdot Y \cdot Fa$
Rodamientos axiales de bolas	Fa
Rodamientos axiales de rodillos cilíndricos	Fa
Rodamientos axiales de agujas	Fa
Rodamientos axiales de rodillos a rótula	Fa (si $Fr_{\text{máx}} \leq 0,55 \cdot Fa$)

Tabla 4.4 Factor g_1

TIPO DE RODAMIENTO	ÁNGULO DE CONTACTO	z	γ
Rígido de bolas	0°	$0,006 - 0,004$	$0,55$
Contacto angular	$30^\circ - 40^\circ$	$0,001$	$0,55$
Axial	90°	$0,0008$	$0,33$
Doble fila autoalineante	10°	$0,003$	$0,40$

Tabla 4.5 Factores z y γ

Por otro lado, para un área de contacto elíptica, el esfuerzo máximo se da en el centro geométrico, como se vio en la Figura 3.11 y viene dado por la ecuación 3.63. El esfuerzo máximo en la zona de contacto elíptica vale (ecuación 3.63):

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{3 \cdot Q_{\text{máx}}}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot b} \quad (4.12)$$

Particularizando para el contacto bola-anillo interno, tenemos que:

$$a = 0,0236 \cdot a_i^* \cdot \left(\frac{Q_{\text{máx}}}{\sum \rho_i}\right)^{1/3} ; \quad b = 0,0236 \cdot b_i^* \cdot \left(\frac{Q_{\text{máx}}}{\sum \rho_i}\right)^{1/3} \quad (4.13)$$

Sustituyendo las expresiones 4.13 en la ecuación 4.12, teniendo en cuenta que la tensión máxima permitida en el material que están fabricados los rodamientos es, generalmente, de $\sigma_{\text{máx}} = 4200 \text{ N/mm}^2$, queda:

$$4200 = \frac{3 \cdot Q_{\text{máx}}}{2 \cdot \pi \cdot 0,0236 \cdot a_i^* \cdot \left(\frac{Q_{\text{máx}}}{\sum \rho_i}\right)^{1/3} \cdot 0,0236 \cdot b_i^* \cdot \left(\frac{Q_{\text{máx}}}{\sum \rho_i}\right)^{1/3}} \quad (4.14)$$

Reduciendo y elevando al cubo para poder despejar el valor de $Q_{\text{máx}}$ tenemos:

$$\frac{4200^3 \cdot 2^3 \cdot \pi^3 \cdot (0,0236^2)^3}{3^3} = \frac{Q_{\text{máx}}^3}{a_i^{*3} \cdot b_i^{*3} \cdot \left(\left(\frac{Q_{\text{máx}}}{\sum \rho_i}\right)^{2/3}\right)^3} \quad (4.15)$$

TIPO DE RODAMIENTO	X_s	Y_s
Rígido de bolas	0.6	0.5
Contacto angular		
$\alpha = 15^\circ$	0.5	0.47
$\alpha = 20^\circ$	0.5	0.42
$\alpha = 25^\circ$	0.5	0.38
$\alpha = 25^\circ$	0.5	0.33
$\alpha = 25^\circ$	0.5	0.29
$\alpha = 25^\circ$	0.5	0.26
Autoalineantes	0.5	$0.22 \cdot \text{ctg}(\alpha)$

Tabla 4.6 Factores X_s ; Y_s

Despejando $Q_{\text{máx}}$

$$Q_{\text{máx}} = \frac{117,59 \cdot a_i^{*3} \cdot b_i^{*3}}{\sum \rho_i^2} \quad (4.16)$$

Sustituyendo $Q_{\text{máx}}$ en la ecuación 4.11 queda:

$$C_s = 0,2 \cdot i \cdot Z \cdot \frac{117,59 \cdot a_i^{*3} \cdot b_i^{*3}}{\sum \rho_i^2} \cdot \cos(\alpha) \quad (4.17)$$

Si además tenemos en cuenta que $\sum \rho_i = \frac{1}{D} \cdot \left(4 - \frac{1}{f_i} + \frac{2\gamma}{1-\gamma}\right)$, queda finalmente:

$$C_s = \frac{23,5 \cdot i \cdot Z \cdot D^2 \cdot a_i^{*3} \cdot b_i^{*3} \cdot \cos(\alpha)}{\left[4 - \frac{1}{f_i} + \left(\frac{2\gamma}{1-\gamma}\right)\right]^2} \quad (4.18)$$

Si el esfuerzo máximo ocurre en la pista externa, operando de forma análoga llegamos a la expresión:

$$C_s = \frac{23,5 \cdot i \cdot Z \cdot D^2 \cdot a_o^{*3} \cdot b_o^{*3} \cdot \cos(\alpha)}{\left[4 - \frac{1}{f_o} - \left(\frac{2\gamma}{1+\gamma}\right)\right]^2} \quad (4.19)$$

- C_o es la capacidad estática del rodamiento. Esta se define como la carga que aplicada al rodamiento estacionario, produce una deformación permanente total, δ_s del elemento rodante y del camino de rodadura, en el punto de contacto más cargado, igual a 0,0001 del diámetro del elemento rodante d_{bo} , esto es $\delta_s/d_{bo} = 0,0001$. Cuando se produce esta deformación en rodamientos de bolas, el esfuerzo máximo en el punto de contacto es de $\sigma_{\text{máx}} = 4200 \text{ N/mm}^2$.
- d_m es el diámetro medio del rodamiento.
- F_β es un factor, con dimensión de fuerza, que depende de la dirección y de la magnitud de la carga aplicada:

1. Para rodamientos de bolas cargados radial y axialmente, F_β es el mayor de los valores:

$$F_{\beta} = \begin{cases} 0,9 \cdot Fa \cdot \text{ctg}(\alpha) - 0,1 \cdot Fr \\ \text{ó} \\ Fr \end{cases} \quad (4.20)$$

2. Si el ángulo de contacto α es de cero grados, F_{β} viene dado por la ecuación 4.21:

$$F_{\beta} = 3 \cdot Fa - 0,1 \cdot Fr \quad (4.21)$$

4.1.4. Cálculo numérico del par de rozamiento

Una vez realizada la descripción teórica de los distintos métodos para determinar el par de rozamiento en el rodamiento, se efectuarán los cálculos atendiendo a los datos particulares del rodamiento seleccionado.

1.- Método simplificado SKF

El par de rozamiento en un rodamiento puede ser calculado con suficiente aproximación mediante la ecuación 4.2 :

$$Mr = \frac{\mu \cdot F \cdot d}{2}$$

- El coeficiente de rozamiento μ según la Tabla 4.2 para rodamientos rígidos de bolas es de 0.0015
- F es la carga aplicada sobre el rodamiento, en N. Como no se tiene carga axial, se designará la carga aplicada mediante Fr .
- El diámetro del agujero del rodamiento 6206 es de 30 mm.

Atendiendo a los datos expuestos, el par de rozamiento viene dado por:

$$Mr \text{ (N} \cdot \text{mm)} = \frac{0,0015 \cdot 30}{2} \cdot Fr = 0,0225 \cdot Fr \text{ (N)} \quad (4.22)$$

2.- Método Ajustado SKF

Si no se consideran las contribuciones al rozamiento del lubricante, $Mo = 0$, por tanto, la ecuación 4.3 queda reducida a $M_T = M_1$.

$$Mr = M_1 = f_1 \cdot g_1 \cdot P_0 \cdot \left(\frac{d + D}{2} \right) \quad (4.23)$$

- f_1 es un coeficiente que depende del tipo de rodamiento y de la carga aplicada sobre el mismo, según la Tabla 4.3. Para un rodamiento rígido de bolas:

$$f_1 = 0,0009 \cdot \left(\frac{P_0}{C_0} \right)^{0,55}$$

- P_0 es la carga estática equivalente, en N. . Como el rodamiento soporta únicamente carga radial, podemos suponer que $P_0 = Fr$.
- Co es la capacidad de carga estática. Este valor viene tabulado en el catálogo del fabricante de rodamientos. Para un rodamiento SKF 6206, $Co = 10000N$.

$$f_1 = 0,0009 \cdot \left(\frac{Fr}{10000} \right)^{0,55} = 5,6786 \cdot 10^{-6} \cdot Fr^{0,55} \quad (4.24)$$

- El valor $g_1 \cdot P_0$ depende del valor de la carga y la dirección en que se aplica la carga. Para rodamiento rígido de bolas:

$$g_1 \cdot P_0 = 3 \cdot Fa - 0,1 \cdot Fr \quad (4.25)$$

Como $Fa = 0$, queda que $g_1 \cdot P_0 = -0,1 \cdot Fr$. Puesto que el valor obtenido es menor que Fr , hay que tomar:

$$g_1 \cdot P_0 = Fr \quad (4.26)$$

Sustituyendo los valores obtenidos en las ecuaciones 4.24 y 4.26 en la ecuación 4.6 , resulta:

$$Mr = 5,6786 \cdot 10^{-6} \cdot Fr^{0,55} \cdot Fr^{0,55} \cdot Fr \cdot \left(\frac{30 + 62}{2} \right) = 2,612 \cdot 10^{-4} \cdot Fr^{1,55} \quad (4.27)$$

3.- Método Palmgren (3 bolas)

Para este método, se calcula el valor del par de rozamiento utilizando el método Palmgren mediante la ecuación 4.7, particularizado para 3 bolas.

$$Mr = f_1 \cdot F_\beta \cdot dm$$

- Para rodamiento rígidos de bolas, $z = 0,004$ y $\gamma = 0,55$. Como $Fa = 0$, $F_s = Fr$.

$$f_1 = 0,004 \cdot \left(\frac{Fr}{C_s} \right)^{0,55} = 0,004 \cdot \left(\frac{Fr}{3715,6} \right)^{0,55} = 4,35 \cdot 10^{-5} \cdot Fr^{0,55}$$

- Como el esfuerzo máximo se encuentra en el contacto bola-anillo interno,

$$C_s = \frac{23,5 \cdot i \cdot Z \cdot D^2 \cdot a_i^{*3} \cdot b_i^{*3} \cdot \cos(\alpha)}{\left[4 - \frac{1}{f_i} + \left(\frac{2\gamma}{1-\gamma} \right) \right]^2} \quad (4.28)$$

$$C_s = \frac{23,5 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 9,5^2 \cdot 3,85^3 \cdot 0,41^3 \cdot \cos(0^\circ)}{\left[4 - \frac{1}{0,5194} + \left(\frac{2 \cdot 0,2065}{1-0,2065} \right) \right]^2} = 3715,6 \quad (4.29)$$

- Como $Fa = 0$, $F_\beta = Fr$

Conocidos todos los datos, el valor del par de rozamiento viene dado por:

$$Mr = 4,35 \cdot 10^{-5} \cdot F_r^{0,55} \cdot F_r \cdot 46 = 0,002 \cdot F_r^{1,55} \quad (4.30)$$

3.- Método Palmgren (9 bolas)

Por último, se calcula, como anteriormente, el valor del par de rozamiento utilizando el método Palmgren particularizado para 9 bolas.

- Para rodamiento rígidos de bolas, $z = 0,004$ y $\gamma = 0,55$. Como $Fa = 0$, $F_s = Fr$.

$$f_1 = 2,37 \cdot 10^{-5} \cdot F_r^{0,55}$$

- Como el esfuerzo máximo se encuentra en el contacto bola-anillo interno,

$$C_s = \frac{23,5 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 9,5^2 \cdot 3,85^3 \cdot 0,41^3 \cdot \cos(0^\circ)}{\left[4 - \frac{1}{0,5194} + \left(\frac{2 \cdot 0,2065}{1 - 0,2065}\right)\right]^2} = 11147 \quad (4.31)$$

- Como $Fa = 0$, $F_\beta = Fr$

Conocidos todos los datos, el valor del par de rozamiento viene dado por:

$$Mr = 2,37 \cdot 10^{-5} \cdot F_r^{0,55} \cdot F_r \cdot 46 = 0,0011 \cdot F_r^{1,55} \quad (4.32)$$

Una vez establecida la evolución del par de rozamiento según los cuatro métodos, se calcula el valor del par resistente para varios valores de carga radial. En las Figuras 4.1 y 4.2 se muestran los valores de la Tabla 4.7 en forma gráfica.

	<i>SKF</i>		<i>Palmgren</i>	
	Simplificado	Ajustado	3 bolas	9 bolas
$Fr(N)$	$0,0225 \cdot Fr$	$0,00026 \cdot Fr^{1,55}$	$0,002 \cdot Fr^{1,55}$	$0,0011 \cdot Fr^{1,55}$
10	0,23	0,01	0,07	0,04
100	2,25	0,33	2,52	1,38
250	5,63	1,35	10,42	5,73
500	11,25	3,97	30,51	16,78
750	16,88	7,44	57,20	31,46
1000	22,50	11,61	89,34	49,14
2500	56,25	48,06	369,69	203,33
5000	112,50	140,73	1082,51	595,38
7500	168,75	263,83	2029,43	1116,19
10000	225,00	412,07	3169,79	1743,38

Tabla 4.7 Valores del par resistente según la Fr (radial) aplicada

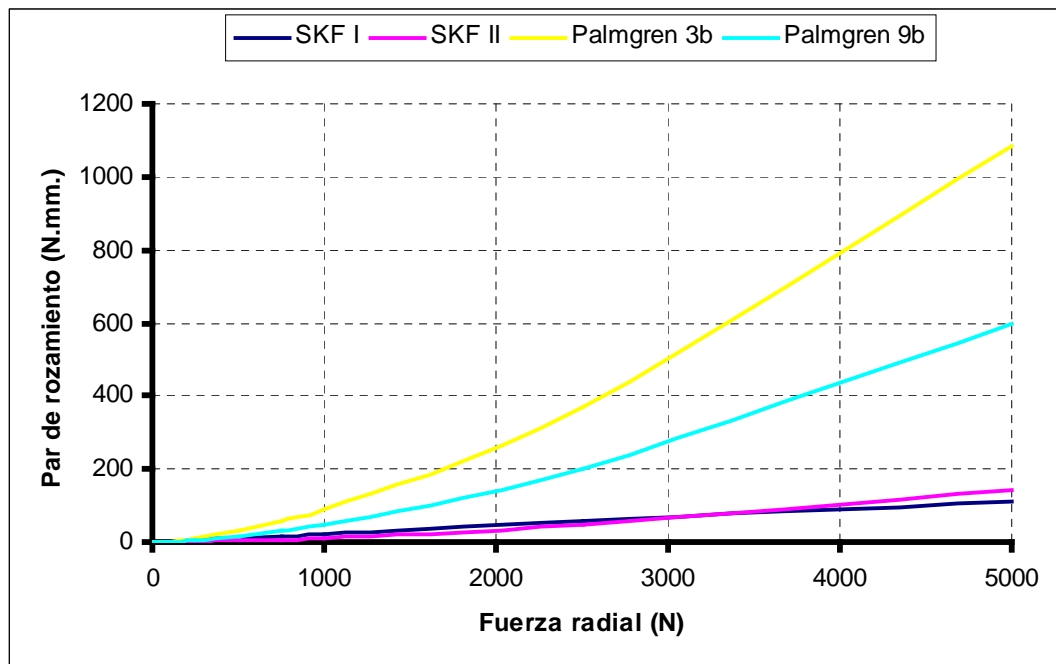


Figura 4.1 Valores del par resistente según la fuerza radial (0-5000 N.)

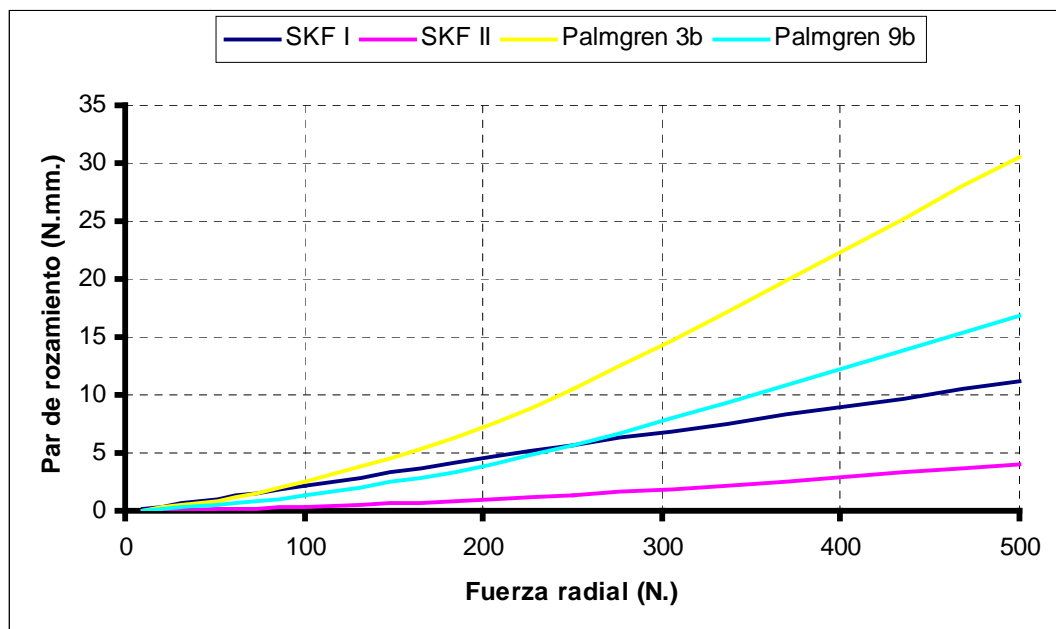


Figura 4.2 Valores del par resistente según la fuerza radial (0-500 N.)

4.2. DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN EL RODAMIENTO

Existen tres formas de transmisión de calor entre masas que se encuentran a distinta temperatura. Estas son:

- La conducción de calor entre cuerpos sólidos (sin movimiento macroscópico).
- El mecanismo de convección de calor desde un cuerpo sólido a un fluido en reposo o en movimiento (con existencia de movimiento macroscópico de materia).
- Radiación de calor entre masas o transferencia de calor entre superficies sin necesidad de la presencia de un medio material entre ambas.

4.2.1. Conducción

La conducción del calor es la difusión de la energía por diferencia de temperatura y la única forma de transmisión presente entre sólidos no transparentes a la radiación térmica. Es un fenómeno que tiene lugar entre moléculas vecinas que requiere un gradiente de temperatura como causa motriz. Fourier publicó, en 1822, una expresión cuantitativa que relaciona la transferencia de calor con la temperatura, la geometría y la naturaleza del medio conductor. Para un sistema, en una sola dimensión, como la temperatura T puede variar en el espacio x y en el tiempo t , esta expresión es:

$$\dot{q}_x = -k \cdot A(x) \cdot \frac{\partial T(t, x)}{\partial x} \quad (4.33)$$

Donde:

- \dot{q}_x , es la potencia calorífica en la dirección del eje x , en *Wattios*.
- k , es la conductividad térmica del material, tomándose en general de forma práctica como constante, en $W/K \cdot m$. En realidad, puede presentar cierta dependencia con la temperatura del mismo. En esos casos se toma el valor medio dentro del campo de temperaturas en el que se desarrolla la aplicación. Los valores de dicha variable pueden ser muy diferentes, desde aislantes con conductividades del orden de varias centésimas (0,04 W/m K para Lana de vidrio; 0,024 para Poliuretano tipo II; 0,029 para Poliestireno tipo V) a metales puros con valores del orden de varias decenas (40 W/m K para el acero, 100 W/m K para el cobre). Esta variación tan grande hace que la resistencia térmica al paso de calor de materiales con mucha conductividad (metales) sea en la práctica despreciable [132].
- A , es el área normal a la dirección del flujo de calor, en m^2 .
- $\partial T/\partial x$, es el gradiente de temperatura en la dirección x , en K/m .

La relación \dot{q}_x/A se denomina flujo de calor y tiene unidades de W/m^2 . De forma general, el flujo de calor se expresa como un vector y viene dado por la ecuación 4.34:

$$\frac{\vec{q}}{A} = -k(T) \cdot \nabla T(\vec{r}, t) \quad (4.34)$$

Donde:

- k , es el tensor conductividad.
- ∇T , es el vector gradiente de temperatura.

En el caso más general, la temperatura es función de la posición y del tiempo. Cuando el campo de temperaturas es independiente del tiempo, se está ante un caso estacionario o régimen permanente. El signo negativo de las ecuaciones (4.33) y (4.34) indica que el flujo de calor por conducción tiene sentido contrario al del gradiente de temperatura, de acuerdo con la 2ª ley de la Termodinámica.

Para calcular el flujo de calor en régimen permanente, a través de una superficie plana, como muestra la Figura 4.3, se integra la ecuación de Fourier. Como el régimen es estacionario, la temperatura no depende del tiempo, con lo que la derivada de la temperatura respecto a x ya no será una derivada parcial.

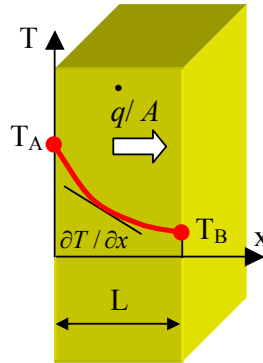


Figura 4.3 Flujo de calor a través de una superficie plana

$$\frac{\dot{q}}{A} = -k \cdot \frac{dT}{dx} \quad (4.35)$$

Si se supone además, que la conductividad térmica es constante, se puede integrar quedando:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{q}}{A} \cdot \int_{x=0}^{x=L} dx &= -k \int_{T=T_A}^{T=T_B} dT \\ \frac{\dot{q} \cdot L}{A} &= -k \cdot (T_B - T_A) = k \cdot (T_A - T_B) \end{aligned} \quad (4.36)$$

La potencia calorífica perdida por conducción en una superficie plana, viene dada por la ecuación 4.37:

$$\dot{q} = \frac{k \cdot A}{L} \cdot (T_A - T_B) \quad (4.37)$$

Cuando la estructura es cilíndrica, no se debe utilizar la ecuación 4.37 deducida para la pared plana.

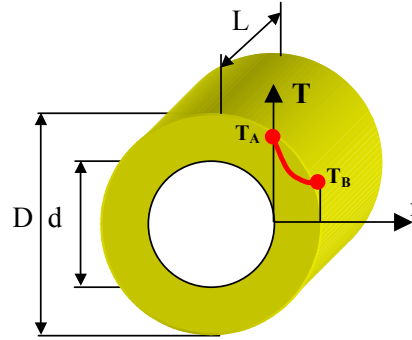


Figura 4.4 Flujo de calor a través de una superficie cilíndrica

En una superficie cilíndrica como muestra la Figura 4.4. Se considera en principio, una longitud suficientemente larga como para poder suponer que el calor se conduce prácticamente de forma radial, por lo que la ecuación de Fourier, para estado estacionario y conductividad térmica constante, queda en la forma:

$$\frac{\dot{q}}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \int_{D=d}^{D=D} \frac{dD}{D} = -k \int_{T=T_A}^{T=T_B} dT$$

Teniendo en cuenta que $A = \pi \cdot D \cdot L$ y que $r = D/2$, sustituyendo en la ecuación (4.35), queda:

$$\frac{\dot{q}}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \ln \left(\frac{D}{d} \right) = -k \cdot (T_B - T_A) = k \cdot (T_A - T_B) \quad (4.38)$$

La potencia calorífica perdida por conducción en una superficie cilíndrica, viene dada por la ecuación 4.39:

$$\dot{q} = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot k}{\ln \left(\frac{D}{d} \right)} \cdot (T_A - T_B) \quad (4.39)$$

4.2.2. Convención

Es la forma de transmisión del calor característica de las interfases sólido-fluido y también líquido-gas. Es un fenómeno muy complejo como consecuencia de la conducción a través de la

película de fluido adherida a la superficie del sólido. En 1710 Isaac Newton estudió la relación entre la temperatura de un sólido caliente y la del aire que lo rodeaba, para la transferencia superficial del calor. Aunque la formuló posteriormente Fourier, es conocida como ley de enfriamiento de Newton, y viene dada por la ecuación 4.40:

$$\dot{q} = h_v \cdot A \cdot (T_{superficie} - T_{fluido}) \quad (4.40)$$

Donde:

- \dot{q} , es la potencia calorífica transferida superficialmente por el sólido a través del fluido, en *Wattios*.
- h_v , es el coeficiente superficial de transferencia de calor o coeficiente de película, en $W/K \cdot m^2$
- A , es el área normal a la dirección del flujo de calor, en m^2 .

El coeficiente de convección presenta gran variación, según el tipo de fluido y la cantidad de movimiento que este presente, así como de su estado e incluso del mismo gradiente de temperaturas (pared-fluido). Respecto al movimiento se debe diferenciar entre:

- Movimiento forzado o provocado por un elemento externo (bomba, ventilador) o por el ambiente (viento).
- Movimiento natural, debido a la diferencia de temperaturas dentro del fluido que, a su vez, provoca diferencia de densidades y, por tanto, desplazamiento del mismo.

Respecto a su estado, cabe diferenciar el caso de gases, líquidos o fluidos que en las condiciones de trabajo presenten cambios de fases.

Como órdenes de magnitud se pueden señalar:

- Caso de gases:
 1. Con movimiento natural del orden de varias unidades ($1-10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$).
 2. Con movimiento forzado del orden de varias decenas ($10-100 \text{ W/m}^2 \text{ K}$)
- Caso de líquidos:
 1. Con movimiento natural del orden de algunas centenas ($100 \text{ W/m}^2 \text{ K}$).
 2. Con movimiento forzado del orden de algunos millares ($1000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$).
- Caso de fluidos en cambio de fase, del orden de algunos millares ($1000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$)

Esta gran variedad de coeficientes de convección hace que el comportamiento al paso de calor, en el caso de gases, sea muy diferente con respecto a los demás. En otras palabras, la resistencia térmica que ofrece un líquido o un fluido en cambio de fase es despreciable frente a la que ofrece un gas.

[112] propone que, en aire estacionario, se puede determinar el coeficiente superficial de transferencia para el rodamiento utilizando la ecuación 4.41:

$$h_v = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot (T_{superficie} - T_{fluido})^{0,25} \quad (4.41)$$

Sustituyendo el valor del coeficiente superficial de transferencia de la ecuación (4.41) en la ecuación (4.40) queda, finalmente:

$$\dot{q} = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot A \cdot (T_{superficie} - T_{fluido})^{1,25} \quad (4.42)$$

4.2.3. Radiación

Se denomina radiación térmica a la radiación debida únicamente a la temperatura de la materia y se asocia a las vibraciones moleculares del cuerpo aunque también puede incluir cambios de los niveles de energía de los electrones. La materia siempre absorbe energía radiante y, a temperatura diferente del cero absoluto, también emite energía en forma de radiación. La transferencia de energía por radiación es la única que no necesita un medio para propagarse y, en el vacío, se efectúa en línea recta.

Las características básicas de la radiación térmica, además de la propagación rectilínea, independiente del movimiento del aire, son la reflexión y la absorción según el origen de la radiación, la naturaleza de la superficie y el contenido energético según la frecuencia (color). Dichas características fueron descubiertas por el químico sueco Carl Wilhelm [132].

Para el estudio fenomenológico de este proceso, se parte de un modelo ideal llamado cuerpo negro, que no refleja calor, solamente emite y absorbe y cuya superficie se comporta de igual forma, independiente de la frecuencia y dirección de la radiación incidente o emergente.

El vector flujo de potencia radiante emitida por un cuerpo negro, instantáneamente o en régimen permanente, normal a la superficie, viene dado por la ecuación vectorial:

$$\vec{\frac{q}{A}} = (C \cdot T_{superficie}^4) \vec{n} \quad (4.43)$$

Donde:

- \dot{q} , es la potencia radiante global, en *Watios*.
- A , es el área normal a la dirección del flujo de calor, en m^2 .
- C , es la constante de proporcionalidad, que presenta diferentes valores en función de las propiedades radiantes de las superficies (coeficiente de emisión) y de la forma del recinto (distancias y ángulos entre superficies), siendo en general muy difícil su determinación exacta.

La ecuación (4.43) se conoce con el nombre de ecuación de Stefan-Boltzmann, debido a que Stefan la postuló en 1879 de forma empírica y Boltzmann la obtuvo en 1884 a partir de los principios de la Termodinámica.

En el caso de que la superficie en estudio sea de menor dimensión que las de su entorno, caso muy frecuente, la ecuación 4.43 se reduce a:

$$\frac{\vec{q}}{A} = (\varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_{superficie_1}^4 - T_{superficie_2}^4)) \vec{n} \quad (4.44)$$

Donde:

- σ , es la constante de Stefan-Boltzmann, igual a $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/K}^4 \cdot \text{m}^2$
- ε , es el coeficiente de emisión. Los valores del coeficiente de emisión dependen del tipo de superficie, siendo diferentes en el caso de superficies metálicas. Su valor aproximado es de: 0,05 para superficie metálica brillante; 0,25 para superficie metálica opaca; 0,5 para pinturas metálicas; 0,90 para pinturas no metálicas de color oscuro). Como valor medio se, toma en general, 0,9.

4.3. CÁLCULO DE TEMPERATURAS EN RÉGIMEN ESTACIONARIO

La Figura 4.5 muestra el montaje del rodamiento en el eje y la brida.

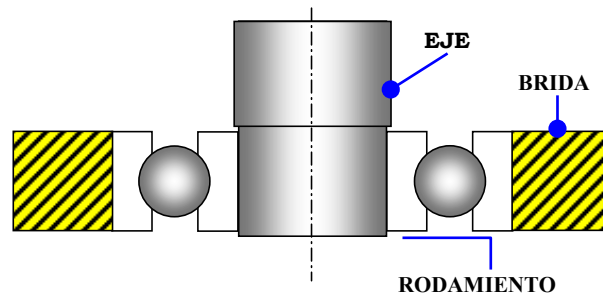


Figura 4.5 Sistema rodamiento-eje-brida

Para el cálculo de las temperaturas de régimen estacionario, se realizan las siguientes hipótesis (Figura 4.7):

- Todos los puntos de la superficie A1 del anillo externo están a la misma temperatura.
- Todos los puntos de la superficie A6 del anillo interno están a la misma temperatura.
- El extremo del eje se encuentra a temperatura ambiente.
- La sección del eje A8, se encuentra a temperatura ambiente.

El cálculo de temperaturas lo realizaremos atendiendo a los nodos mostrados en la Figura 4.6

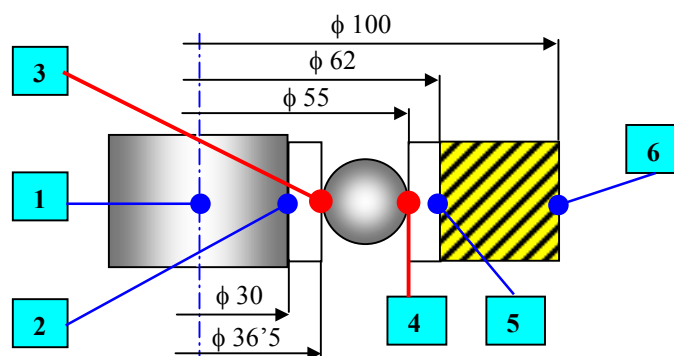


Figura 4.6 Nodos seleccionados para el cálculo de temperaturas en el rodamiento

La Figura 4.7 muestra las áreas en que se distribuye la superficie total de los elementos estudiados.

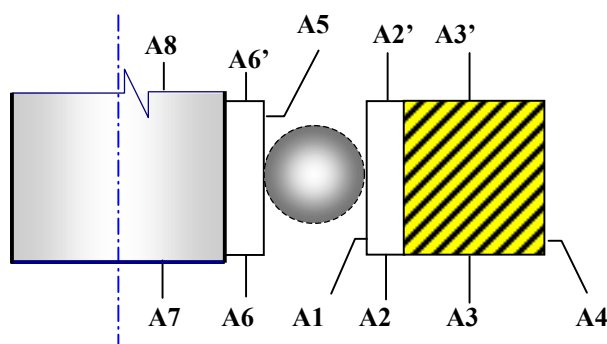


Figura 4.7 Distribución de superficies para el cálculo térmico del rodamiento

La Tabla 4.8, muestra la forma de transferencia de calor entre los distintos nodos considerados para el análisis térmico de régimen estacionario.

Nodo	Ambiente	1	2	3	4	5	6
1	Cond.	-	Cond.	-	-	-	-
2	-	Cond.	-	Cond.	-	-	-
3	-	-	Cond.	Q	-	-	-
4	-	-	-	-	Q	Cond.	-
5	-	-	-	-	Cond.	-	Cond.
6	Conv.	-	-	-	-	Cond.	-

Tabla 4.8 Fenómenos de transmisión de calor que afectan a los diferentes nodos

Aplicando las ecuaciones de la transferencia de calor a cada superficie o combinación de ellas cuando corresponda (Figura 4.7), se plantea un sistema de ecuaciones no lineales cuya solución serán las temperaturas de los nodos T1, T2, T3, T4, T5 y T6 en régimen estacionario.

Teniendo en cuenta que la fuente de calor se encuentra en los nodos 3 y 4, se realizan los cálculos de forma independiente a los nodos 1, 2 y 3 y por otro lado a los nodos 4, 5 y 6.

La figura 4.8 muestra esquemáticamente la distribución del flujo calorífico a través de los nodos 4, 5 y 6 y las correspondientes superficies que intervienen en el proceso de cálculo.

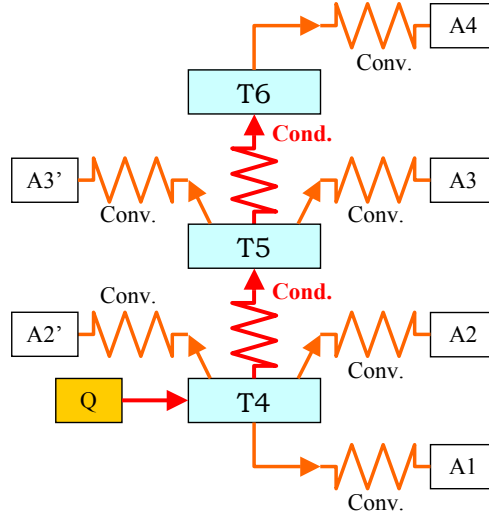


Figura 4.8 Diagrama del flujo calorífico en el rodamiento

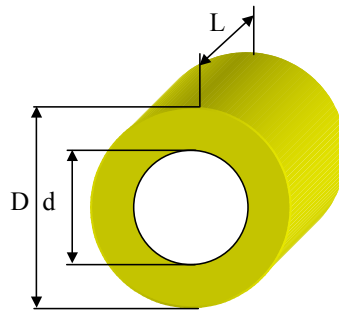
La Figura 4.8 permite también plantear sobre cada nodo la ecuación que determina el equilibrio térmico.

Nodo 4

La ecuación 4.45 establece la relación de equilibrio térmico en el nodo 4. En este nodo se tiene una fuente de calor $Q = \dot{q}$.

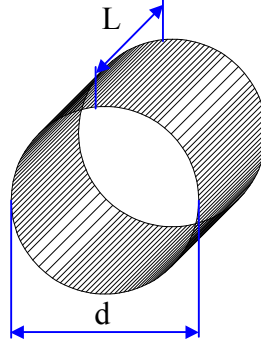
$$-\dot{q} + C_{5-4}(T_4 - T_5) + C_{A1} \cdot (T_4 - T_A)^{1,25} + 2 \cdot C_{A2} \cdot (T_4 - T_A)^{1,25} = 0 \quad (4.45)$$

Cálculo del coeficiente C_{5-4}



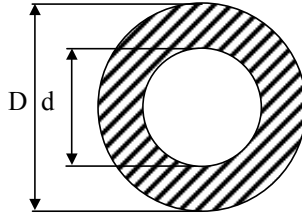
$$C_{5-4} = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \cdot h = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,016}{\ln\left(\frac{0,062}{0,055}\right)} \cdot 16,3 = 13,68$$

Cálculo del coeficiente C_{A1}



$$C_{A1} = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot \pi \cdot d \cdot L = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot \pi \cdot 55 \cdot 16 = 0,06358$$

Cálculo del coeficiente C_{A2}



$$C_{A2} = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{\pi}{4} (62^2 - 55^2) = 0,01479$$

Sustituyendo el valor de los coeficientes calculados en la ecuación 4.45 , para un valor de temperatura ambiente de 298° K, resulta:

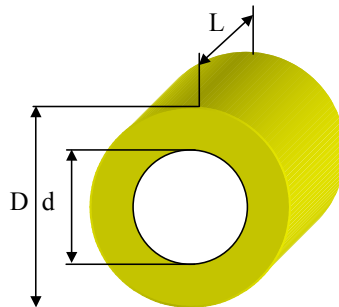
$$-\dot{q} + 13,68 \cdot (T4 - T5) + 0,06358 \cdot (T4 - 298)^{1,25} + 2 \cdot 0,01479 \cdot (T4 - 298)^{1,25} = 0 \quad (4.46)$$

Nodo 5

La ecuación 4.47 establece la relación de equilibrio térmico en el nudo 5.

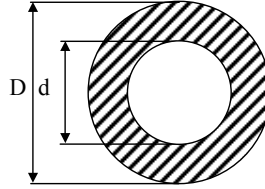
$$C_{5-4} (T5 - T4) + 2 \cdot C_{A3} \cdot (T5 - TA)^{1,25} + C_{5-6} (T5 - T6) = 0 \quad (4.47)$$

Cálculo del coeficiente C_{5-6}



$$C_{5-6} = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \cdot h = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,016}{\ln\left(\frac{0,100}{0,062}\right)} \cdot 43 = 9,04$$

Cálculo del coeficiente $C_{A3} = C_{A4}$



$$C_{A3} = C_{A4} = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{\pi}{4} (100^2 - 62^2) = 0,1112$$

Sustituyendo el valor de los coeficientes en la ecuación 4.47 , para un valor de temperatura ambiente de 298° K, resulta:

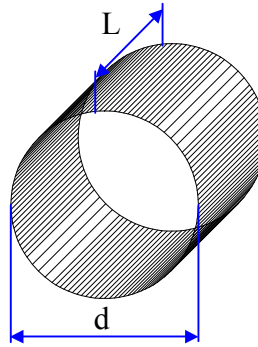
$$13,68 \cdot (T5 - T4) + 2 \cdot 0,1112 \cdot (T5 - 298)^{1,25} + 9,04 \cdot (T5 - T6) = 0 \quad (4.48)$$

Nodo 6

Le ecuación 4.49 establece la relación de equilibrio térmico en el nodo 6.

$$C_{5-6} (T6 - T5) + C_{A4} \cdot (T6 - TA)^{1,25} = 0 \quad (4.49)$$

Cálculo del coeficiente C_{A5}



$$C_{A5} = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot \pi \cdot d \cdot L = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot \pi \cdot 100 \cdot 16 = 0,1156$$

Sustituyendo el valor de los coeficientes en la ecuación 4.49 , para un valor de temperatura ambiente de 298° K, resulta:

$$9,04 \cdot (T6 - T5) + 0,1156 \cdot (T6 - 298)^{1,25} = 0 \quad (4.50)$$

Las ecuaciones 4.46, 4.48, 4.50 forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas no lineal. Resolviendo este sistema, se determinan los valores de las temperaturas T4, T5 y T6.

$$-\dot{q} + 13,68 \cdot (T4 - T5) + 0,06358 \cdot (T4 - 298)^{1,25} + 2 \cdot 0,01479 \cdot (T4 - 298)^{1,25} = 0$$

$$13,68 \cdot (T5 - T4) + 2 \cdot 0,1112 \cdot (T5 - 298)^{1,25} + 9,04 \cdot (T5 - T6) = 0$$

$$9,04 \cdot (T6 - T5) + 0,1156 \cdot (T6 - 298)^{1,25} = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones no lineal, para varios valores de potencia disipada \dot{q} , se obtienen los gráficos mostrados en las Figuras 4.9 y 4.10.

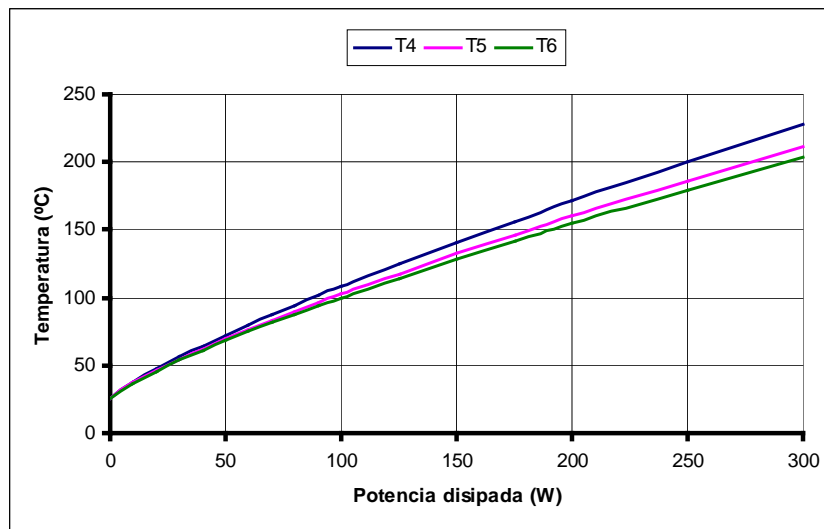


Figura 4.9 Variación de la temperatura con la potencia calorífica disipada

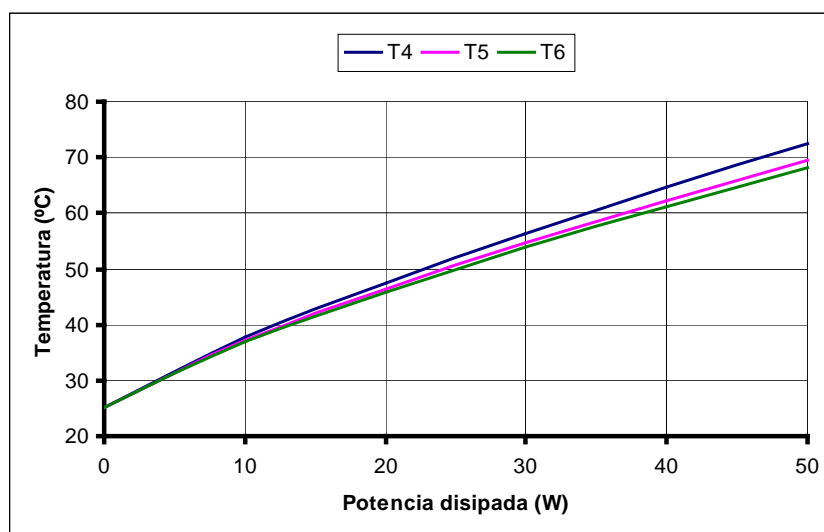


Figura 4.10 Gráfica de detalle de 0 - 50 W

Se procede de igual forma para los nodos 1, 2 y 3. La Figura 4.11 muestra esquemáticamente la distribución del flujo calorífico a través estos nodos y las correspondientes superficies que intervienen en el proceso de cálculo.

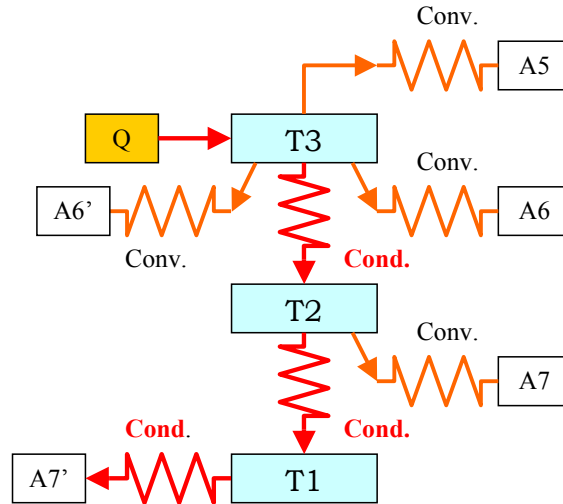


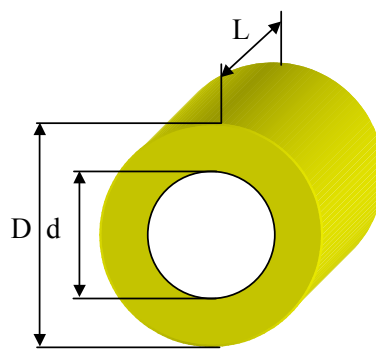
Figura 4.11 Diagrama flujo calorífico en anillo interno

Nodo 3

La ecuación 4.51 establece la relación de equilibrio térmico en el nudo 3. En este nudo se tiene una fuente de calor $Q = \dot{q}$.

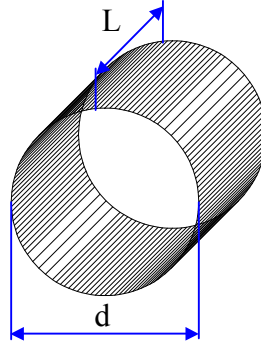
$$-\dot{q} + C_{3-2}(T3 - T2) + C_{A5} \cdot (T3 - TA)^{1,25} + 2 \cdot C_{A6} \cdot (T3 - TA)^{1,25} = 0 \quad (4.51)$$

Cálculo del coeficiente C_{3-2}



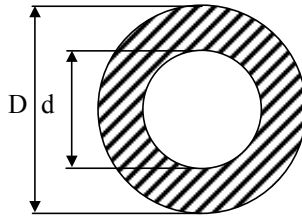
$$C_{3-2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \cdot h = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,016}{\ln\left(\frac{0,0365}{0,030}\right)} \cdot 16,3 = 8,35$$

Cálculo del coeficiente C_{A5}



$$C_{A5} = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot \pi \cdot d \cdot L = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot \pi \cdot 36,5 \cdot 16 = 0,0422$$

Cálculo del coeficiente $C_{A6} = C_{A6'}$



$$C_{A6} = C_{A4} = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{\pi}{4} (36,5^2 - 30^2) = 0,0078$$

Sustituyendo el valor de los coeficientes en la ecuación 4.51 , para un valor de temperatura ambiente de 298° K, resulta:

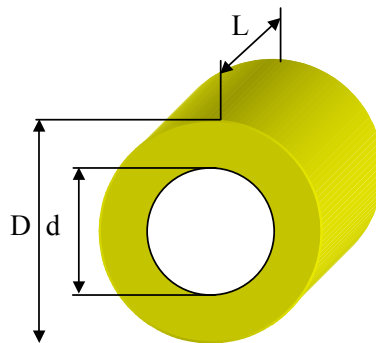
$$-\dot{q} + 8,35 \cdot (T3 - T2) + 0,0422 \cdot (T3 - 298)^{1,25} + 2 \cdot 0,0078 \cdot (T3 - 298)^{1,25} = 0 \quad (4.52)$$

Nodo 2

Le ecuación 4.53 establece la relación de equilibrio térmico en el nodo 2.

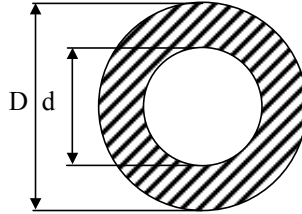
$$C_{3-2} (T2 - T3) + C_{A7} \cdot (T2 - TA)^{1,25} + C_{2-1} \cdot (T2 - T1) = 0 \quad (4.53)$$

Cálculo del coeficiente C_{2-1}



$$C_{2-1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \cdot h = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,016}{\ln\left(\frac{0,03}{0,0001}\right)} \cdot 40 = 0,7050$$

Cálculo del coeficiente C_{A7}



$$C_{A7} = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{\pi}{4} (30^2 - 0^2) = 0,0163$$

Sustituyendo el valor de los coeficientes en la ecuación 4.53 , para un valor de temperatura ambiente de 298° K, resulta:

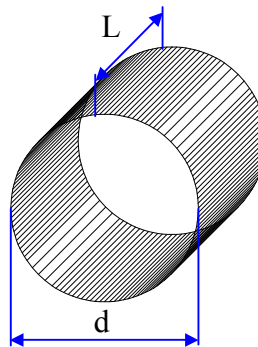
$$8,35 \cdot (T2 - T3) + 0,0163 \cdot (T2 - 298)^{1,25} + 0,7050 \cdot T2 - T1 = 0 \quad (4.54)$$

Nodo 1

Le ecuación 4.55 establece la relación de equilibrio térmico en el nodo 1.

$$C_{2-1} \cdot (T1 - T2) + C_{A7'} \cdot (T1 - TA) = 0 \quad (4.55)$$

Cálculo del coeficiente $C_{A7'}$



$$C_{A7'} = \frac{\pi \cdot D^2}{4 \cdot L} \cdot hc = \frac{\pi \cdot 0,03^2}{4 \cdot 0,1} \cdot 40 = 0,2827$$

NOTA (Se supone que a una distancia de 100 mm del nodo T1, el eje se encuentra a temperatura ambiente)

Sustituyendo el valor de los coeficientes en la ecuación 4.55 , para un valor de temperatura ambiente de 298° K, tenemos:

$$0,7050 \cdot (T1 - T2) + 0,2827 \cdot (T1 - 298) = 0 \quad (4.56)$$

Las ecuaciones 4.52, 4.54, 4.56 forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas no lineal. Resolviendo este sistema, se determinan los valores de las temperaturas T1, T2 y T3.

$$-\dot{q} + 8,35 \cdot (T3 - T2) + 0,0422 \cdot (T3 - 298)^{1,25} + 2 \cdot 0,0078 \cdot (T3 - 298)^{1,25} = 0$$

$$8,35 \cdot (T2 - T3) + 0,0163 \cdot (T2 - 298)^{1,25} + 0,7050 \cdot (T2 - T1) = 0$$

$$0,7050 \cdot (T1 - T2) + 0,2827 \cdot (T1 - 298) = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones no lineal, para varios valores de potencia disipada \dot{q} , se obtienen los gráficos mostrados en las Figuras 4.12 y 4.13.

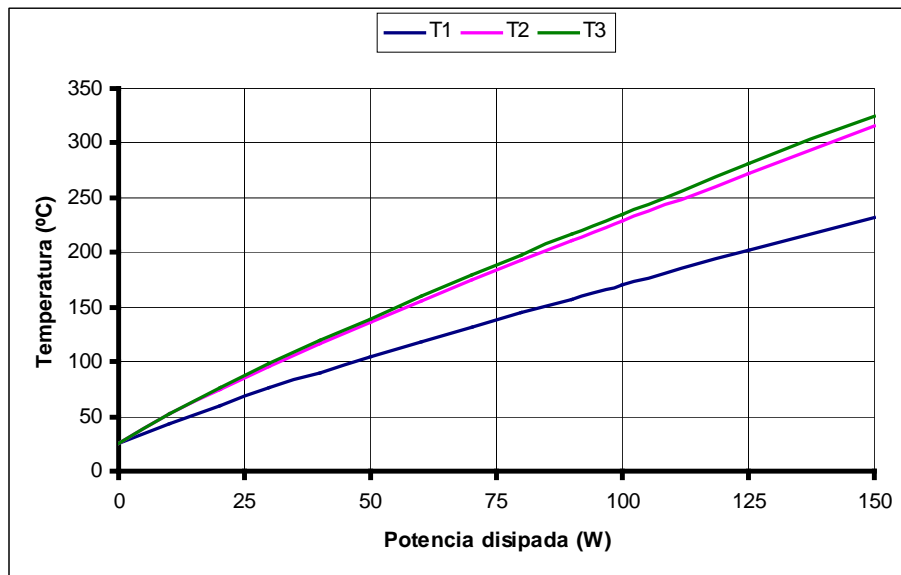


Figura 4.12 Variación de la temperatura con la potencia calorífica disipada (0-150 W)

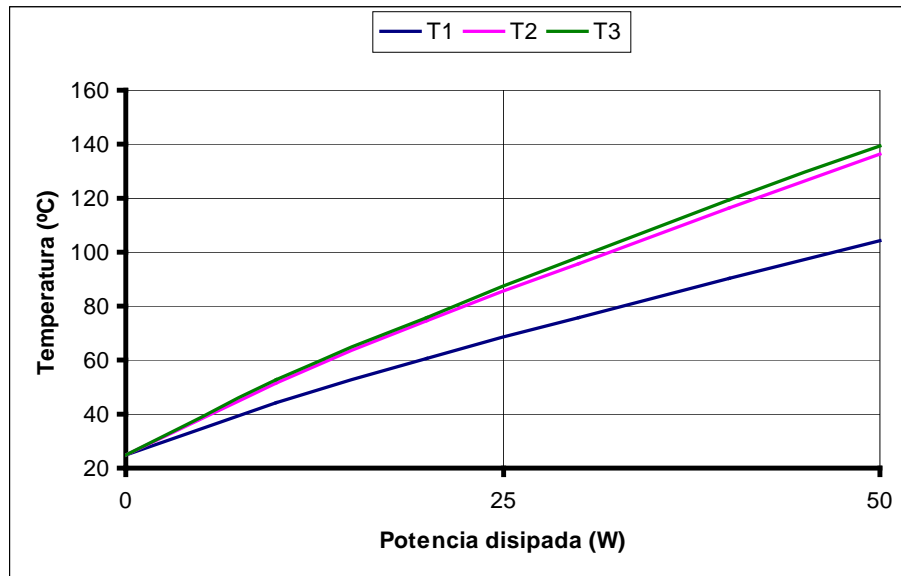


Figura 4.13 Variación de la temperatura con la potencia calorífica disipada (0-50 W)

4.4. ECUACIÓN DEL CALOR

Se considera un cuerpo de espesor unitario, en el cual la transferencia de calor de calor ocurre en forma bidimensional. Si se toma un elemento diferencial de área $dA = dx \cdot dy$ (Figura 4.14), en el cual se consideran como positivo el flujo de calor que entra al elemento, entonces la conservación de la energía establece que la diferencia entre los flujos de calor que entran y salen del cuerpo es igual al cambio de la energía térmica del cuerpo, tal como se especifica en la ecuación 4.14:

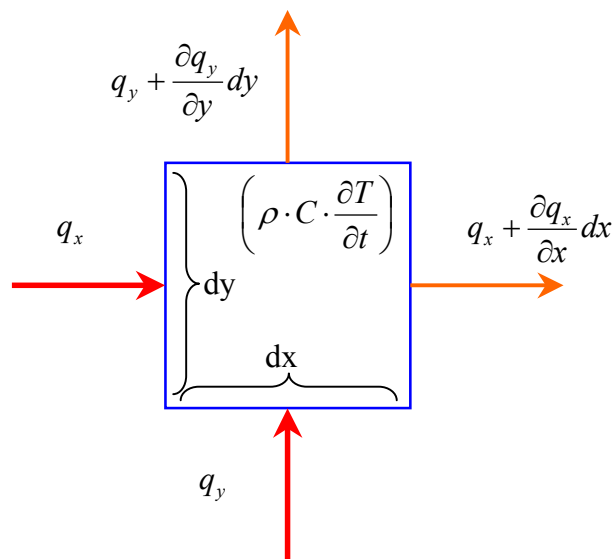


Figura 4.14 Elemento diferencial con transferencia de calor

$$q_x \cdot dy + q_y \cdot dx - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx = \left(\rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \right) \cdot dx \cdot dy \quad (4.57)$$

Donde:

- ρ es la densidad.
- C es el calor específico.

Desarrollando la ecuación 4.57 y simplificando queda que:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} = \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.58)$$

Si se considera que el flujo de calor en el interior del cuerpo obedece la ley de conducción de Fourier:

$$q_x = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial y}$$

donde k es la conductividad térmica del material.

Sustituyendo en la ecuación 4.58 queda:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(-k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-k \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.59)$$

Si la conductividad térmica se supone constante, la ecuación 4.59 se puede reescribir de forma:

$$k \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.60)$$

Si, además, existe en el interior del cuerpo una fuente de calor $Q(x, y, t)$, resulta finalmente:

$$k \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Q(x, y, t) = \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.61)$$

Para que la solución particular esté determinada unívocamente es preciso establecer un conjunto de condiciones iniciales y otro de condiciones de contorno.

Las condiciones iniciales establecen el campo de temperatura en todo el sólido en un instante determinado.

Las condiciones de contorno establecen las restricciones que afectan a la temperatura del sistema en los puntos de su contorno o también llamada frontera. Es usual emplear dos tipos de condiciones de contorno:

- Es conocido el valor de la temperatura en cada punto de la superficie que limita el sistema. Este tipo se denomina como condición de contorno de primera especie y la determinación del campo de temperatura conduce a la resolución de un problema de Dirichlet.

- Cuando se conoce la densidad de flujo de calor sobre la frontera. Este tipo se denomina como condición de contorno de segunda especie y la determinación del campo de temperatura conduce a la resolución de un problema de Newman, que determina este campo, salvo una constante arbitraria.

La ecuación 4.61 puede generalizarse para el caso de tres dimensiones. Si $T = T(x, y, z; t)$, se tiene:

$$\rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \cdot \nabla T) + Q(x, y, z) \quad (4.62)$$

Si la conductividad térmica, k , es constante queda finalmente:

$$\rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \nabla^2 T + Q(x, y, z) \quad (4.63)$$

Según el tipo de coordenadas utilizadas (cartesianas, cilíndricas o esféricas), el laplaciano es:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{cartesianas}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{cilíndricas}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad \text{esféricas}$$

Los métodos numéricos para resolver las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales desarrollados desde el siglo XIV por Sir Thomas Harriot en la Universidad de Oxford se extendieron rápidamente entre los grandes matemáticos de Europa, trascendiendo de manera importante hacia la ingeniería en 1943 cuando Richard Courant desarrolla el Método de los Elementos Finitos (MEF). Courant usó los métodos numéricos propuestos por Ritz con el fin de obtener soluciones aproximadas para sistemas mecánicos en vibración.

Durante muchos años los métodos numéricos no fueron utilizados extensamente debido, principalmente, a la gran cantidad de operaciones matemáticas básicas y el enorme tiempo que transcurría del planteamiento a la solución del problema, además de las dificultades para realizar gráficas complejas. Este obstáculo fue superado cuando, en la década de los 70, IBM lanza al mercado ordenadores eficientes que facilitaron y agilizaron los procesos iterativos de los métodos numéricos.

El método de los elementos finitos (MEF), se convierte entonces en el método preferido para generar soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de la física clásica.

El MEF, se basa en transformar un cuerpo sólido de naturaleza continua en un modelo discreto, y por tanto, aproximado. Esta transformación se denomina discretización del modelo y, según como se realice, pueden llegar a producirse errores importantes. El conocimiento de lo que sucede en el interior del modelo MEF se obtiene mediante interpolación de los valores

que toma el resultado en los nodos. Es por tanto, una aproximación de los valores de una función a partir del conocimiento de un determinado número finito de valores.

Son varias las fuentes de error en el análisis de problemas empleando los elementos finitos. Entre estos errores cabe citar:

- Errores de modelización.
 - Errores cometidos con la estimación de las cargas aplicadas y las condiciones frontera.
 - Errores al asignar las propiedades de los materiales.
- Errores en la discretización.
 - Errores en la aproximación de la geometría del modelo a la real. Este error se minimiza cuando se aumenta el refinamiento del mallado a expensas del aumento del coste computacional. Realmente, lo que se suele hacer es aumentar el refinado del mallado únicamente en las zonas críticas del modelo.
 - Errores en la discretización, relacionados con el tamaño del elemento y la deformación de los nodos durante el cálculo.
- Errores de computación.
 - Errores en la integración sobre los elementos.
 - Errores en la solución del sistema de ecuaciones causados por el truncamiento de los números reales en el ordenador y por errores de redondeo.

Los programas para el cálculo por elementos finitos disponen, generalmente, de tres módulos de trabajo:

1. Pre-procesador. Donde se prepara el modelo para realizar el cálculo. En este módulo se realizan las operaciones de:
 - Dibujo del modelo o importación de la geometría de un sistema CAD distinto del software de elementos finitos.
 - Selección de materiales a emplear, ya sea de librerías o definidos por el usuario cuando se emplean materiales de propiedades no lineales.
 - Mallado del modelo.
 - Aplicación de cargas, ya sean puntuales, lineales o superficiales.
 - Aplicación de las condiciones frontera o de contorno.
2. Procesador. En este módulo se realizan todos los cálculos del MEF y se genera las soluciones. Los pasos que sigue son los siguientes:
 - Selección del tipo de cálculo a realizar: estático, dinámico, térmico, etc, y, a su vez, si es estacionario o transitorio.
 - Configuración de los parámetros de cálculo tales como intervalos de tiempo, acotación del error, número de iteraciones, etc.

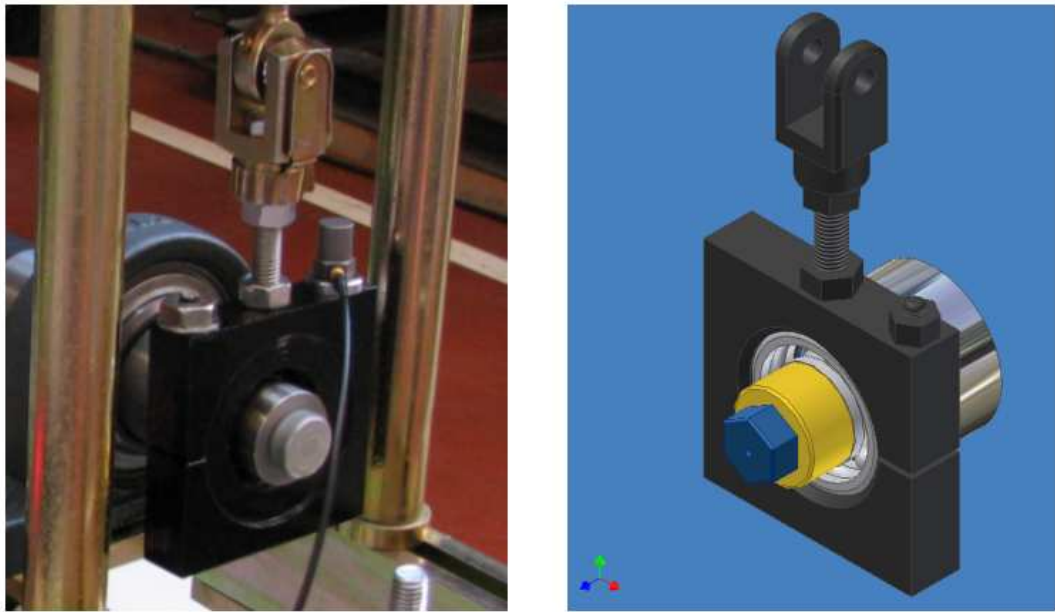


Figura 4.15 Sistema real y modelo utilizado para simulación térmica

- Inicio de cálculo. El programa genera las matrices de rigidez, realiza la triangulación de la matriz y genera la solución.
- 3. Post-procesador. Este módulo es el encargado de la representación gráfica de los resultados, así como resultados indirectos que se pueden obtener a partir de la solución general del modelo.

Implementación del modelo

En esta sección se realiza la implementación del modelo para el análisis térmico. Para el estudio de transferencia de calor existen gran variedad de software de elementos finitos de aplicación general como ABAQUS, ANSYS, COSMOS, etc.. La distribución de temperaturas en función del tiempo se calcula, en nuestro caso, con el programa COSMOS/M.

Se creará un modelo de elementos finitos realista tridimensional y se ajusta exactamente, desde el punto de vista geométrico, al sistema mecánico, tal y como muestra la Figura 4.15.

La Figura 4.16 muestra explosionado el modelo propuesto para la simulación térmica, donde pueden apreciarse los siguientes componentes:

1. Brida o soporte del rodamiento
2. Rodamiento
3. Rotor
4. Casquillo para sujeción del anillo interno del rodamiento al rotor
5. Tornillo

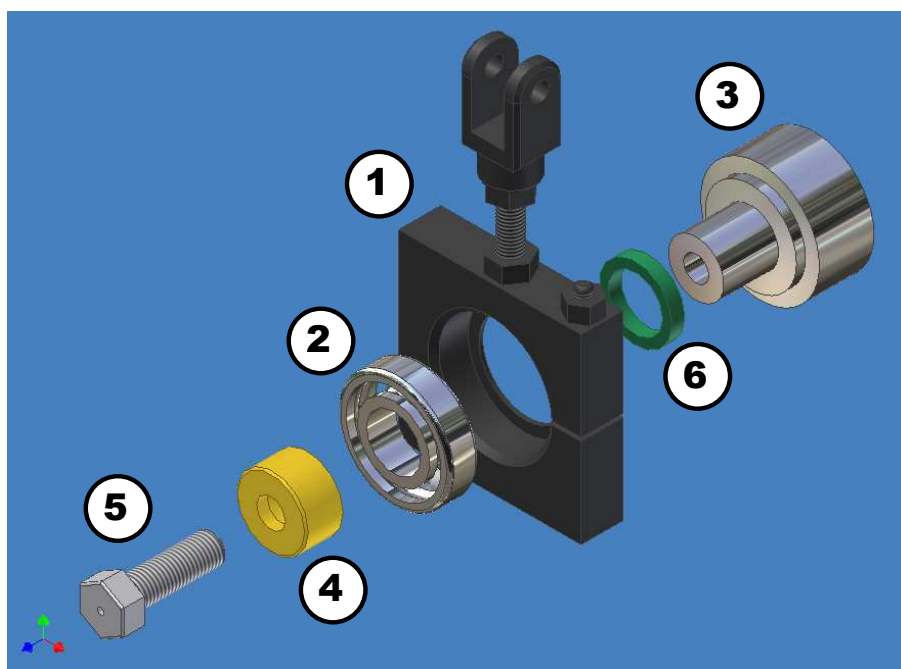


Figura 4.16 Modelo para simulación térmica explosionado

6. Casquillo separador

Siempre que se tenga un buen conocimiento del proceso térmico en el sistema mecánico objeto de estudio como fenómeno físico y, por tanto, sean establecidas adecuadamente las condiciones de carga, como son las fuentes de calor y los correspondientes coeficientes de transferencia de calor, así como las propiedades del material y se haga una discretización adecuada del modelo (mallado); entonces se determinará con un buen nivel de precisión las características del campo de temperaturas que se originan.

El material de todos los elementos que componen el sistema mecánico, a excepción del rodamiento y el rotor, es acero de uso general en la fabricación de maquinaria. Sus características se muestran en la Tabla 4.9.

Componente: 1 , 4 , 5 , 6		Material : Acero
Descripción	Valor	Unidad
Módulo elástico	2E11	N/m ²
Relación de Poisson	0,29	
Densidad	7900	Kg/m ³
Coefficiente dilatación	1,5E-5	/Kelvin
Conductividad	47	W/(m.K)
Calor específico	420	J/(kg.K)

Tabla 4.9 Características del material de los elementos 1, 4, 5 y 6

El eje principal o rotor debe tener una buena rigidez, poca deformación con los esfuerzos a que está sometido y un peso adecuado para mantener el giro del rodamiento a un régimen con

la mayor estabilidad posible. Este elemento está fabricado con un acero cuyas características se muestran en la Tabla 4.10.

Componente: 3		Material : Acero
Descripción	Valor	Unidad
Módulo elástico	2E11	N/m ²
Relación de Poisson	0,29	
Densidad	7900	Kg/m ³
Coefficiente dilatación	1,5E-5	/Kelvin
Conductividad	52	W/(m.K)
Calor específico	486	J/(kg.K)

Tabla 4.10 Características del material del rotor

Los anillos y elementos rodantes del rodamiento, están contruidos con aceros especiales, aleados al cromo. Los cuerpos de las pistas de rodadura están templados, rectificados y pulidos. Para las jaulas se emplean casi siempre chapas de acero, aunque en ocasiones se utilizan latón, metales ligeros o plásticos (fenoplásticos o poliamidas). Las características del material utilizado en el modelo para los anillos interno y externo y las bolas se muestra en la Tabla 4.11.

Componente: 2		Material : Acero
Descripción	Valor	Unidad
Módulo elástico	1,92E11	N/m ²
Relación de Poisson	0,3	
Densidad	8000	Kg/m ³
Coefficiente dilatación	1,6E-5	/Kelvin
Conductividad	16,3	W/(m.K)
Calor específico	499,99	J/(kg.K)

Tabla 4.11 Características del material de los elementos del rodamiento

Una vez se han establecido las características de los materiales, es necesario determinar las condiciones de contorno, esto es, aquellas superficies donde existen fuentes térmicas (generación de calor), los distintos valores de coeficientes de convención-radiación de cada superficie individual del sistema y los coeficientes de conducción para aquellas parejas de superficies que corresponden a dos componentes que se encuentren en contacto.

En primer lugar, es necesario identificar las superficies de cada uno de los componentes de forma individual. La nomenclatura seguida para identificar estas superficies consiste en un número inicial que indica el componente a que corresponde, seguida de la letra 'S' (de superficie) y un número que indica el orden. Las Figuras 4.17 y 4.18, muestran de forma simbólica, todas las superficies que intervienen en los cálculos. Las superficies no identificadas se consideran aisladas y, por tanto, sin transferencia de calor sobre las mismas.

El valor de los coeficientes de convención-radiación y el flujo de calor o potencia calorífica de las fuentes existentes son, quizás, los valores más importantes para que la solución de la simulación tenga cierto parecido a la realidad. Estos valores deben ser obtenidos mediante iteración, a partir de las curvas de calentamiento-enfriamiento del modelo real. La Tabla 4.12

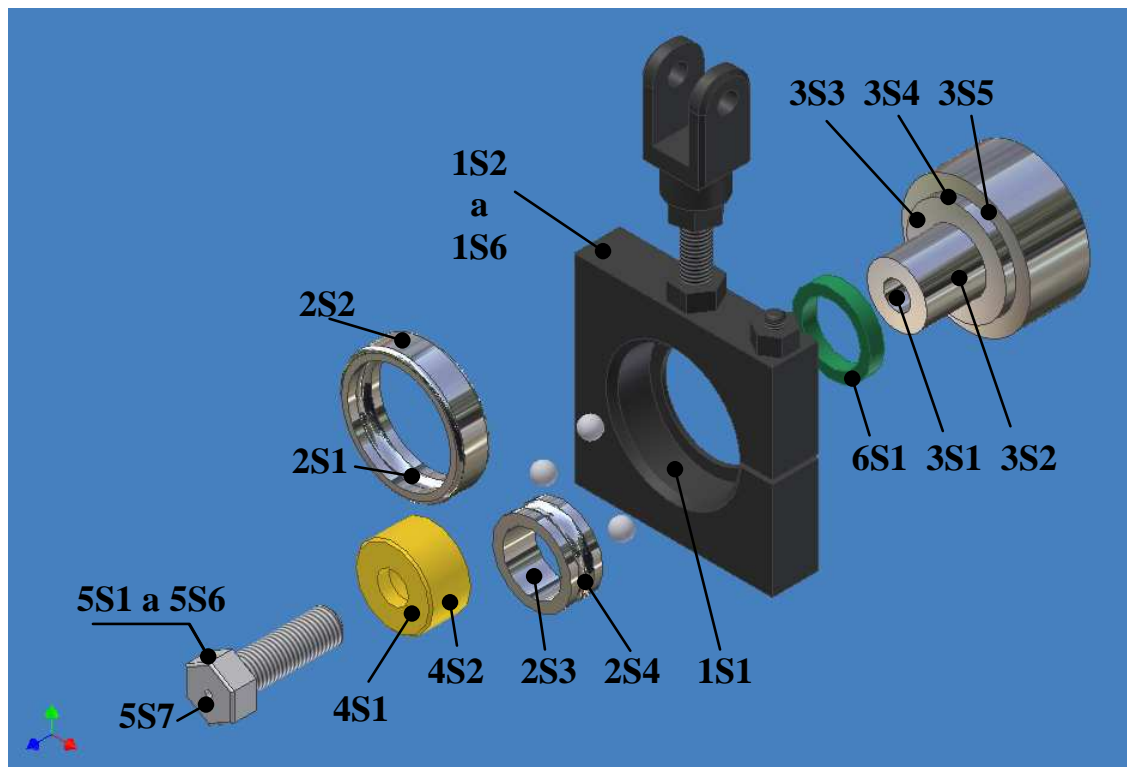


Figura 4.17 Identificación de superficies en el modelo (I)

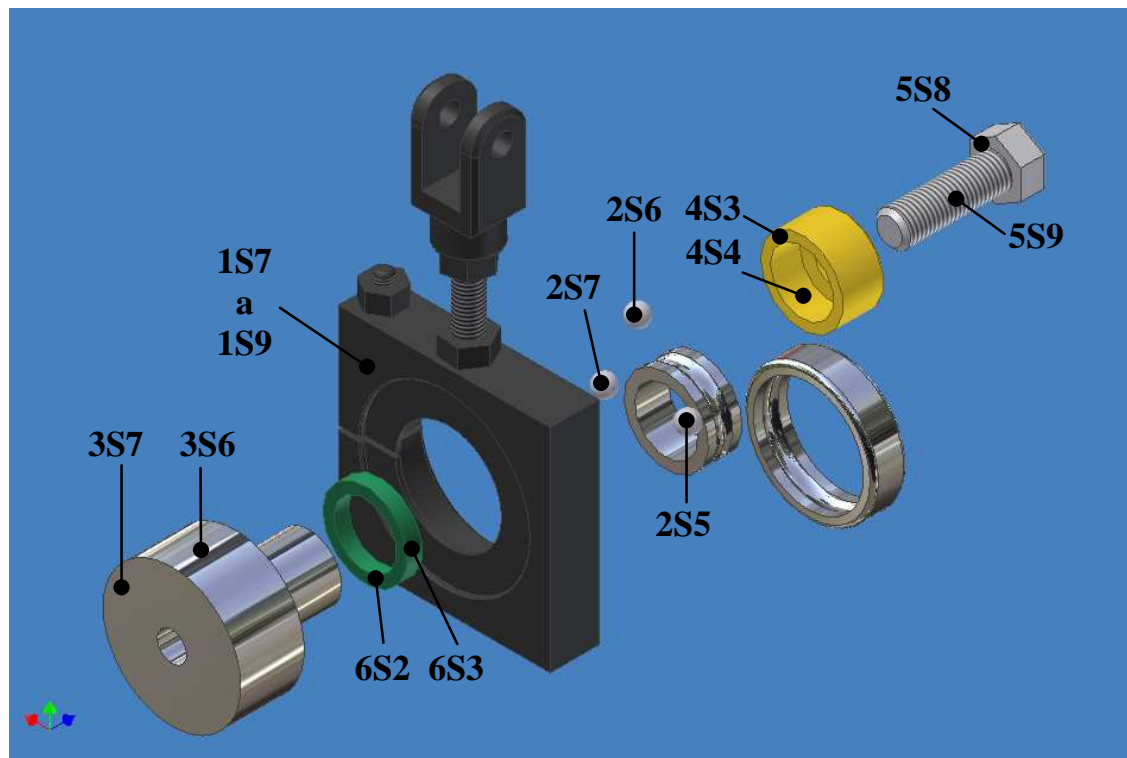


Figura 4.18 Identificación de superficies en el modelo (II)

muestra la nomenclatura de los coeficientes de convención-radiación correspondientes a la curva de calentamiento y a la superficie del modelo que corresponden.

Superficies	Coef. convención-radiación
	Calentamiento
1S2, 1S3, 1S4, 1S5, 1S6, 1S7, 1S8, 1S9,	h_1
3S4, 3S5, 3S6, 4S2, 5S1, 5S2, 5S3, 5S4, 5S5, 5S6, 5S7	h_2
3S7	h_3

Tabla 4.12 Coeficientes de convención-radiación y superficie del modelo que corresponden (1)

La Tabla 4.13 muestra la nomenclatura de los coeficientes de convención-radiación correspondientes a la curva de enfriamiento y a la superficie del modelo que corresponden. Puede apreciarse que para las superficies que no presentan movimiento, el valor del coeficiente de convención-radiación no varía del proceso de calentamiento al de enfriamiento. Las superficies del modelo móviles durante la fase de calentamiento pasan a estáticas durante el proceso de enfriamiento. Como su temperatura es más elevada, consideraremos un coeficiente, h_4 un poco mayor que el de las superficies estáticas h_1 .

Superficies	Coef. convención-radiación
	Enfriamiento
1S2, 1S3, 1S4, 1S5, 1S6, 1S7, 1S8, 1S9,	h_1
3S4, 3S5, 3S6, 4S2, 5S1, 5S2, 5S3, 5S4, 5S5, 5S6, 5S7	h_4
3S7	h_3

Tabla 4.13 Coeficientes de convención-radiación y superficie del modelo que corresponden (2)

Para cada pareja de elementos en contacto, tenemos que definir la resistencia que ese contacto superficial opone al paso del flujo calorífico. La Tabla 4.14 muestra los valores utilizados.

Todos los contactos se suponen que tienen resistencia nula o sea el contacto es perfecto y el flujo calorífico no encuentra resistencia alguna, exceptuando los contactos de las bolas con las pistas de rodadura, donde consideramos que el lubricante ofrece cierta resistencia al calor. Este valor se obtiene empíricamente de los resultados obtenidos al compararlos con los resultados experimentales.

Superficies	Resistividad
2S1-2S5 ; 2S1-2S6 ; 2S1-2S7	0,025
2S4-2S5 ; 2S4-2S6 ; 2S4-2S7	0,025
Resto superficies en contacto como por ejemplo: 1S2-2S2 ; 2S3-3S2 ; 3S1-5S9	0

Tabla 4.14 Coeficientes de convención-radiación y superficie del modelo que corresponden (3)

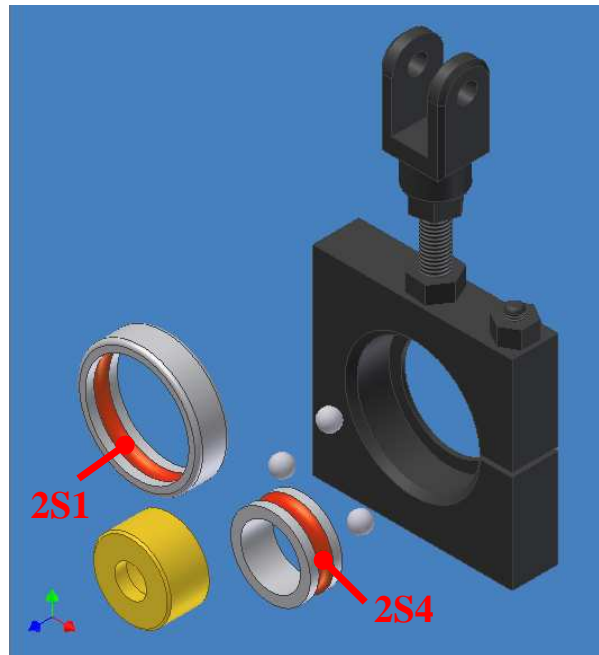


Figura 4.19 Superficies que actúan como fuentes de calor

Se establece como hipótesis que el calor se genera en los contactos de los elementos rodantes con las pistas de rodadura. Por tanto, se considera una fuente de calor de potencia \dot{q} (vatios) distribuida uniformemente entre las pistas de rodadura del anillo interno y anillo externo. El valor y la distribución de esta potencia calorífica sobre las superficies se detalla en el capítulo 6. La Figura 4.19 muestra las superficies con fuentes de calor.

El mallado de los elementos sólidos del modelo es generado automáticamente por el software, pudiendo seleccionar uno de los siguientes tipos:

- Draft quality mesh. El mallado automático genera sólidos tetraédricos con elementos lineales.
- High quality mesh. En este caso, el mallado se realiza utilizando elementos tetraédricos parabólicos con 10 nodos, tal y como puede apreciarse en la Figura 4.20.

Los elementos lineales también se llaman de primer orden, o elementos de menor orden. Los elementos parabólicos se llaman de segundo orden, o de elementos de orden superior.

Un elemento lineal tetraédrico está definido por cuatro nodos en las esquinas unidos por seis bordes rectos. Un elemento tetraédrico parabólico está definido por cuatro nodos de esquina, seis centrados en los nodos secundarios y seis aristas. En general, para la misma densidad de la malla (número de elementos), los elementos parabólicos arrojan mejores resultados que los elementos lineales porque:

1. se adaptan con mayor precisión a las superficies curvas
2. producen mejores aproximaciones matemáticas.

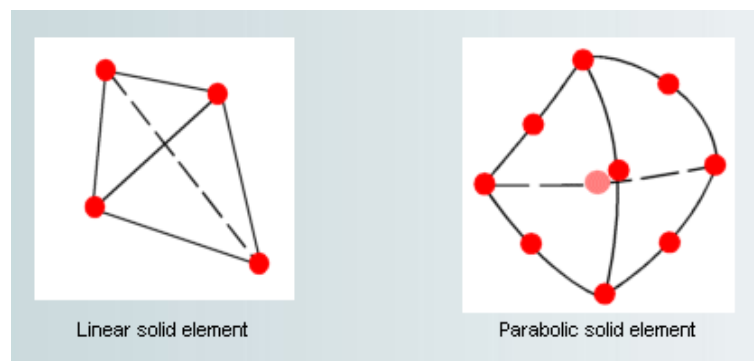


Figura 4.20 Elemento tetraédrico parabólico de 10 nodos

Sin embargo, los elementos parabólicos requieren mayores recursos computacionales de elementos lineales.

La Figura 4.21 muestra en modelo completo del conjunto brida-rodamiento-eje, con el correspondiente mallado preparado para el cálculo.

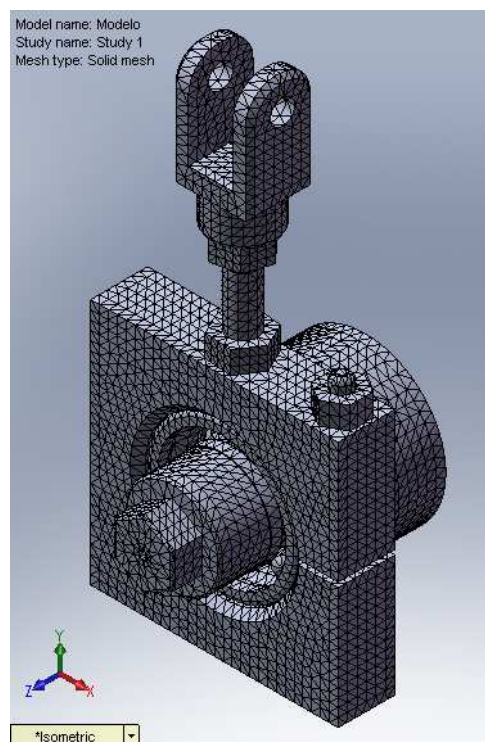


Figura 4.21 Mallado del modelo brida-rodamiento-eje

Cuando se inicia la simulación, una ventana muestra el número de nodos, elementos y ecuaciones que deben ser resueltos para hallar la solución, tal como muestra la Figura 4.22.

La Figura 4.23 muestra una imagen del modelo, con resultado de una simulación. En ella pueden apreciarse, mediante una gama de colores, el campo de temperaturas en el modelo.

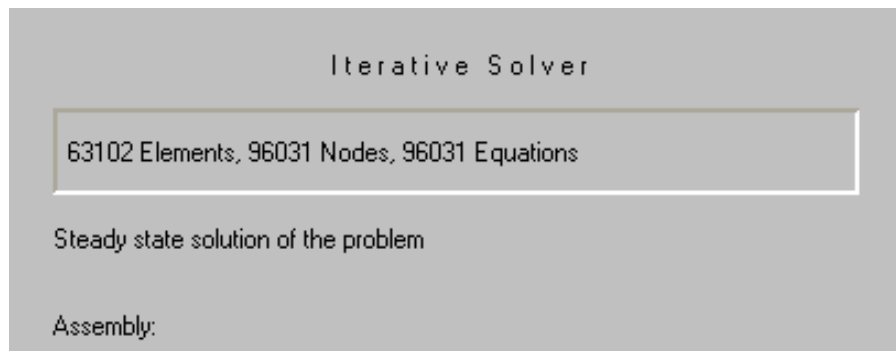


Figura 4.22 Detalle del Solver del Cosmos

Cabe destacar la posibilidad de apreciar el valor de la temperatura de dos de los nodos del modelo.

Estos nodos se corresponderán con las posiciones de dos termopares en el sistema mecánico real.

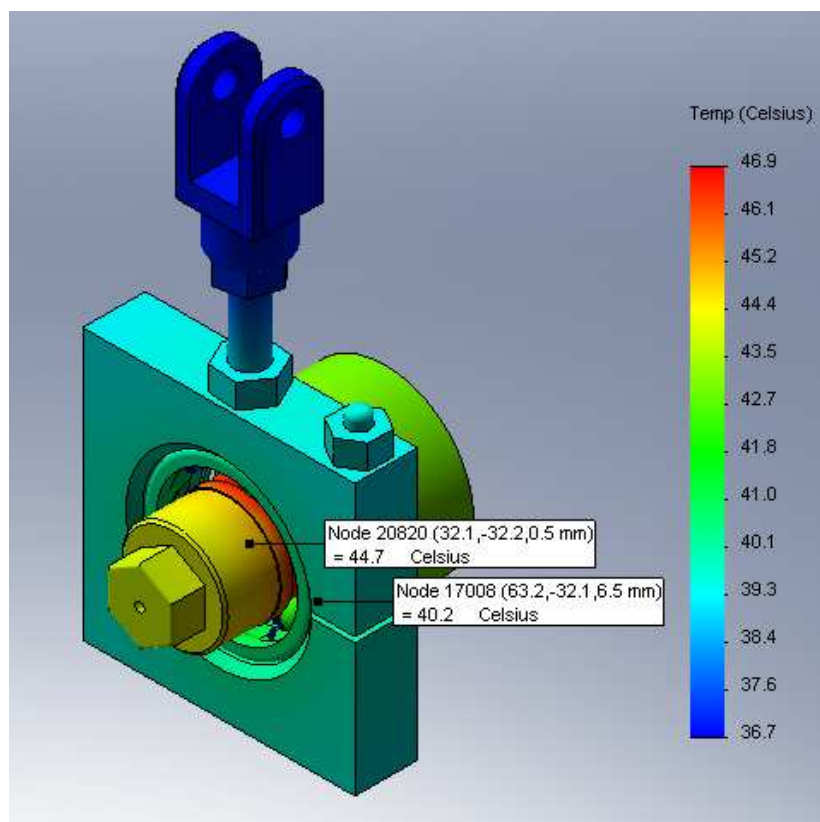


Figura 4.23 Resultados de una simulación del modelo

En la Figura 4.24 puede apreciarse la evolución de la temperatura de los nodos marcados sobre el modelo (Figura 4.23) con el tiempo.

Comparando estas curvas de calentamiento-enfriamiento generadas por el modelo con la

curva obtenida en la parte experimental, se obtienen los coeficientes de convención-radiación y la potencia calorífica de las fuentes de calor.

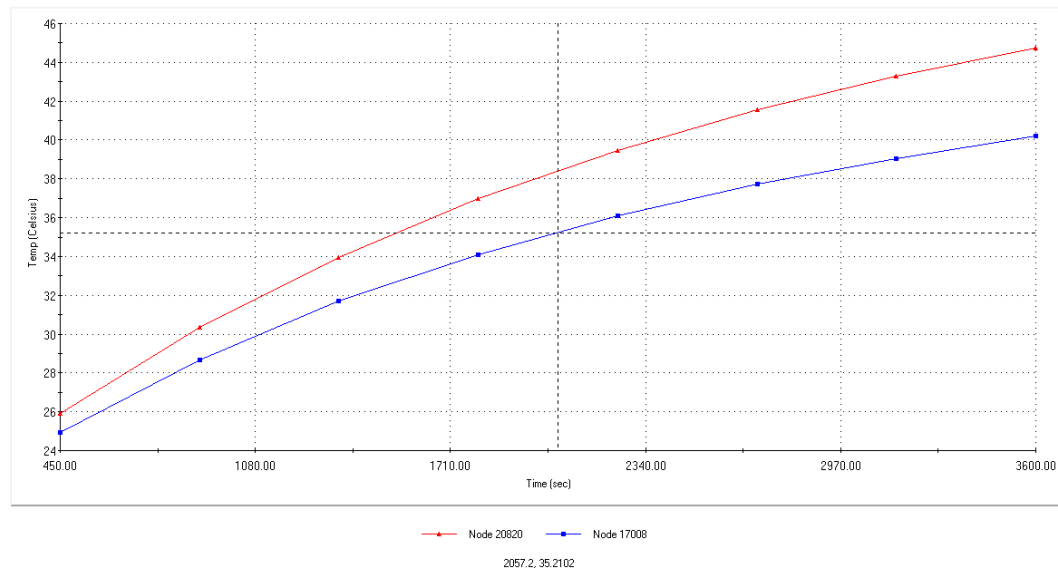


Figura 4.24 Curvas de calentamiento generadas por el modelo de elementos finitos

Capítulo 5

METODOLOGÍA DE LA SIMULACIÓN NUMÉRICA

5.1. SIMULACIÓN DINÁMICA DEL RODAMIENTO

En este apartado, tras haber planteado las ecuaciones del movimiento de los diferentes modelos dinámicos de rodamientos, ahora es necesario implementar los modelos para poder obtener la solución de estos sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. Además, es necesario definir los parámetros de simulación y los archivos de datos que han de generarse para poder comparar cada una de las señales obtenidas del modelo con la señal captada en el banco de ensayos de rodamientos, correspondiente a la parte experimental, siempre en idénticas condiciones de funcionamiento.

Para poder llevar a cabo los estudios de simulación se ha optado por utilizar los programas Matlab y Simulink, debido a las elevadas capacidades que presenta este software como herramienta de modelado y simulación. Mediante estas herramientas es posible integrar las ecuaciones diferenciales de movimiento previas, para de esta forma simular y analizar estos sistemas dinámicos según diversos comportamientos. Matlab y Simulink se han empleado habitualmente en numerosos sistemas como herramienta de modelado y simulación. Más aún, este software de simulación se ha empleado en muchas ocasiones como herramienta para simular determinados sistemas mecánicos o sistemas mecánicos con rodamientos. Así, por ejemplo, en [168] se hace uso de un software basado en Matlab para simulación dinámica de un rotor soportado por rodamientos. Esta herramienta es utilizada también para procesar los datos de vibración generados bajo distintas condiciones de funcionamiento.

Mediante Matlab se procesan de la misma forma, los datos obtenidos experimentalmente. También en [1], se hace uso de Matlab como una herramienta para analizar y clasificar los defectos en rodamientos en el dominio del tiempo y de la frecuencia empleando transformadas wavelet. También en [62] se emplea un análisis mediante la transformada wavelet con Matlab en la detección de fallos en rodamientos. Sin embargo, no se ha encontrado ninguna referencia hasta el momento que haga uso de Matlab y Simulink para generar las señales y condiciones de movimiento de los elementos a partir de un modelo matemático establecido a priori.

La implementación del modelo en Simulink requiere dos fases: en primer lugar, definir el modelo y, seguidamente, realizar el análisis de dicho modelo, obteniendo los resultados.

Para facilitar la definición del modelo, Simulink trabaja mediante diagramas de bloques. Estos bloques se editan e interconectan fácilmente mediante movimientos del ratón. Una vez que se ha definido el modelo, es posible analizar el mismo introduciendo valores desde el mismo Simulink o bien desde Matlab.

El progreso de la simulación puede apreciarse mediante los gráficos oportunos mientras el modelo está ejecutando cálculos. El resultado final puede estar disponible en el "workspace" de Matlab cuando se ha completado la simulación si esto se requiere. También permite el registro de los resultados para un análisis posterior.

5.1.1. Modelo de 2 G.D.L.

Rodamiento con 3 bolas

En esta sección se explica como se construye un modelo en Simulink para integrar las ecuaciones diferenciales 3.63 y 3.64. En la Figura 5.1 se muestra la distribución de bloques principales para la construcción del modelo. A partir de un fichero de configuración, donde se encuentran almacenados las constantes del sistema el modelo, se puede analizar el comportamiento del sistema ante diferentes condiciones.

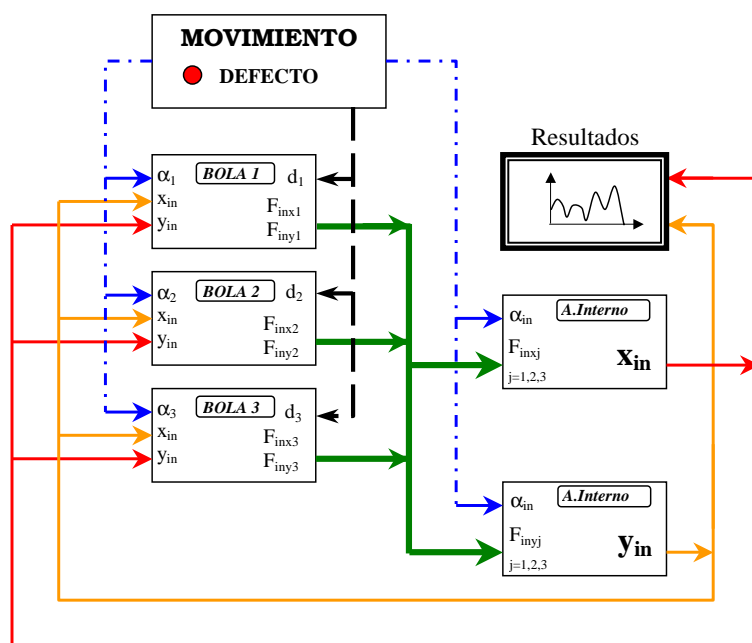


Figura 5.1 Diagrama de bloques del modelo Simulink (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)

Como puede apreciarse en la Figura 5.1, el sistema queda representado mediante 7 bloques cuyas funciones y características principales se detallan seguidamente.

1. Bloque **Movimiento**. En este bloque se definen todos los parámetros correspondientes al movimiento del sistema. La Figura 5.2 muestra el diagrama tal y como queda

implementado en Simulink.

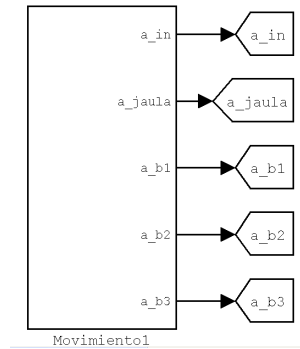


Figura 5.2 Bloque Movimiento (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)

Este bloque tiene como entradas la frecuencia de giro del rotor, f_{in} y la frecuencia de giro de la jaula, f_{jaula} . Los valores de estas variables los toma del workspace de Matlab, donde previamente se han introducido al ejecutar el archivo DATOS.m, cuyos detalles se dan seguidamente.

Como puede apreciarse en la Figura 5.2, las salidas que presenta este bloque, para cada instante t , son:

- a_in , que corresponde al ángulo girado por el rotor α_{in} .
- a_jaula , que es el ángulo girado por la jaula del rodamiento α_{jaula} .
- a_b1 , posición angular de la bola 1, que corresponde a α_1
- a_b2 , posición angular de la bola 2, que corresponde a α_2
- a_b3 , posición angular de la bola 3, que corresponde a α_3

La Figura 5.3 muestra un detalle del interior del bloque movimiento.

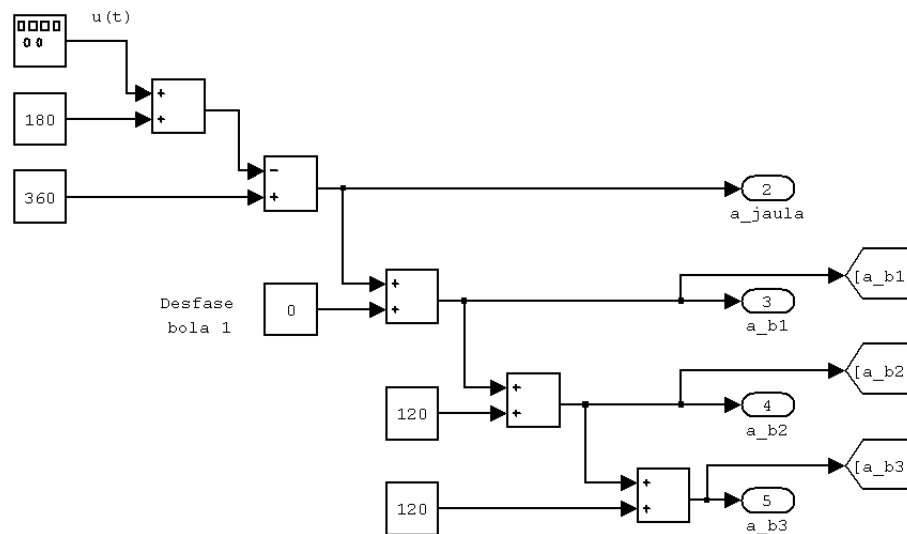


Figura 5.3 Diagrama de bloques interior del Bloque Movimiento (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)

Si representamos el ángulo girado por la *bola1* respecto al tiempo, se obtendrá una gráfica con forma de dientes de sierra como muestra la Figura 5.4. La amplitud vale 360° , y el periodo es igual a la inversa del valor de la frecuencia de rotación de la jaula f_{jaula} .

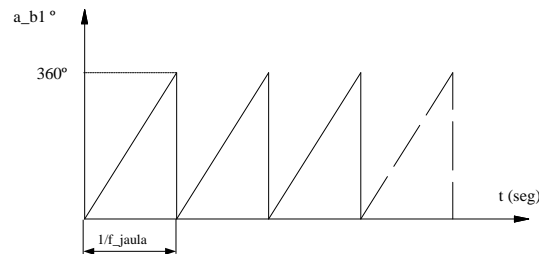


Figura 5.4 Ángulo girado por la *bola1* del rodamiento modelado

Para poder obtener la señal mostrada mediante bloques Simulink, se procede de la siguiente forma: Se parte de un bloque generador de señales, donde se selecciona una onda con forma de dientes de sierra. La configuración de la onda se obtiene por medio de la amplitud 'A' y de la frecuencia, tal y como muestra la Figura 5.5.

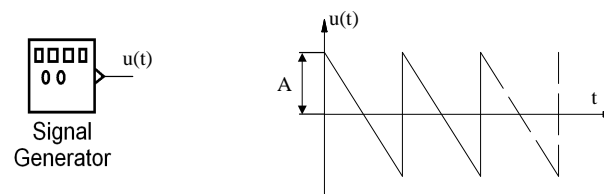


Figura 5.5 Generador de señal de Simulink

Aplicando a la señal generada la siguiente ecuación 5.2, se obtiene la forma de onda que representa el ángulo girado por la bola 1:

$$a_b1^\circ = 360 - [u(t) + 180] \quad (5.1)$$

La Figura 5.6 muestra el diagrama en bloques de Simulink que corresponde a la ecuación 5.2.

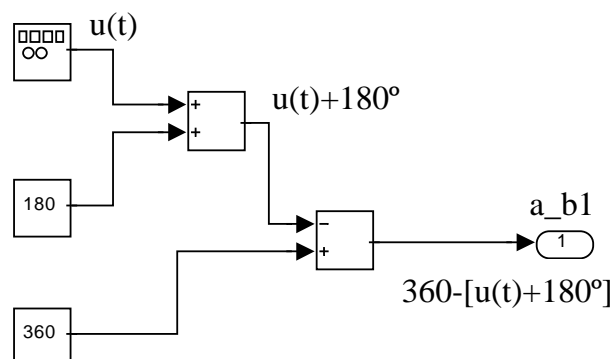


Figura 5.6 Implementación en Simulink de la ecuación 5.2

Los ángulos de las bolas 2, a_b2 y 3, a_b3 se obtienen sumando 120° y 240° respectivamente al ángulo de la bola 1, a_b1 , tal y como muestra la Figura 5.3

2. Bloque **Bola**.

En el bloque bola se realizan los cálculos del término $Fin_i \cdot \sin(\alpha_i)$ correspondiente a la ecuación diferencial 3.63 y el término $Fin_i \cdot \cos(\alpha_i)$ que corresponde a la ecuación diferencial 3.64 junto a los cálculos correspondientes a las ecuaciones 3.45 y 3.62. La Figura 5.7 muestra los tres bloques de Simulink que simulan las tres bolas del rodamiento.

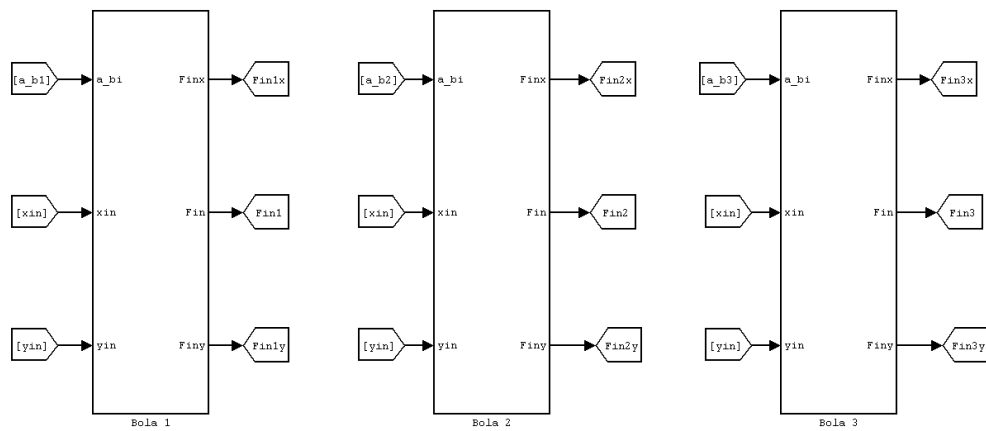


Figura 5.7 Bloques bola de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)

Las entradas que tiene cada uno de estos bloques son:

- La posición angular de la bola, a_b1 , a_b2 y a_b3 , que se corresponden con los ángulos α_1 , α_2 y α_3 respectivamente.
- La coordenada del centro del anillo interno, según el eje x , x_{in}
- La coordenada del centro del anillo interno, según el eje y , y_{in}

Las salidas que tiene cada uno de estos bloques bola son:

- La fuerza radial de la bola sobre el rotor, $Fin1$, $Fin2$ y $Fin3$.
- Las componentes de la fuerza radial según el eje x , $Fin1x$, $Fin2x$ y $Fin3x$.
- Las componentes de la fuerza radial según el eje y , $Fin1y$, $Fin2y$ y $Fin3y$.

La Figura 5.8 muestra la disposición interna del diagrama de bloques que realiza los cálculos citados anteriormente.

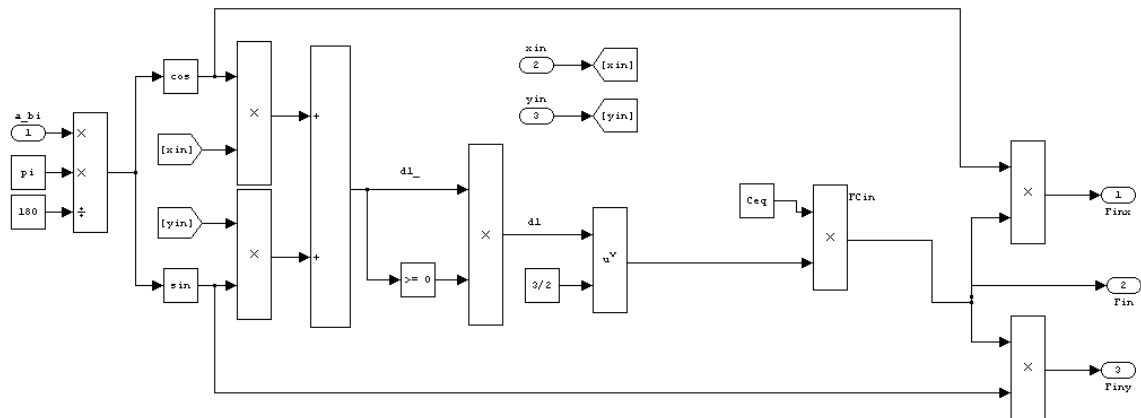


Figura 5.8 Diagrama de bloques interior del bloque bola de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)

3. Bloque **A. Interno**, x_{in} .

En el bloque *A. Interno*, x_{in} se realiza la integración de la ecuación diferencial 3.63 . La Figura 5.7 muestra el bloque de Simulink .

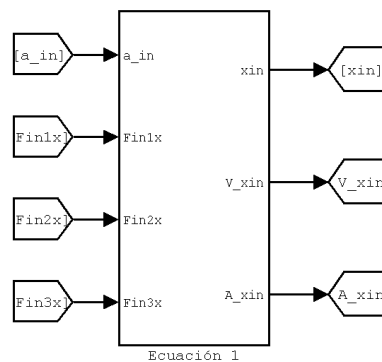


Figura 5.9 Bloque A. Interno, x_{in} de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)

Las entradas que tiene este bloque son:

- La posición angular del rotor, a_{in} , que se corresponde con el ángulo α_{in}
- Las componentes según la dirección x de las fuerzas de reacción de las bolas sobre el anillo interno $Fin1x$, $Fin3x$ y $Fin3x$.

Las salidas que tiene este bloque son:

- La posición, según la dirección x , del centro del anillo interno, x_{in} .
- La velocidad, según la dirección x , del centro del anillo interno, Vx_{in} .
- La aceleración, según la dirección x , del centro del anillo interno, Ax_{in} .

La Figura 5.10 muestra la disposición interna del diagrama de bloques que realiza los cálculos citados anteriormente.

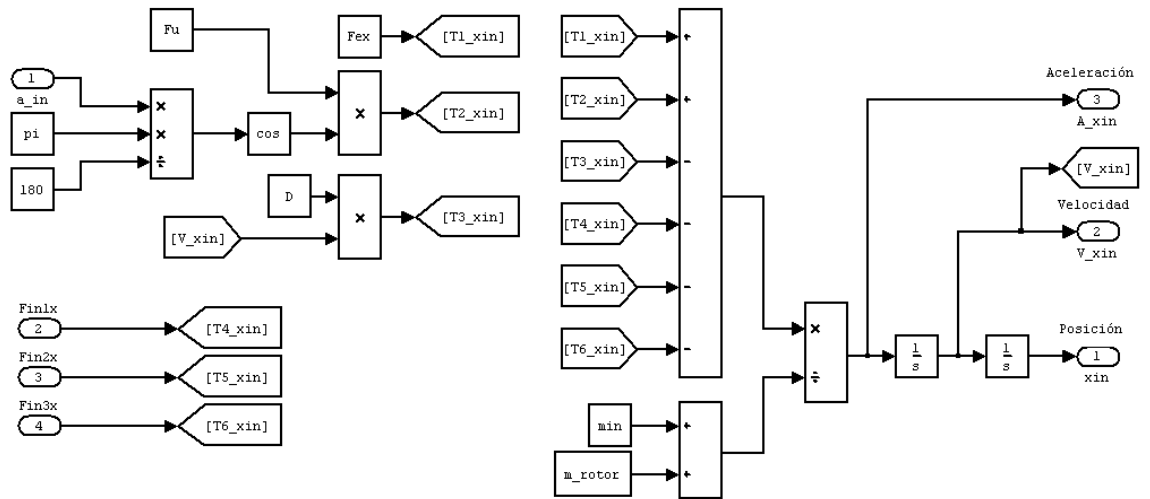


Figura 5.10 Diagrama de bloques interior del bloque x_{in} de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)

4. Bloque **A. Interno**, y_{in} .

En el bloque *A. Interno*, y_{in} se realiza la integración de la ecuación diferencial 3.64. La Figura 5.11 muestra el bloque de Simulink.

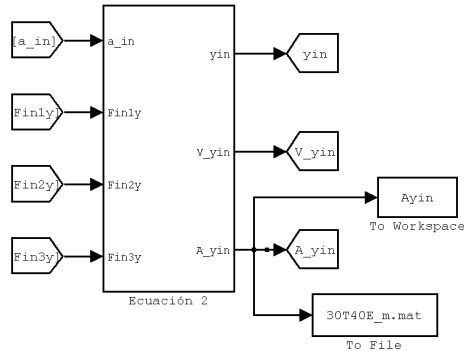


Figura 5.11 Bloque *A. Interno*, y_{in} de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)

Las entradas que tiene este bloque son:

- La posición angular del rotor, a_{in} , que se corresponde con el ángulo α_{in}
- Las componentes según la dirección y de las fuerzas de reacción de las bolas sobre el anillo interno $Fin1y$, $Fin2y$ y $Fin3y$.

Las salidas que tiene este bloque son:

- La posición, según la dirección y , del centro del anillo interno, y_{in} .
- La velocidad, según la dirección y , del centro del anillo interno, V_{yin} .
- La aceleración, según la dirección y , del centro del anillo interno, A_{yin} .

La Figura 5.12 muestra la disposición interna del diagrama de bloques que realiza los cálculos citados anteriormente.

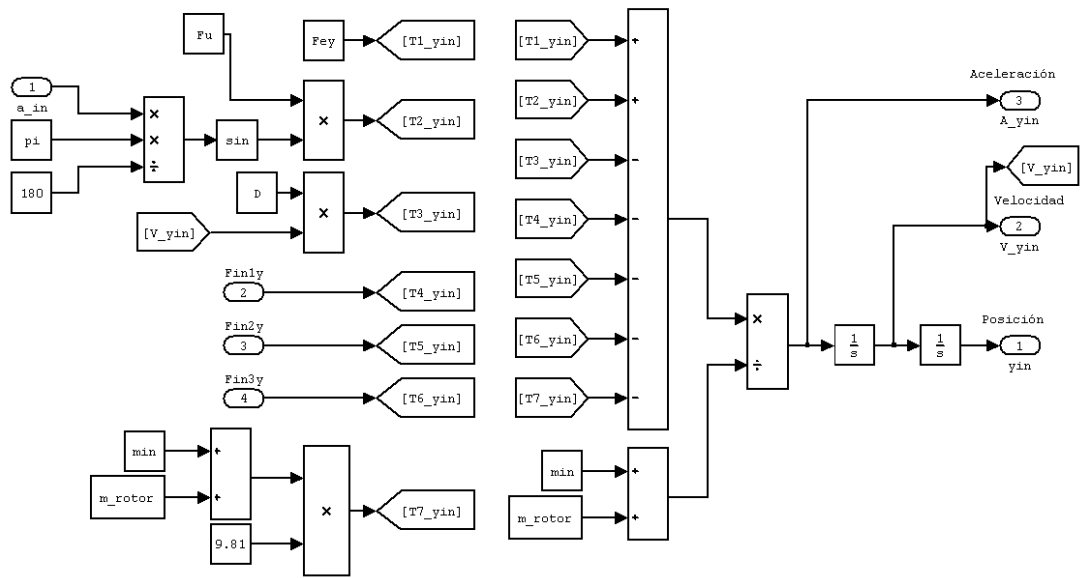


Figura 5.12 Interior del bloque y_{in} de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)

5. Bloque **Resultados**.

En este bloque quedan incluidos todos aquellos gráficos, tablas, archivos, etc. que contienen valores de resultados de cualquier índole, ya sean desplazamientos, velocidades, aceleraciones, fuerzas, deformaciones, etc. La Figura 5.13 muestra un ejemplo de estos resultados incluidos en este bloque.

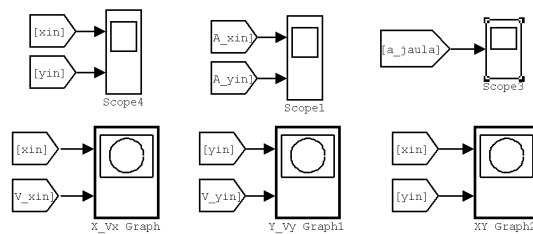


Figura 5.13 Bloques de resultados (Newton, 2 G.D.L., 3 bolas)

Estos bloques internos representan gráficos de las señales de los resultados. Las Figuras 5.14 y 5.15 muestran unos ejemplos de este tipo de gráficos.

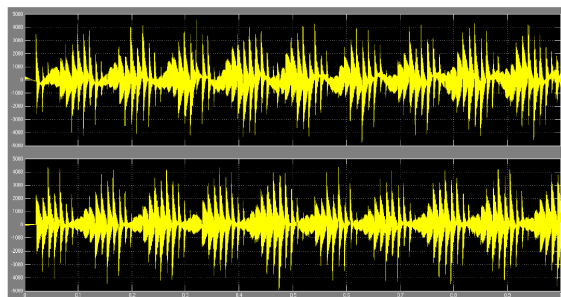


Figura 5.14 Ejemplo de gráficos de resultados

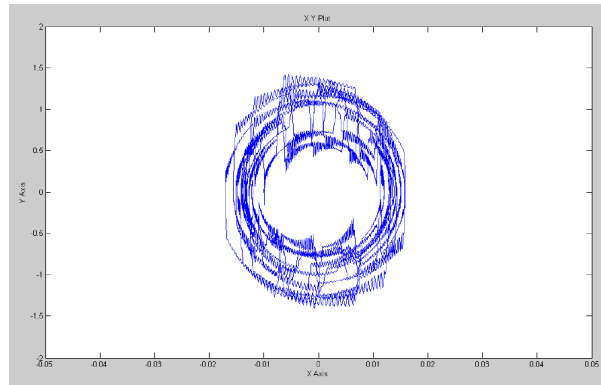


Figura 5.15 Ejemplo de gráficos de resultados

Rodamiento con 9 bolas

Se construye ahora un modelo en Simulink para integrar las ecuaciones diferenciales 3.65 y 3.66. En la Figura 5.16 se muestra la distribución de bloques principales para la construcción del modelo con 2 G.D.L. de un rodamiento con 9 bolas.

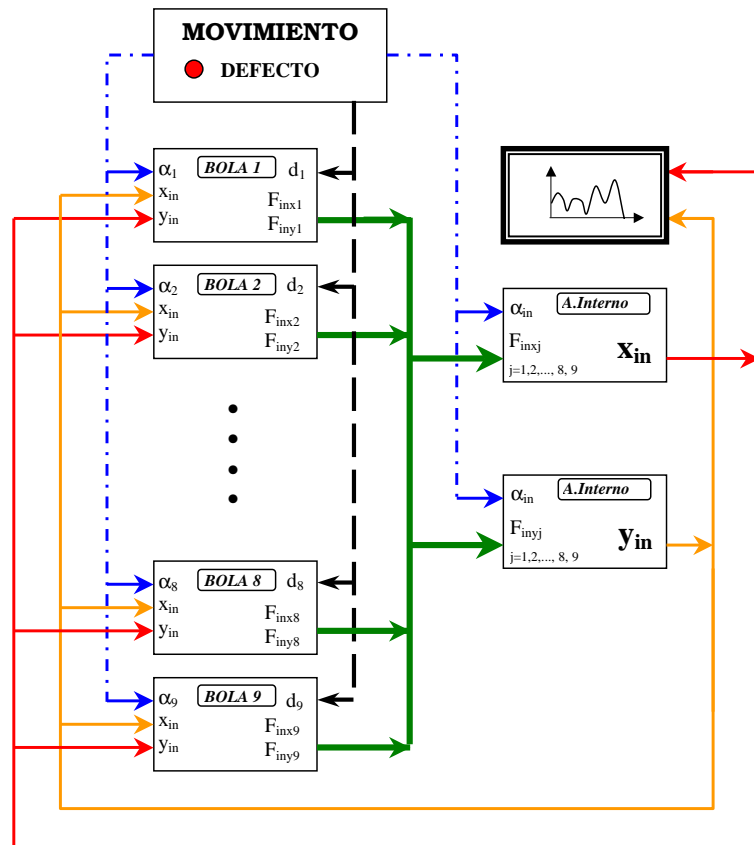


Figura 5.16 Diagrama de bloques del modelo en Simulink (Newton, 2 G.D.L., 9 bolas)

Como puede apreciarse en la Figura 5.16, el sistema queda representado mediante 13 bloques cuyas funciones y características principales se detallan seguidamente.

1. Bloque **Movimiento**. En este bloque se definen todos los parámetros correspondientes al movimiento del sistema. La Figura 5.17 muestra el diagrama tal y como queda implementado en Simulink.

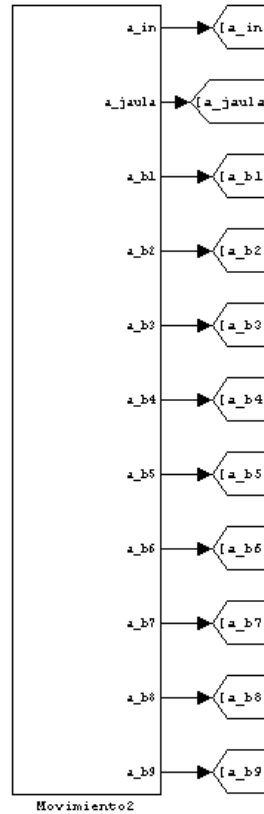


Figura 5.17 Bloque Movimiento (Newton, 2 G.D.L., 9 bolas)

Este bloque tiene como entradas la frecuencia de giro del rotor, f_{in} y la frecuencia de giro de la jaula, f_{jaula} .

Como puede apreciarse en la Figura 5.2, las salidas que presenta este bloque, para cada instante t , son:

- a_in , que corresponde al ángulo girado por el rotor α_{in} .
- a_jaula , que es el ángulo girado por la jaula del rodamiento α_{jaula} .
- a_b1 , posición angular de la bola 1, que corresponde a α_1
- a_b2 , posición angular de la bola 2, que corresponde a α_2
- a_b3 , posición angular de la bola 3, que corresponde a α_3
- a_b4 , posición angular de la bola 4, que corresponde a α_4
- a_b5 , posición angular de la bola 5, que corresponde a α_5
- a_b6 , posición angular de la bola 6, que corresponde a α_6
- a_b7 , posición angular de la bola 7, que corresponde a α_7
- a_b8 , posición angular de la bola 8, que corresponde a α_8
- a_b9 , posición angular de la bola 9, que corresponde a α_9

La Figura 5.18 muestra un detalle del interior del bloque movimiento.

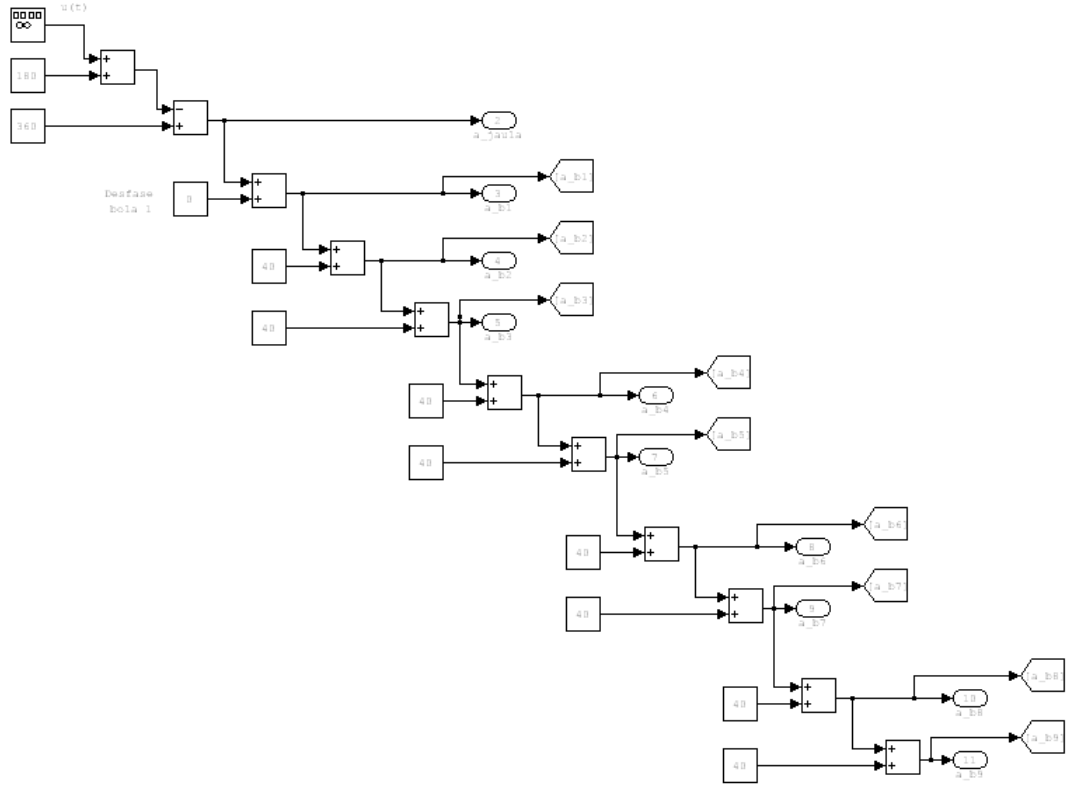


Figura 5.18 Diagrama de bloques interior del Bloque Movimiento (Newton, 2 G.D.L., 9 bolas)

El ángulo de la *bola1* se genera de igual forma que en el modelo de 2 G.D.L. y rodamiento de tres bolas, visto anteriormente.

Los ángulos de las bolas 2, 3, ... y 9, se obtienen mediante la ecuación 5.2

$$\begin{aligned}
 a_b2 &= a_b1 + 1 \cdot 40^\circ \\
 a_b3 &= a_b1 + 2 \cdot 40^\circ \\
 &\dots \\
 a_b9 &= a_b1 + 8 \cdot 40^\circ
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

2. Bloque **Bola**.

En el bloque bola se realizan los cálculos del término $Fin_i \cdot \sin(\alpha_i)$ correspondiente a la ecuación diferencial 3.65 y el término $Fin_i \cdot \sin(\alpha_i)$ que corresponde a la ecuación diferencial 3.66 junto a los cálculos correspondientes a las ecuaciones 3.45 y 3.62. La Figura 5.19 muestra los nueve bloques de Simulink que simulan las nueve bolas del rodamiento.

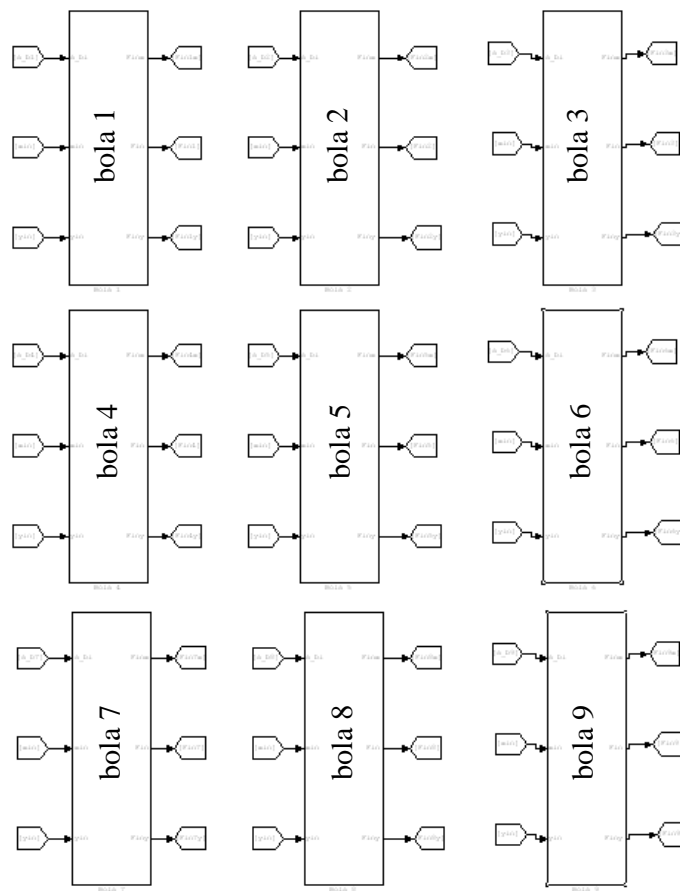


Figura 5.19 Bloques bola de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 9 bolas)

Las entradas que tiene cada uno de estos bloques son:

- La posición angular de la bola, a_b1 , a_b2 , a_b3 , a_b4 , a_b5 , a_b6 , a_b7 , a_b8 y a_b9 , que se corresponden con los ángulos α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , α_5 , α_6 , α_7 , α_8 y α_9 respectivamente.
- La coordenada del centro del anillo interno, según el eje x , x_{in}
- La coordenada del centro del anillo interno, según el eje y , y_{in}

Las salidas que tiene cada uno de estos bloques bola son:

- La fuerza radial de la bola sobre el rotor, $Fin1$, $Fin2$, $Fin3$, $Fin4$, $Fin5$, $Fin6$, $Fin7$, $Fin8$, $Fin9$.
- Las componentes de la fuerza radial según el eje x , $Fin1x$, $Fin2x$, $Fin3x$, $Fin4x$, $Fin5x$, $Fin6x$, $Fin7x$, $Fin8x$ y $Fin9x$.
- Las componentes de la fuerza radial según el eje y , $Fin1y$, $Fin2y$, $Fin3y$, $Fin4y$, $Fin5y$, $Fin6y$, $Fin7y$, $Fin8y$ y $Fin9y$.

La Figura 5.20 muestra la disposición interna del diagrama de bloques que realiza los cálculos citados anteriormente. Puede apreciarse que la disposición es la misma que la del modelo 2 G.D.L. con rodamiento de 3 bolas.

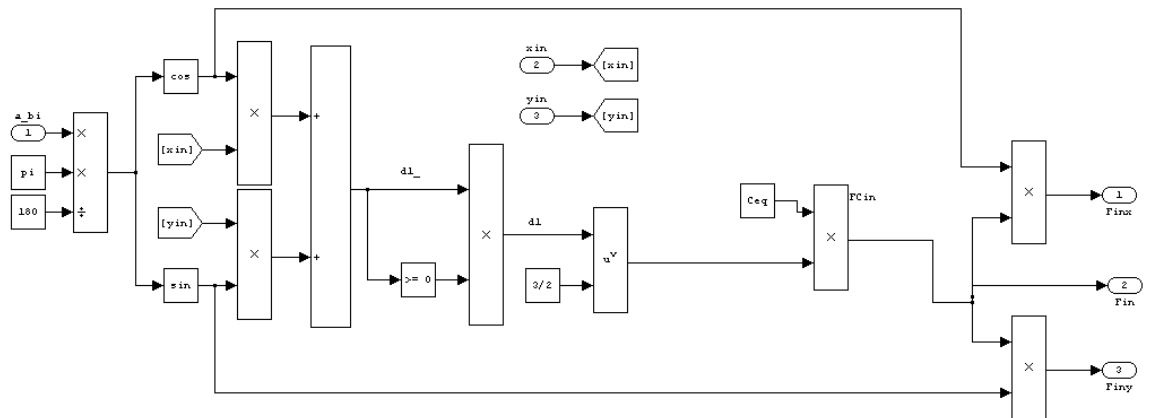


Figura 5.20 Diagrama de bloques interior del bloque bola de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 9 bolas)

3. Bloque **A. Interno**, x_{in} .

En el bloque *A. Interno*, x_{in} se realiza la integración de la ecuación diferencial 3.65. La Figura 5.21 muestra el bloque de Simulink.

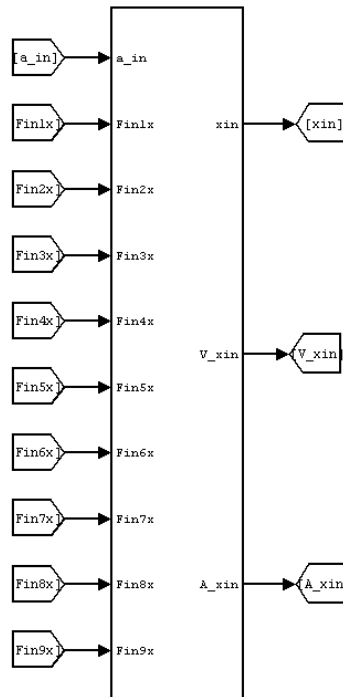


Figura 5.21 Bloque A. Interno, x_{in} de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 9 bolas)

Las entradas que tiene este bloque son:

- La posición angular del rotor, a_{in} , que se corresponde con el ángulo α_{in}
- Las componentes según la dirección x de las fuerzas de reacción de las bolas sobre el anillo interno $Fin1x$, $Fin2x$, $Fin3x$, $Fin4x$, $Fin5x$, $Fin6x$, $Fin7x$, $Fin8x$ y $Fin9x$.

Las salidas que tiene este bloque son:

- La posición, según la dirección x , del centro del anillo interno, x_{in} .
- La velocidad, según la dirección x , del centro del anillo interno, V_{xin} .
- La aceleración, según la dirección x , del centro del anillo interno, A_{xin} .

La Figura 5.22 muestra la disposición interna del diagrama de bloques que realiza los cálculos citados anteriormente.

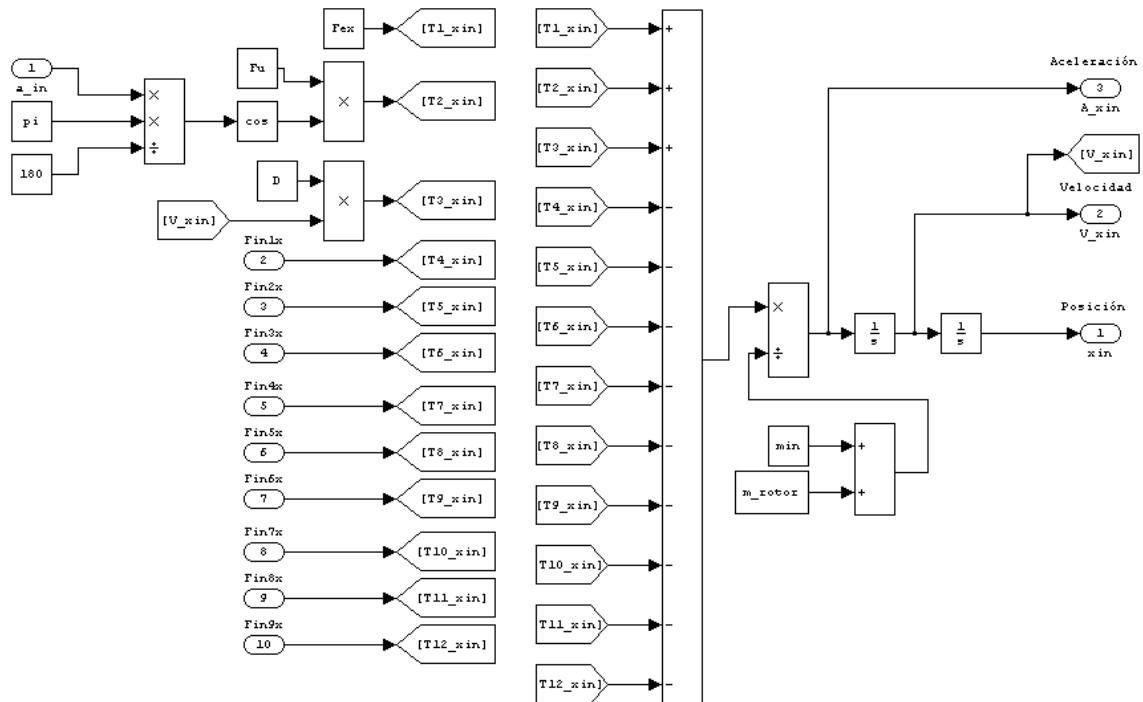


Figura 5.22 Diagrama de bloques interior del bloque x_{in} de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 9 bolas)

4. Bloque **A. Interno**, y_{in} .

En el bloque *A. Interno*, y_{in} se realiza la integración de la ecuación diferencial 3.66. La Figura 5.23 muestra el bloque de Simulink.

Las entradas que tiene este bloque son:

- La posición angular del rotor, a_{in} , que se corresponde con el ángulo α_{in}
- Las componentes según la dirección y de las fuerzas de reacción de las bolas sobre el anillo interno $Fin1y$, $Fin2y$, $Fin3y$, $Fin4y$, $Fin5y$, $Fin6y$, $Fin7y$, $Fin8y$ y $Fin9y$.

Las salidas que tiene este bloque son:

- La posición, según la dirección y del centro del anillo interno, y_{in} .
- La velocidad, según la dirección y del centro del anillo interno, V_{yin} .
- La aceleración, según la dirección y del centro del anillo interno, A_{yin} .

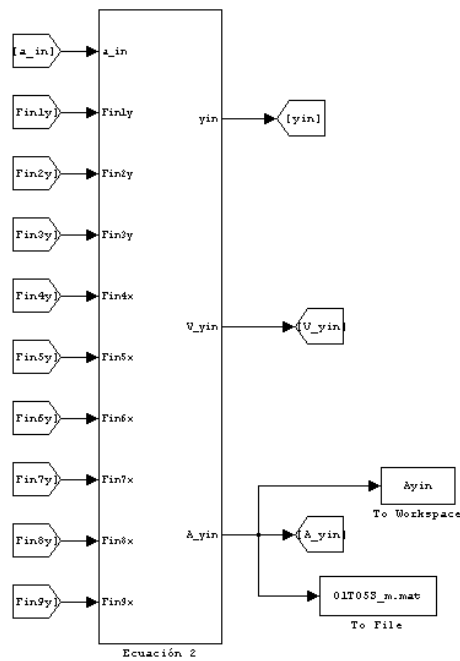


Figura 5.23 Bloque A. Interno, y_{in} de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 9 bolas)

La Figura 5.24 muestra la disposición interna del diagrama de bloques que realiza los cálculos citados anteriormente.

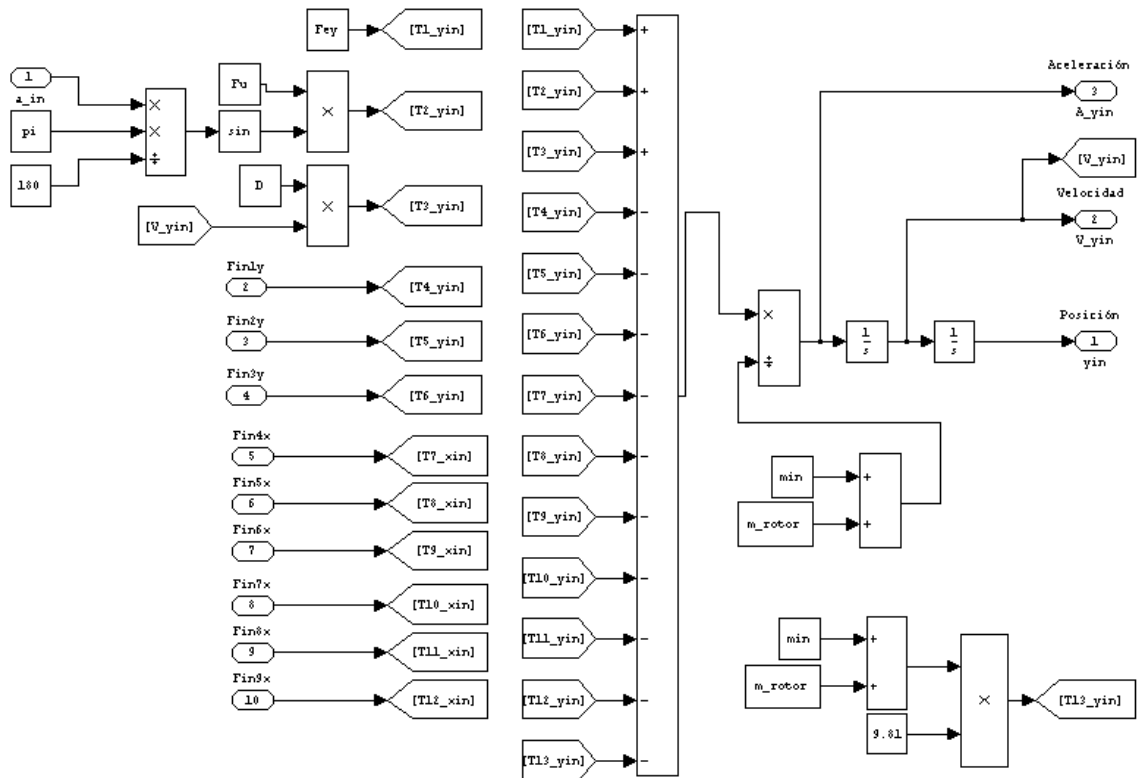


Figura 5.24 Diagrama de bloques interior del bloque y_{in} de Simulink (Newton, 2 G.D.L., 9 bolas)

5. Bloque **Resultados**.

En este bloque es idéntico al mostrado en la Figura 5.13 que corresponde al modelo de 2 G.D.L. y rodamiento de 3 bolas.

5.1.2. Modelo de 5 G.D.L.

Modelo con ecuaciones de Newton

En esta sección se construye un modelo en Simulink para integrar las ecuaciones diferenciales 3.118, 3.119, 3.120, 3.121 y 3.122.

En la Figura 5.25 se muestra la distribución de bloques principales para la construcción del modelo.

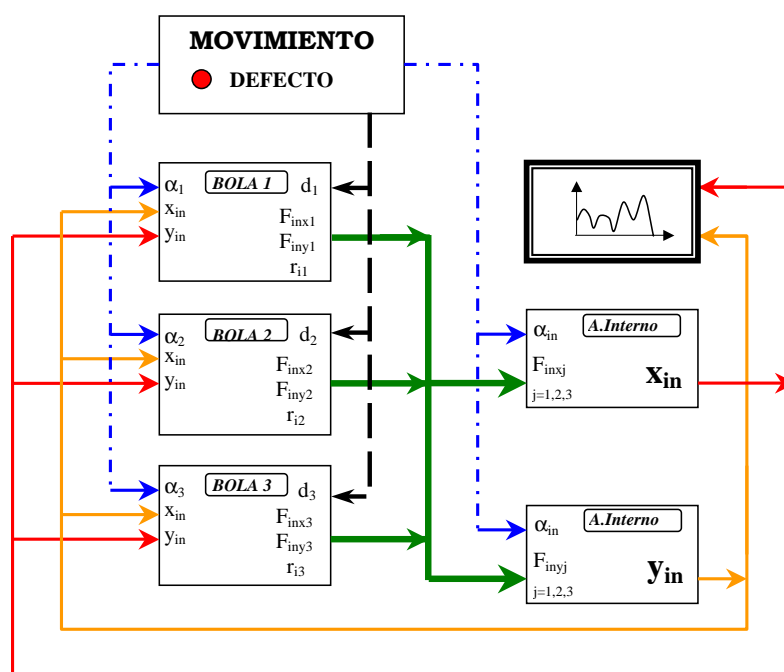


Figura 5.25 Diagrama de bloques del modelo en Simulink (Newton, 5 G.D.L., 3 bolas)

Como puede apreciarse en la Figura 5.25, el sistema queda representado mediante 7 bloques cuyas funciones y características principales se detallan seguidamente.

1. Bloque **Movimiento**.

Este bloque es idéntico al mostrado en la Figura 5.13 que corresponde al modelo de 2 G.D.L. y rodamiento de 3 bolas.

2. Bloque **Bola**.

En el bloque bola se realizan los cálculos de las ecuaciones diferenciales 3.120, 3.121 y 3.122. La Figura 5.26 muestra los bloques de Simulink de las tres bolas del rodamiento.

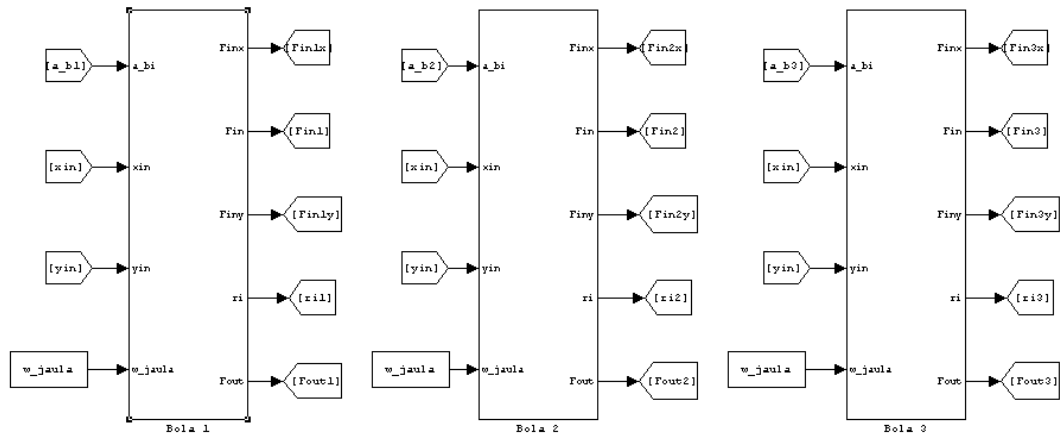


Figura 5.26 Bloques bola de Simulink (Newton, 5 G.D.L., 3 bolas)

Las entradas que tiene cada uno de estos bloques son:

- La posición angular de la bola, a_{b1} , a_{b2} y a_{b3} , que se corresponden con los ángulos α_1 , α_2 y α_3 respectivamente.
- La coordenada del centro del anillo interno, según el eje x , x_{in}
- La coordenada del centro del anillo interno, según el eje y , y_{in}
- La velocidad angular de la jaula, w_{jaula} que se corresponde con ω_{jaula}

Las salidas que tiene cada uno de estos bloques bola son:

- La fuerza radial de la bola sobre el anillo interno, $Fin1$, $Fin2$ y $Fin3$.
- Las componentes de la fuerza radial según el eje x , $Fin1x$, $Fin2x$ y $Fin3x$.
- Las componentes de la fuerza radial según el eje y , $Fin1y$, $Fin2y$ y $Fin3y$.
- La fuerza radial de la bola sobre el anillo externo, $Fout1$, $Fout2$ y $Fout3$.
- La posición radial de las bolas, $ri1$, $ri2$ y $ri3$.

La Figura 5.27 muestra la disposición interna del diagrama de bloques que realiza los cálculos citados anteriormente.

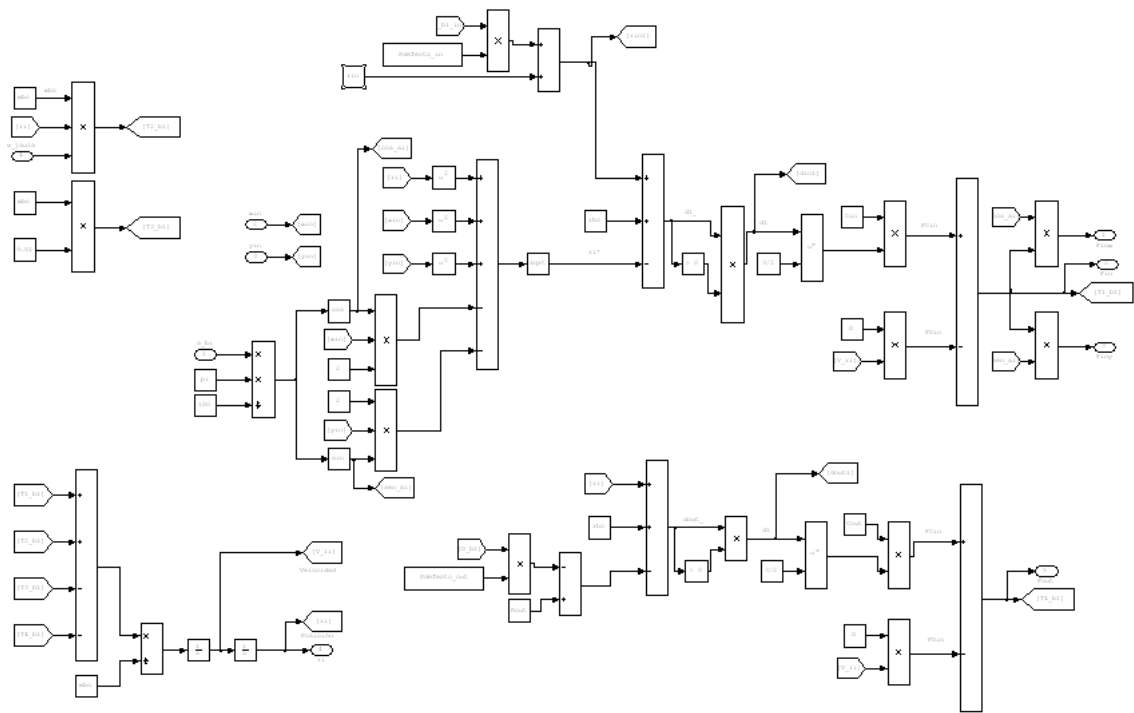


Figura 5.27 Diagrama de bloques interior del bloque bola de Simulink (Newton, 5 G.D.L., 3 bolas)

3. Bloque **A. Interno**, x_{in} .

En el bloque *A. Interno*, x_{in} se realiza la integración de la ecuación diferencial 3.118 . La Figura 5.28 muestra el bloque de Simulink .

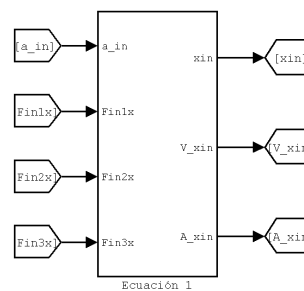


Figura 5.28 Bloque A. Interno, x_{in} de Simulink (Newton, 5 G.D.L., 3 bolas)

Las entradas que tiene este bloque son:

- La posición angular del rotor, a_{in} , que se corresponde con el ángulo α_{in}
- Las componentes según la dirección x de las fuerzas de reacción de las bolas sobre el anillo interno $Fin1x$, $Fin2x$ y $Fin3x$.

Las salidas que tiene este bloque son:

- La posición, según la dirección x , del centro del anillo interno, x_{in} .
- La velocidad, según la dirección x , del centro del anillo interno, V_{xin} .

- La aceleración, según la dirección x , del centro del anillo interno, Ax_{in} .

La Figura 5.29 muestra la disposición interna del diagrama de bloques que realiza los cálculos citados anteriormente.

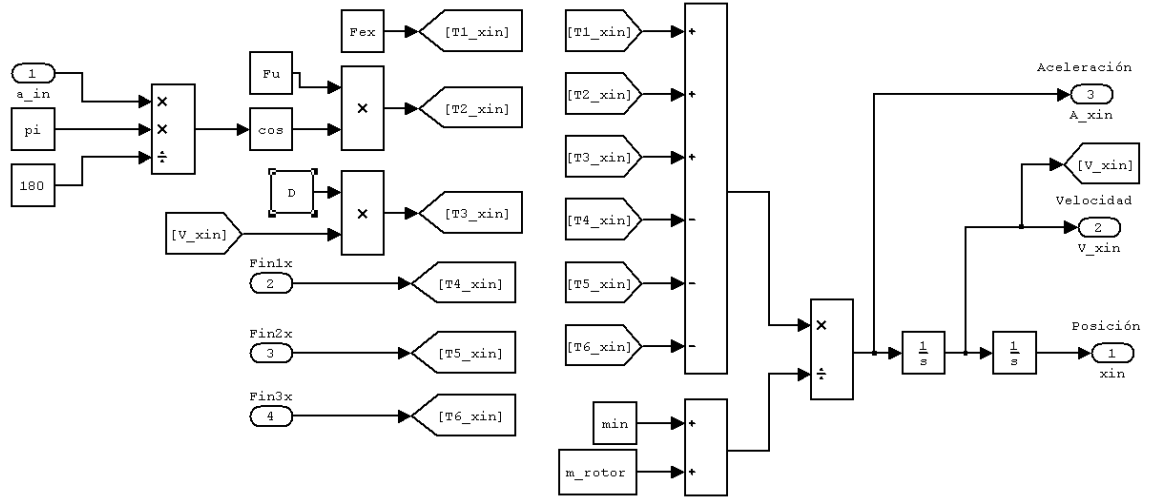


Figura 5.29 Diagrama de bloques interior del bloque x_{in} de Simulink (Newton, 5 G.D.L., 3 bolas)

En el interior de los bloques integradores, se definen las condiciones iniciales de integración.

4. Bloque **A. Interno**, y_{in} .

En el bloque *A. Interno*, y_{in} se realiza la integración de la ecuación diferencial 3.119 . La Figura 5.30 muestra el bloque de Simulink .

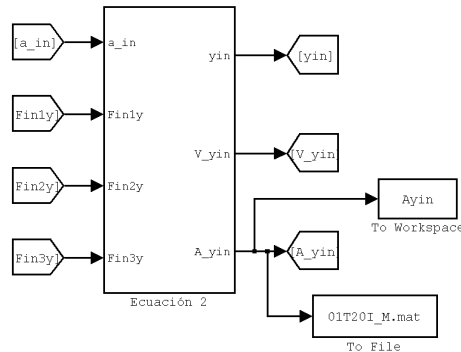


Figura 5.30 Bloque A. Interno, y_{in} de Simulink (Newton, 5 G.D.L., 3 bolas)

Las entradas que tiene este bloque son:

- La posición angular del rotor, a_{in} , que se corresponde con el ángulo α_{in}
- Las componentes según la dirección y de las fuerzas de reacción de las bolas sobre el anillo interno $Fin1y$, $Fin3y$ y $Fin3y$.

Las salidas que tiene este bloque son:

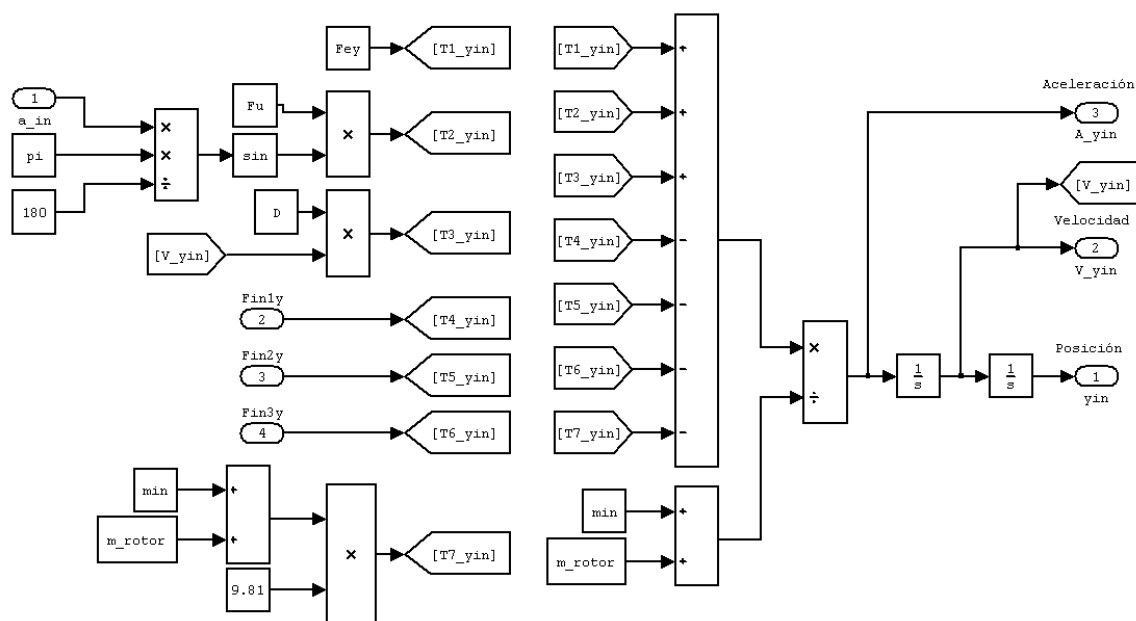


Figura 5.31 Diagrama de bloques interior del bloque y_{in} de Simulink (Newton, 5 G.D.L., 3 bolas)

- La posición, según la dirección y , del centro del anillo interno, y_{in} .
- La velocidad, según la dirección y , del centro del anillo interno, $V_{y_{in}}$.
- La aceleración, según la dirección y , del centro del anillo interno, $A_{y_{in}}$.

La Figura 5.31 muestra la disposición interna del diagrama de bloques que realiza los cálculos citados anteriormente.

En el interior de los bloques integradores, se definen las condiciones iniciales de integración.

5. Bloque **Resultados**.

En este bloque es idéntico al mostrado en la Figura 5.13 que corresponde al modelo de 2 G.D.L. y rodamiento de 3 bolas.

Modelo con ecuaciones de Lagrange

Se implementa ahora un modelo en Simulink para integrar las ecuaciones diferenciales 3.134, 3.135, 3.136, 3.137 y 3.138.

La distribución de bloques principales es idéntica a la mostrada en la Figura 5.25. Por tanto, el sistema queda representado mediante 7 bloques cuyas funciones y características principales pasamos a detallar seguidamente.

1. Bloque **Movimiento**.

Este bloque es idéntico al mostrado en la Figura 5.13 que corresponde al modelo de 2 G.D.L. y rodamiento de 3 bolas.

2. Bloques **Bola**.

En el bloque bola se realizan los cálculos de las ecuaciones diferenciales 3.136, 3.137 y 3.138. La Figura 5.32 muestra los bloques de Simulink de las tres bolas del rodamiento.

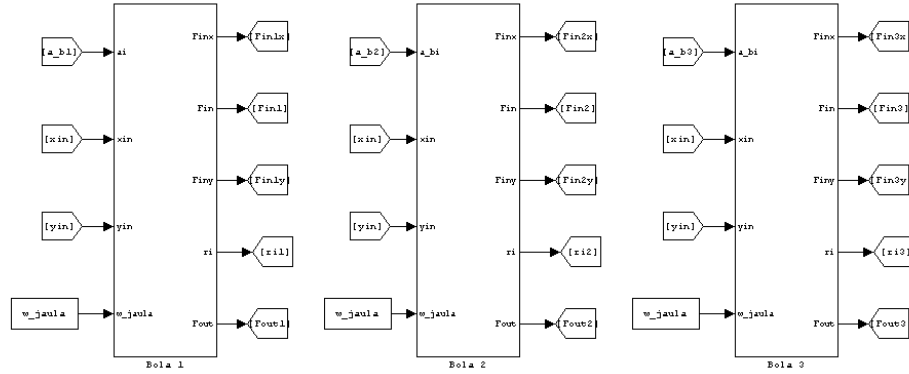


Figura 5.32 Bloques bola de Simulink (Lagrange, 5 G.D.L., 3 bolas)

Las entradas que tiene cada uno de estos bloques son:

- La posición angular de la bola, a_{b1} , a_{b2} y a_{b3} , que se corresponden con los ángulos α_1 , α_2 y α_3 respectivamente.
- La coordenada del centro del anillo interno, x_{in}
- La coordenada del centro del anillo interno, y_{in}
- La velocidad angular de la jaula, w_{jaula} que se corresponde con ω_{jaula}

Las salidas que tiene cada uno de estos bloques bola son:

- La fuerza radial de la bola sobre el anillo interno, $Fin1$, $Fin2$ y $Fin3$.
- Las componentes de la fuerza radial según el eje x , $Fin1x$, $Fin2x$ y $Fin3x$.
- Las componentes de la fuerza radial según el eje y , $Fin1y$, $Fin2y$ y $Fin3y$.
- La fuerza radial de la bola sobre el anillo externo, $Fout1$, $Fout2$ y $Fout3$.
- La posición radial de las bolas, $ri1$, $ri2$ y $ri3$.

La Figura 5.33 muestra la disposición interna del diagrama de bloques que realiza los cálculos citados anteriormente.

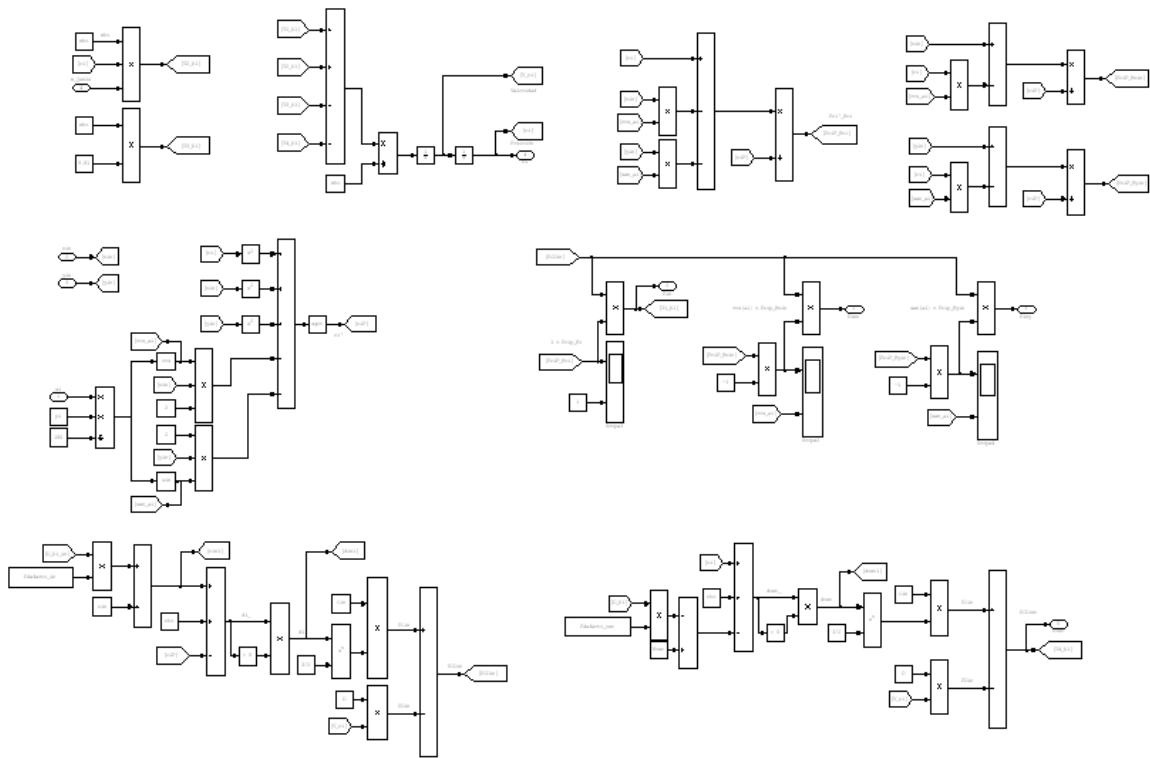


Figura 5.33 Diagrama de bloques interior del bloque bola de Simulink (Lagrange, 5 G.D.L., 3 bolas)

3. Bloque **A. Interno**, x_{in} .

En el bloque *A. Interno*, x_{in} se realiza la integración de la ecuación diferencial 3.134. La Figura 5.34 muestra el bloque de Simulink.

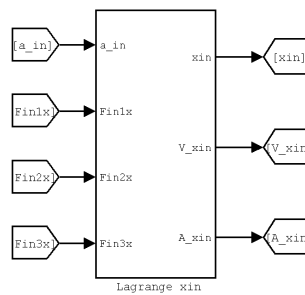


Figura 5.34 Bloque A. Interno, x_{in} de Simulink (Lagrange, 5 G.D.L., 3 bolas)

Las entradas que tiene este bloque son:

- La posición angular del rotor, a_{in} , que se corresponde con el ángulo α_{in}
- Las componentes según la dirección x de las fuerzas de reacción de las bolas sobre el anillo interno $Fin1x$, $Fin2x$ y $Fin3x$.

Las salidas que tiene este bloque son:

- La posición, según la dirección x , del centro del anillo interno, x_{in} .

- La velocidad, según la dirección x , del centro del anillo interno, V_{xin} .
- La aceleración, según la dirección x , del centro del anillo interno, A_{xin} .

La Figura 5.35 muestra la disposición interna del diagrama de bloques que realiza los cálculos citados anteriormente.

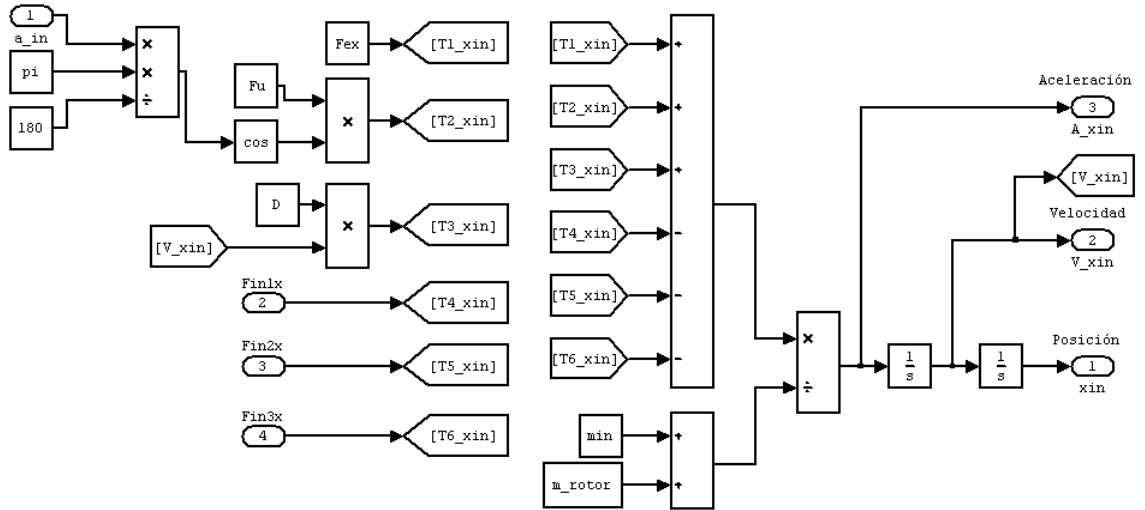


Figura 5.35 Diagrama de bloques interior del bloque x_{in} de Simulink (Lagrange, 5 G.D.L., 3 bolas)

En el interior de los bloques integradores, se definen las condiciones iniciales de integración.

4. Bloque **A. Interno**, y_{in} .

En el bloque *A. Interno*, y_{in} se realiza la integración de la ecuación diferencial 3.135. La Figura 5.36 muestra el bloque de Simulink.

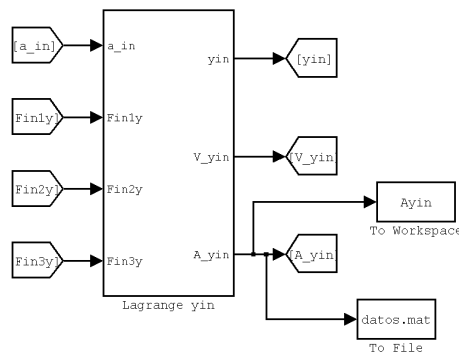


Figura 5.36 Bloque *A. Interno*, y_{in} de Simulink (Lagrange, 5 G.D.L., 3 bolas)

Las entradas que tiene este bloque son:

- La posición angular del rotor, a_{in} , que se corresponde con el ángulo α_{in}
- Las componentes según la dirección y de las fuerzas de reacción de las bolas sobre el anillo interno $Fin1y$, $Fin2y$ y $Fin3y$.

Las salidas que tiene este bloque son:

- La posición, según la dirección y del centro del anillo interno, y_{in} .
- La velocidad, según la dirección y del centro del anillo interno, V_{yin} .
- La aceleración, según la dirección y del centro del anillo interno, A_{yin} .

La Figura 5.37 muestra la disposición interna del diagrama de bloques que realiza los cálculos citados anteriormente.

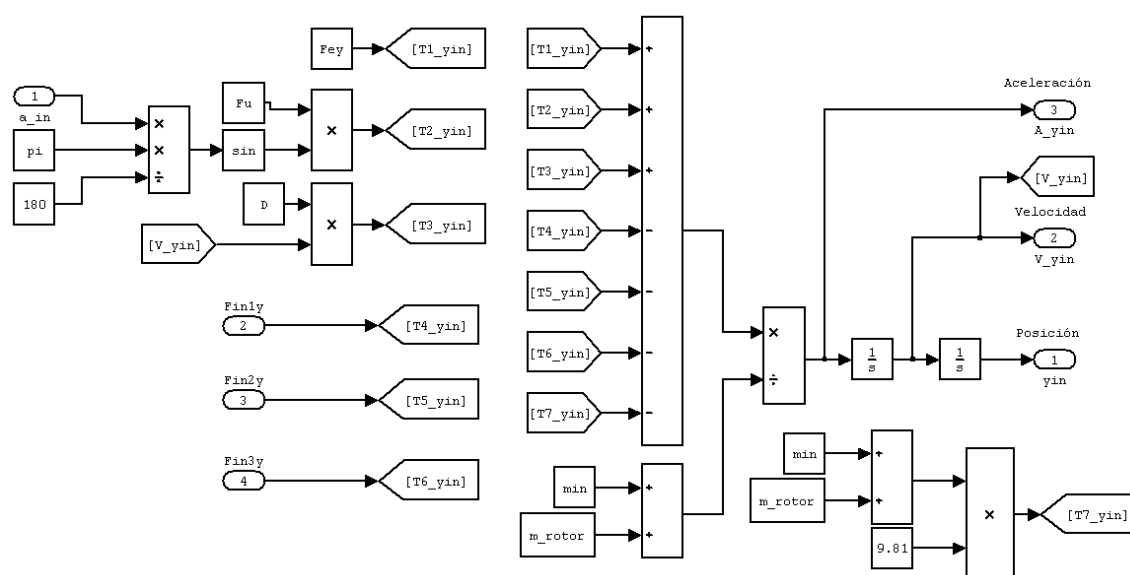


Figura 5.37 Diagrama de bloques interior del bloque y_{in} de Simulink (Lagrange, 5 G.D.L., 3 bolas)

En el interior de los bloques integradores, se definen las condiciones iniciales de integración.

5. Bloque **Resultados**.

En este bloque es idéntico al mostrado en la Figura 5.13 que corresponde al modelo de 2 G.D.L. y rodamiento de 3 bolas.

5.1.3. Modelo de 11 G.D.L.

Modelo con ecuaciones de Newton

Se implementa, en esta ocasión, un modelo en Simulink para integrar las ecuaciones diferenciales 3.123, 3.124, 3.125, 3.126, 3.127, 3.128, 3.129, 3.130, 3.131, 3.132 y 3.133. En la Figura 5.38 se muestra la distribución de bloques principales para la construcción del modelo.

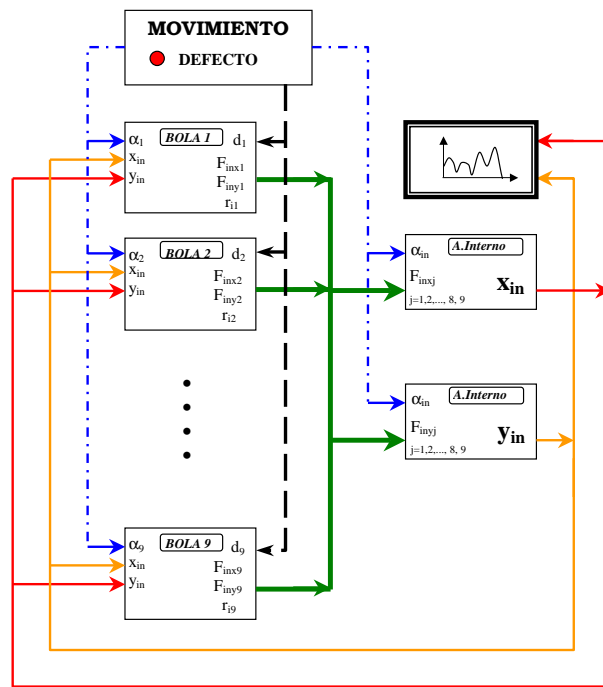


Figura 5.38 Diagrama de bloques Simulink (Newton, 11 G.D.L., 9 bolas)

Como puede apreciarse en la Figura 5.38, el sistema queda representado mediante 13 bloques cuyas funciones y características principales se detallan seguidamente.

1. Bloque **Movimiento**.

La disposición de este bloque se muestra en la Figura 5.39. Sus funciones son idénticas al que corresponde al modelo de 5 G.D.L. adaptado a 11 G.D.L..

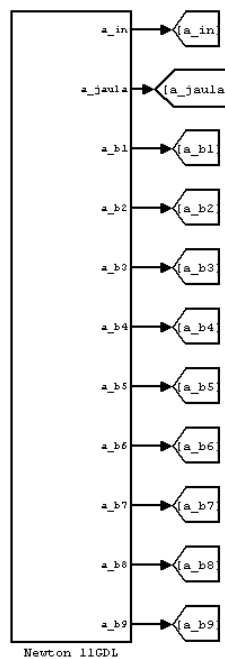


Figura 5.39 Bloque Movimiento de Simulink (Newton, 11 G.D.L., 9 bolas)

2. Bloques **Bola**.

En el bloque bola se realizan los cálculos de las ecuaciones diferenciales 3.125, 3.126, 3.127, 3.128, 3.129, 3.130, 3.131, 3.132 y 3.133. La Figura 5.40 muestra los bloques de Simulink de las nueve bolas del rodamiento.

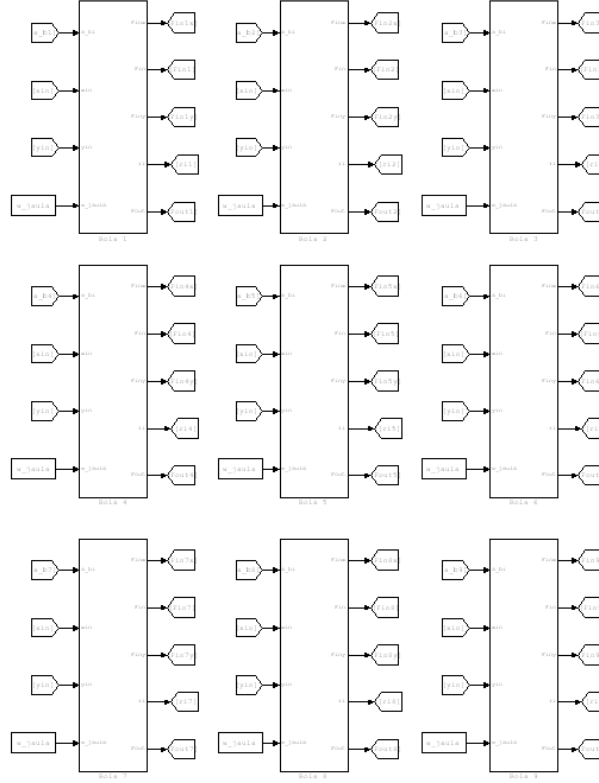


Figura 5.40 Bloques bola de Simulink (Newton, 11 G.D.L., 9 bolas)

Las entradas que tiene cada uno de estos bloques son:

- La posición angular de la bola, a_b1 , a_b2 , a_b3 , a_b4 , a_b5 , a_b6 , a_b7 , a_b8 y a_b9 , que se corresponden con α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , α_5 , α_6 , α_7 , α_8 y α_9
- La coordenada del centro del anillo interno, x_{in}
- La coordenada del centro del anillo interno, y_{in}
- La velocidad angular de la jaula, w_jaula que se corresponde con ω_{jaula}

Las salidas que tiene cada uno de estos bloques $bola_i$, $i=1,2,3,4,5,6,7,8,9$ son:

- La fuerza radial de la bola sobre el anillo interno, Fin_i , $i=1,2,3,4,5,6,7,8,9$.
- Las componentes de la fuerza radial según el eje x , Fin_{ix} , $i=1,2,3,4,5,6,7,8,9$.
- Las componentes de la fuerza radial según el eje y , Fin_{iy} , $i=1,2,3,4,5,6,7,8,9$.
- La fuerza radial de la bola sobre el anillo externo, $Fout_i$, $i=1,2,3,4,5,6,7,8,9$.
- La posición radial de las bolas, ri_i , $i=1,2,3,4,5,6,7,8,9$.

La Figura 5.41 muestra la disposición interna del diagrama de bloques que realiza los cálculos citados anteriormente.

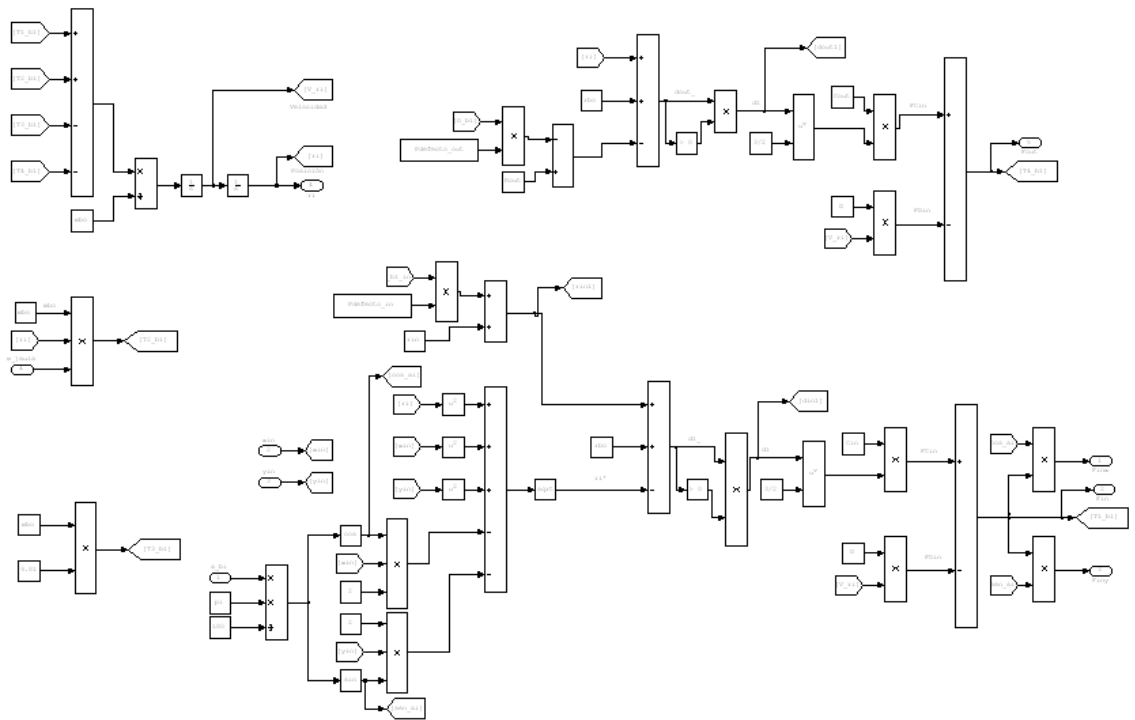


Figura 5.41 Diagrama de bloques interior del bloque bola de Simulink (Newton, 11 G.D.L., 9 bolas)

3. Bloque A. Interno, x_{in} .

En el bloque A. Interno, x_{in} se realiza la integración de la ecuación diferencial 3.123 . La Figura 5.42 muestra el bloque de Simulink .

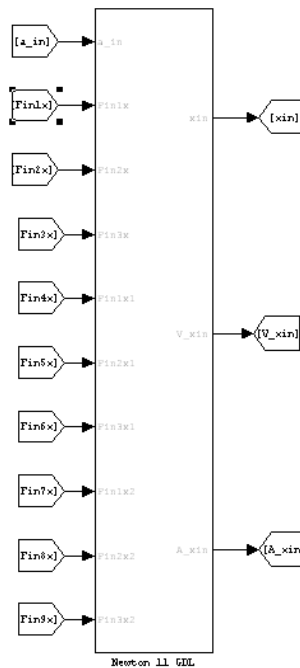


Figura 5.42 Bloque A. Interno, x_{in} de Simulink (Newton, 11 G.D.L., 9 bolas)

Las entradas que tiene este bloque son:

- La posición angular del rotor, a_{in} , que se corresponde con el ángulo α_{in}
- Las componentes según la dirección x de las fuerzas de reacción de las bolas sobre el anillo interno $Fin1x$, $Fin2x$, $Fin3x$, $Fin4x$, $Fin5x$, $Fin6x$, $Fin7x$, $Fin8x$ y $Fin9x$.

Las salidas que tiene este bloque son:

- La posición, según la dirección x , del centro del anillo interno, x_{in} .
- La velocidad, según la dirección x , del centro del anillo interno, Vx_{in} .
- La aceleración, según la dirección x , del centro del anillo interno, Ax_{in} .

La Figura 5.43 muestra la disposición interna del diagrama de bloques que realiza los cálculos citados anteriormente.

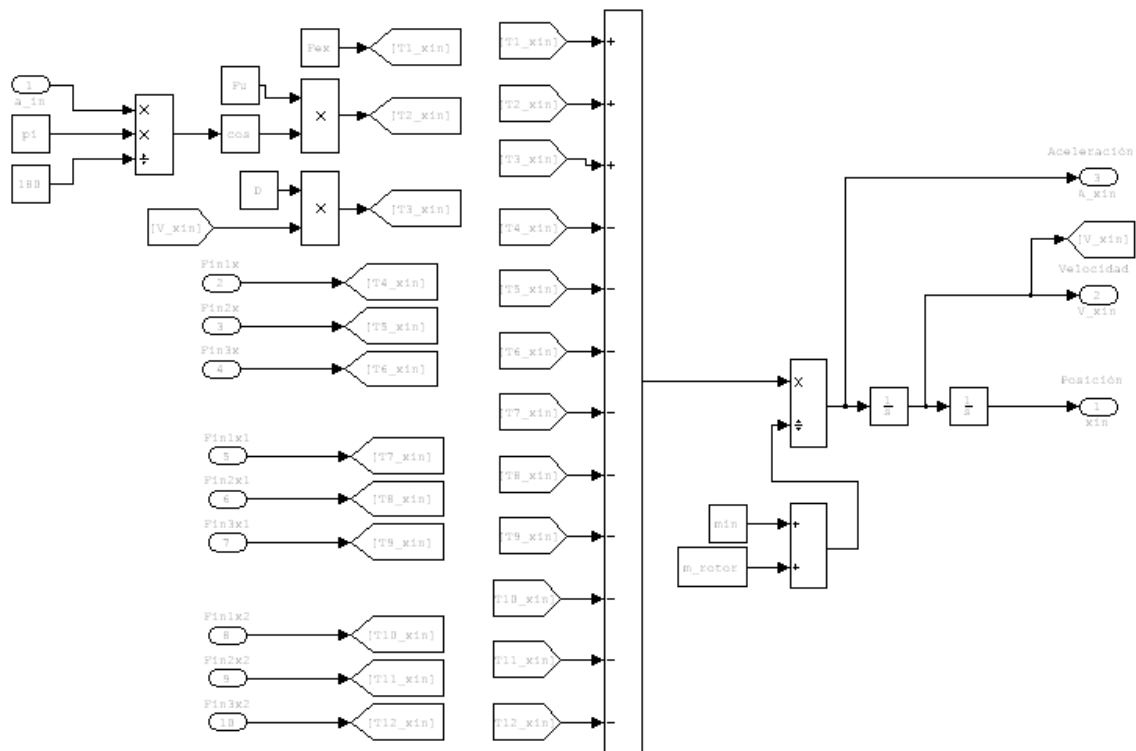


Figura 5.43 Diagrama de bloques interior del bloque x_{in} de Simulink (Newton, 11 G.D.L., 9 bolas)

En el interior de los bloques integradores, se definen las condiciones iniciales de integración.

4. Bloque **A. Interno**, y_{in} .

En el bloque *A. Interno*, y_{in} se realiza la integración de la ecuación diferencial 3.124. La Figura 5.44 muestra el bloque de Simulink .

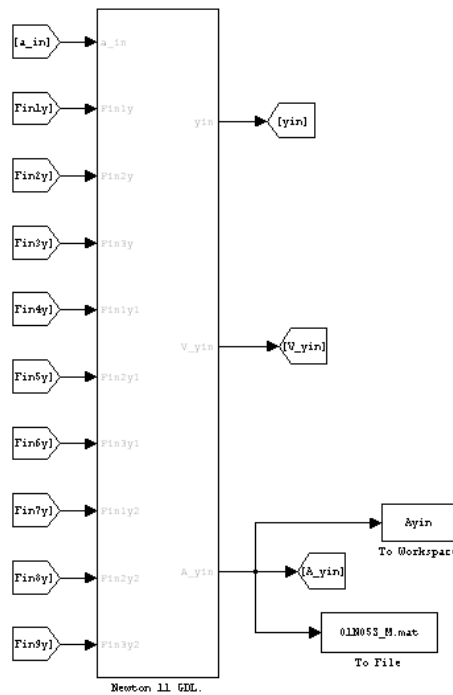


Figura 5.44 Bloque A. Interno, y_{in} de Simulink (Newton, 11 G.D.L., 9 bolas)

Las entradas que tiene este bloque son:

- La posición angular del rotor, a_{in} , que se corresponde con α_{in}
- Las componentes según la dirección x de las fuerzas de reacción de las bolas sobre el anillo interno $Fin1y$, $Fin3y$ y $Fin3y$.

Las salidas que tiene este bloque son:

- La posición, según la dirección y , del centro del anillo interno, y_{in} .
- La velocidad, según la dirección y , del centro del anillo interno, Vy_{in} .
- La aceleración, según la dirección y , del centro del anillo interno, Ay_{in} .

La Figura 5.45 muestra la disposición interna del diagrama de bloques que realiza los cálculos citados anteriormente.

En el interior de los bloques integradores, se definen las condiciones iniciales de integración.

5. Bloque **Resultados**.

En este bloque es idéntico al mostrado en la Figura 5.13 que corresponde al modelo de 2 G.D.L. y rodamiento de 3 bolas.

Modelo con ecuaciones de Lagrange

Se implementa ahora, un modelo en Simulink para integrar las ecuaciones diferenciales 3.139, 3.140, 3.141, 3.142, 3.143, 3.144, 3.145, 3.146, 3.147, 3.148 y 3.149. En la Figura 5.46 se muestra la distribución de bloques principales para la construcción del modelo.

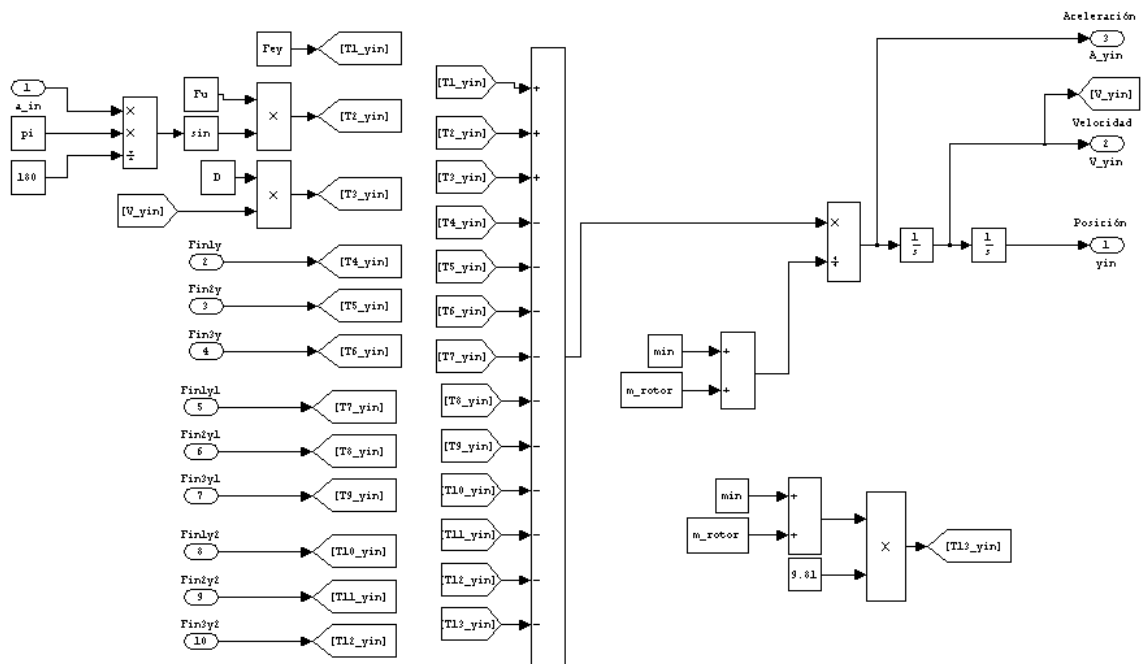


Figura 5.45 Diagrama de bloques interior del bloque y_{in} de Simulink (Newton, 11 G.D.L., 9 bolas)

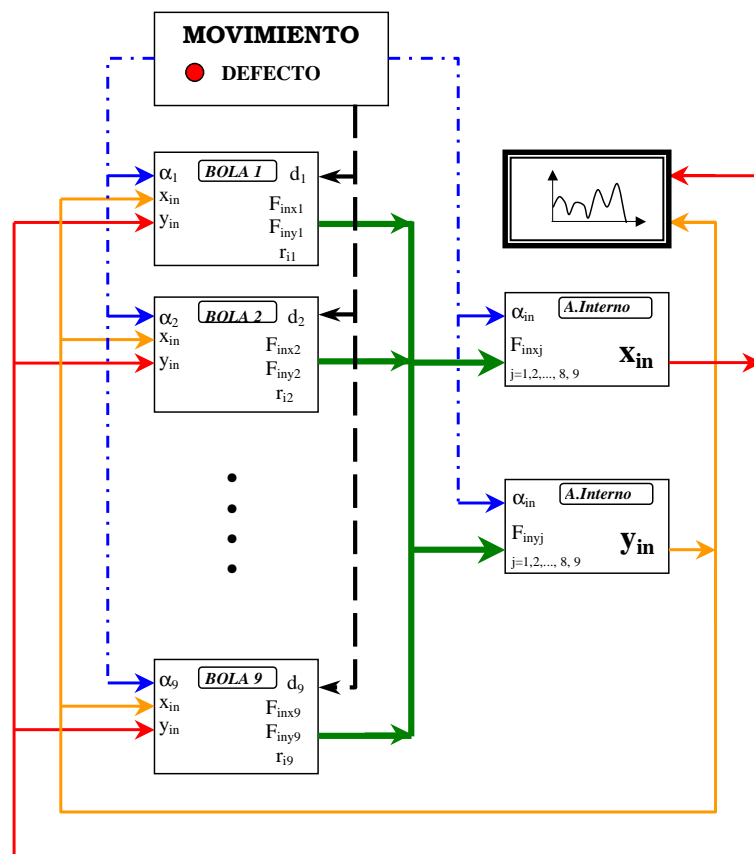


Figura 5.46 Diagrama de bloques Simulink (Lagrange, 11 G.D.L., 9 bolas)

Como puede apreciarse en la Figura 5.46, el sistema queda representado al igual que ocurría

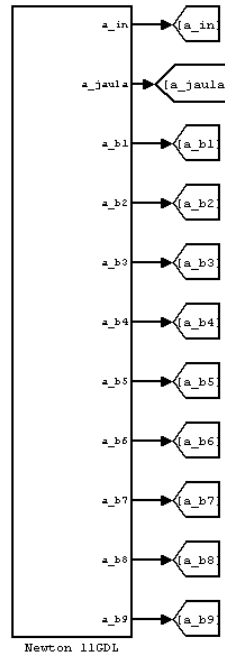


Figura 5.47 Bloques Movimiento de Simulink (Lagrange, 11 G.D.L., 9 bolas)

con las ecuaciones de Newton, mediante 13 bloques.

1. Bloque **Movimiento**.

La disposición de este bloque se muestra en la Figura 5.47. Sus funciones son idénticas al que corresponde al modelo de 5 G.D.L. adaptado a 11 G.D.L..

2. Bloques **Bola**.

En el bloque bola se realizan los cálculos de las ecuaciones diferenciales 3.141, 3.142, 3.143, 3.144, 3.145, 3.146, 3.147, 3.148 y 3.149. La Figura 5.48 muestra los bloques de Simulink de las nueve bolas del rodamiento.

Las entradas que tiene cada uno de estos bloques son:

- La posición angular de la bola, a_b1 , a_b2 , a_b3 , a_b4 , a_b5 , a_b6 , a_b7 , a_b8 y a_b9 , que se corresponden con α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , α_5 , α_6 , α_7 , α_8 y α_9
- La coordenada del centro del anillo interno, x_{in}
- La coordenada del centro del anillo interno, y_{in}
- La velocidad angular de la jaula, w_jaula que se corresponde con ω_{jaula}

Las salidas que tiene cada uno de estos bloques bola_i , $i=1,2,3,4,5,6,7,8,9$ son:

- La fuerza radial de la bola sobre el anillo interno, Fin_i , $i=1,2,3,4,5,6,7,8,9$.
- Las componentes de la fuerza radial según el eje x , Fin_ix , $i=1,2,3,4,5,6,7,8,9$.
- Las componentes de la fuerza radial según el eje y , Fin_iy , $i=1,2,3,4,5,6,7,8,9$.
- La fuerza radial de la bola sobre el anillo externo, $Fout_i$, $i=1,2,3,4,5,6,7,8,9$.
- La posición radial de las bolas, ri_i , $i=1,2,3,4,5,6,7,8,9$.

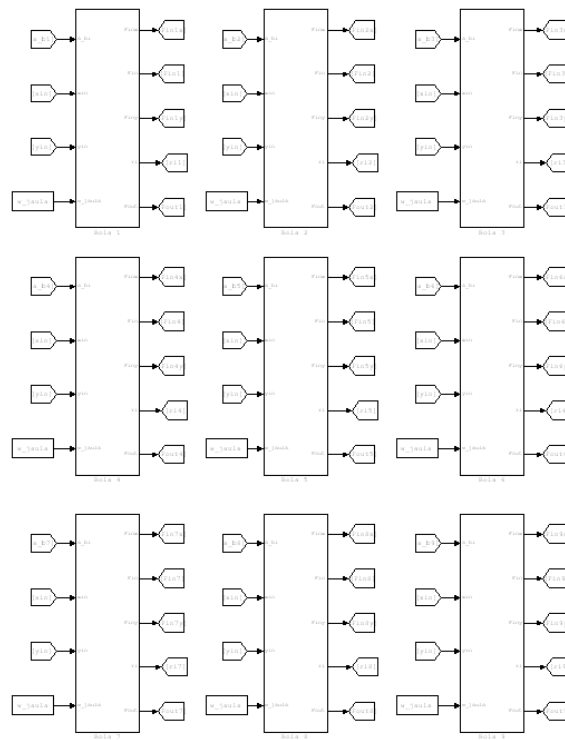


Figura 5.48 Bloques bola de Simulink (Lagrange, 11 G.D.L., 9 bolas)

La Figura 5.41 muestra la disposición interna del diagrama de bloques que realiza los cálculos citados anteriormente.

3. Bloque **A. Interno**, x_{in} .

En el bloque *A. Interno*, x_{in} se realiza la integración de la ecuación diferencial 3.139 . La Figura 5.50 muestra el bloque de Simulink .

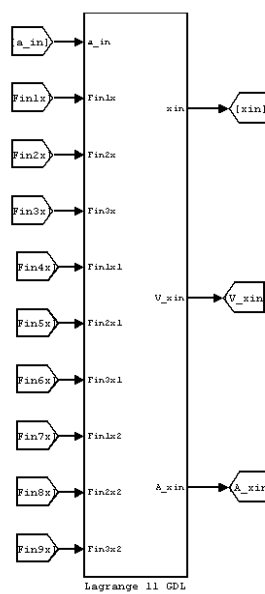


Figura 5.50 Bloque A. Interno, x_{in} de Simulink (Lagrange, 11 G.D.L., 9 bolas)

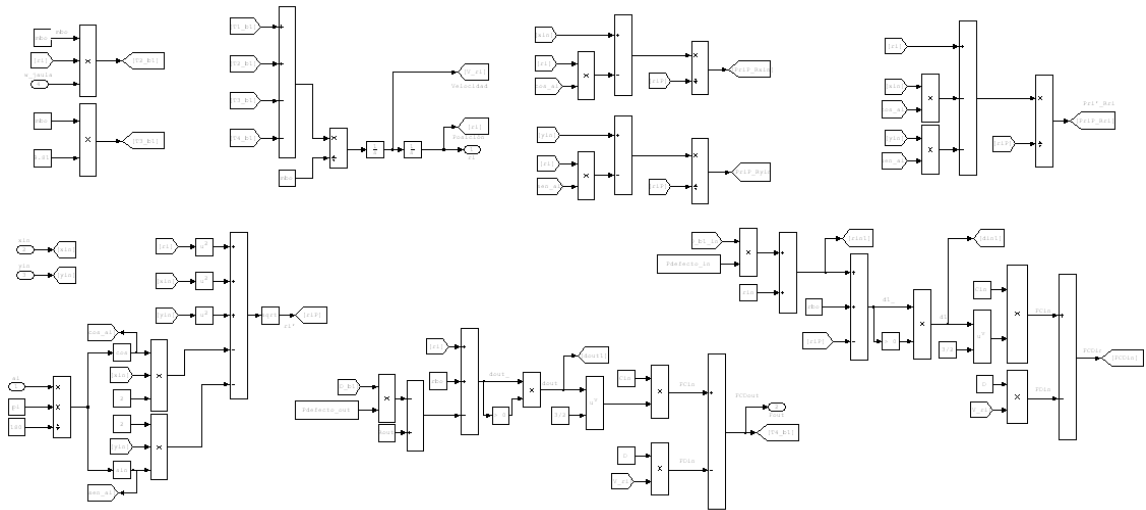


Figura 5.49 Diagrama de bloques interior del bloque bola de Simulink (Lagrange, 11 G.D.L., 9 bolas)

Las entradas que tiene este bloque son:

- La posición angular del rotor, a_{in} , que se corresponde con el ángulo α_{in}
- Las componentes según la dirección x de las fuerzas de reacción de las bolas sobre el anillo interno $Fin1x$, $Fin2x$, $Fin3x$, $Fin4x$, $Fin5x$, $Fin6x$, $Fin7x$, $Fin8x$ y $Fin9x$.

Las salidas que tiene este bloque son:

- La posición, según la dirección x , del centro del anillo interno, x_{in} .
- La velocidad, según la dirección x , del centro del anillo interno, Vx_{in} .
- La aceleración, según la dirección x , del centro del anillo interno, Ax_{in} .

La Figura 5.51 muestra la disposición interna del diagrama de bloques que realiza los cálculos citados anteriormente.

En el interior de los bloques integradores, se definen las condiciones iniciales de integración.

4. Bloque **A. Interno**, y_{in} .

En el bloque *A. Interno*, y_{in} se realiza la integración de la ecuación diferencial 3.140. La Figura 5.52 muestra el bloque de Simulink .

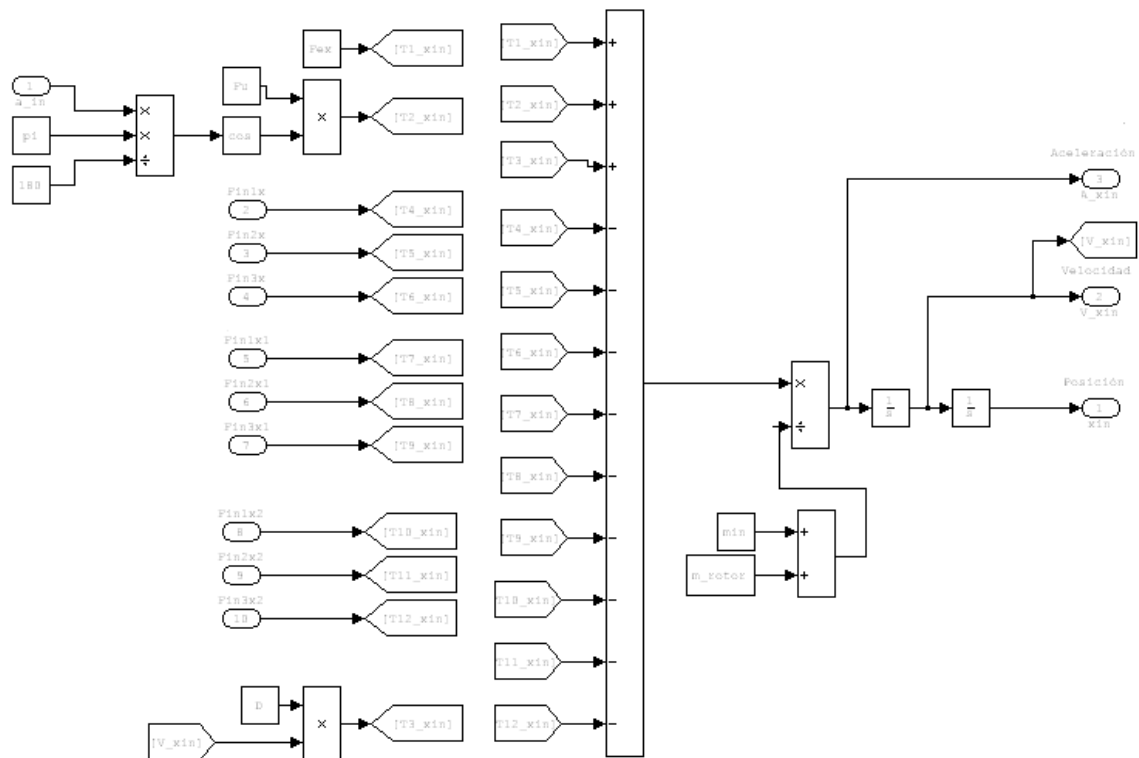


Figura 5.51 Diagrama de bloques interior del bloque x_{in} de Simulink (Lagrange, 11 G.D.L., 9 bolas)

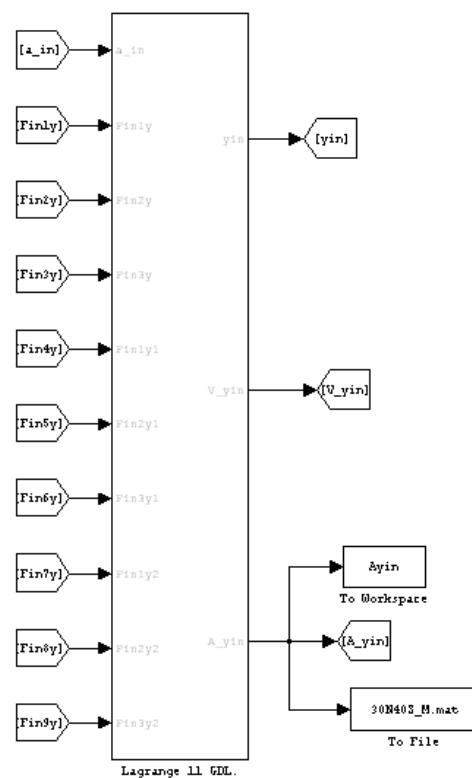


Figura 5.52 Bloque A. Interno, y_{in} de Simulink (Lagrange, 11 G.D.L., 9 bolas)

Las entradas que tiene este bloque son:

- La posición angular del rotor , a_{in} , que se corresponde con α_{in}
- Las componentes según la dirección x de las fuerzas de reacción de las bolas sobre el anillo interno $Fin1y$, $Fin3y$ y $Fin3y$.

Las salidas que tiene este bloque son:

- La posición, según la dirección y , del centro del anillo interno, y_{in} .
- La velocidad, según la dirección y , del centro del anillo interno, V_{yin} .
- La aceleración, según la dirección y , del centro del anillo interno, A_{yin} .

La Figura 5.53 muestra la disposición interna del diagrama de bloques que realiza los cálculos citados anteriormente.

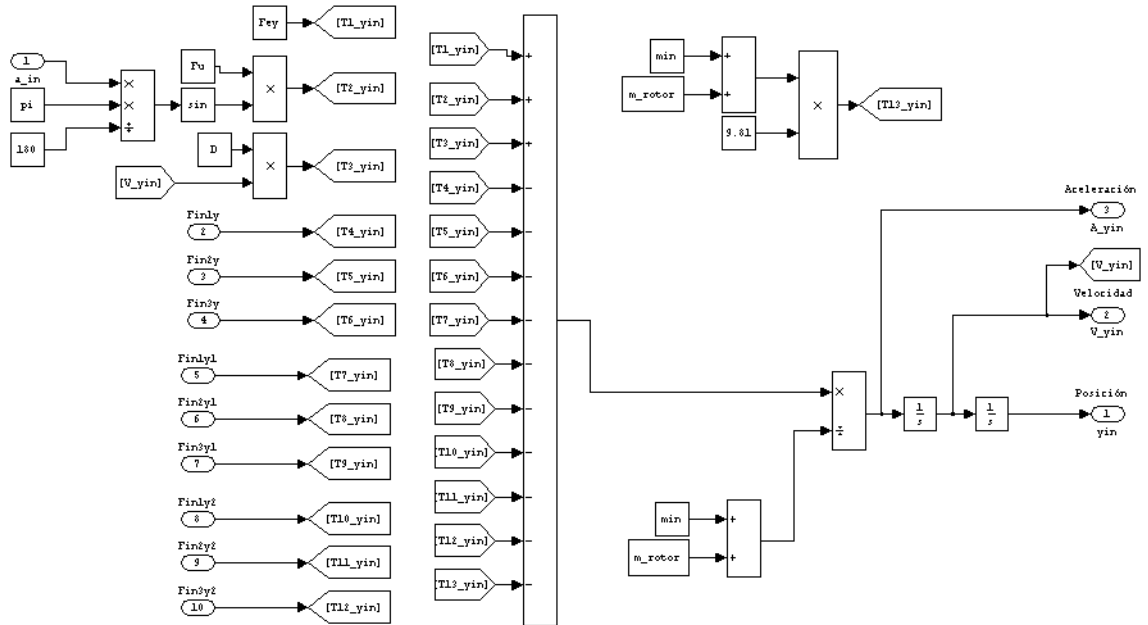


Figura 5.53 Diagrama de bloques interior del bloque y_{in} de Simulink (Lagrange, 11 G.D.L., 9 bolas)

En el interior de los bloques integradores, se definen las condiciones iniciales de integración.

5. Bloque **Resultados**.

En este bloque es idéntico al mostrado en la Figura 5.13 que corresponde al modelo de 2 G.D.L. y rodamiento de 3 bolas.

5.1.4. Diseño de simulaciones

En este apartado, puesto que ya se tienen implementados los diferentes modelos en Simulink, se deben definir los parámetros de simulación y los archivos de datos que han de

generarse para poder validar los modelos comparando las señales resultantes con las señales obtenidas en la parte experimental, siempre en idénticas condiciones de funcionamiento.

Los principales valores y constantes empleados en las simulaciones de los modelos, se encuentran en un fichero de Matlab denominado DATOS.m . Este programa debe ejecutarse antes de realizar la simulación del modelo con Simulink y todos los parámetros quedan cargados en el workspace, de donde los modelos pueden tomar los valores necesarios.

El listado de valores que hay que introducir con el archivo DATOS.m son los siguientes:

- Características geométricas y másicas del rodamiento y rotor
 - Radio de la pista de rodadura externa
 - Radio de la pista de rodadura interna
 - Radio de los elementos rodantes
 - Holgura radial
 - Masa del anillo externo
 - Masa del anillo interno
 - Masa de las bolas
 - Masa del rotor
- Condiciones de funcionamiento:
 - Velocidad angular del rotor
- Características dinámicas del rodamiento:
 - Constante de rigidez del contacto bola-anillo externo
 - Constante de rigidez del contacto bola-anillo interno
 - Coeficiente amortiguamiento contacto bola-anillo externo
 - Coeficiente amortiguamiento contacto bola-anillo interno
- Condiciones iniciales:
 - Posición del centro del anillo interno
 - Posición radial de las bolas (modelo 5 GDL)
- Condiciones de carga:
 - Fuerza según dirección 'x' que actúa sobre el rotor
 - Fuerza según dirección 'y' que actúa sobre el rotor
 - Fuerza rotor desequilibrado
- Definición de defectos:
 - Defecto en anillo externo: posición inicial, profundidad, anchura.
 - Defecto en anillo interno: posición inicial, profundidad, anchura.

Una vez se han determinado los valores de todas las condiciones iniciales del modelo, se procede a la simulación. En primer lugar, se definen los parámetros de la simulación en Simulink. Para ello se accede al Solver de Simulink y aparece una ventana como muestra la Figura 5.54

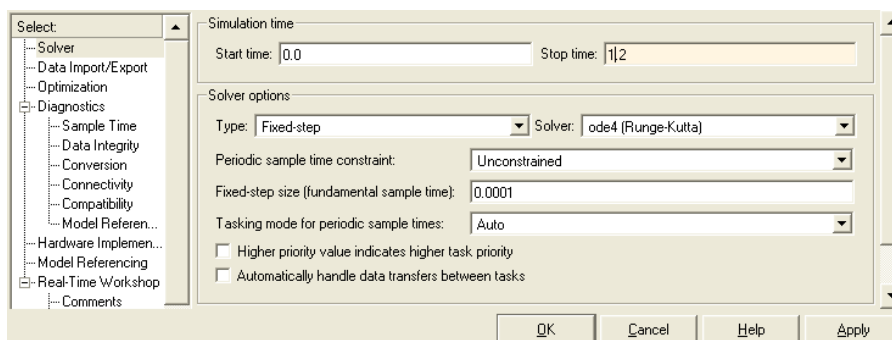


Figura 5.54 Configuración de los parámetros del Solver de Simulink

La pestaña Solver permite modificar los cuatro parámetros principales: el tiempo de la simulación, el método de integración, el tamaño de pasos máximo y mínimo (incremento de tiempo) y los márgenes de error (tolerancia relativa y absoluta):

1. Tiempo de simulación. Los parámetros *Start time* y *Stop time* sirven para especificar los instantes de tiempo en los que la simulación comienza y termina. Por defecto, el tiempo inicial es de 0 s.
2. Método de integración (Solver Options). Es el método matemático que utiliza SIMULINK para realizar la simulación de los modelos, esto es, el método utilizado para la integración de las ecuaciones diferenciales por las que se rige el comportamiento del modelo. Debido al comportamiento de los distintos sistemas dinámicos, algunos métodos pueden ser más eficientes que otros, según el sistema de que se trate.

Se puede elegir entre métodos de paso variable (*Variable – step*) o de paso fijo (*Fixed – step*). Los métodos de paso variable permiten modificar el incremento de tiempo o paso de la simulación, mientras que los de paso fijo mantienen el mismo paso durante toda la simulación.

Entre los métodos de paso variable se puede elegir los siguientes métodos de resolución:

- *ode45*. Este es un método de un solo paso, es decir, para averiguar el valor de un punto, se basa en el valor del cálculo del paso anterior. En general, es el método más apropiado para solucionar la mayoría de los problemas. Está basado en una fórmula explícita de Runge-Kutta (4,5).
- *ode23*. Este método puede resultar más eficiente que el método *ode45* para altas tolerancias o en presencia de sistemas suaves (*stiff*) en que coexisten dinámicas lentas y rápidas y éstas últimas alcanzan su estado estacionario. Un método apropiado para un sistema *stiff* es capaz de tomar grandes pasos de integración e ignorar las partes del sistema cuya respuesta ha alcanzado ya el estado estacionario. Está basado en la fórmula explícita de Runge-Kutta (2,3).

- *ode113*. Se trata de un método que puede ser más eficaz que el método *ode45* para tolerancias ajustadas. Es un método multipaso, es decir, necesita conocer el resultado de varios puntos anteriores para calcular la solución de un paso.
- *ode15s*. Es un método de varios pasos. Se puede usar cuando aparece un sistema stiff, o cuando el método *ode45* no es lo suficientemente eficaz.
- *ode23s*. Este es otro método de un solo paso, por lo que puede ser más eficaz que el método *ode15s* para altas tolerancias. Puede resolver varias clases de sistemas stiff más eficazmente que el método *ode15s*. Está basado en la fórmula modificada de Rosenbrock de orden 2.
- *discrete*. Es el método que usa SIMULINK cuando detecta que el modelo no tiene estados continuos.

Los métodos de paso fijo que se pueden usar son:

- *ode5*. Es la versión de paso fijo del método *ode45* (fórmula de Dormand-Prince).
- *ode4*. Es la fórmula de Runge-Kutta de orden 4.
- *ode3*. Es la versión de paso fijo del método *ode23* (fórmula de Bogacki-Shampine).
- *ode2*. Es el método de Heun, también conocido como fórmula mejorada de Euler.
- *ode1*. Método de Euler.
- *discrete*. Es un método de paso fijo que funciona sin integrar. Está indicado para modelos sin estados continuos.

3. Tamaños de paso máximo y mínimo. En los sistemas de paso variable se puede fijar el tamaño de paso máximo y sugerir el tamaño de paso mínimo. En los sistemas de paso fijo, podemos fijar el tamaño de paso.

- Tamaño de paso máximo (Max Step Size). Es el mayor tiempo de paso que utiliza el método de resolución. Por defecto, viene determinado por los tiempos de inicio y de finalización.
- Tamaño de paso mínimo (Min Step Size). Por defecto, el método de resolución fija el tamaño de paso inicial en relación con el tiempo de inicio de la simulación. Si se fija el tamaño de paso mínimo, pero no se cumple el error mínimo, SIMULINK reduce el tamaño de paso mínimo.

4. Margen de error. Podemos controlar en la simulación el error en cada estado. Esto se valora con la tolerancia relativa y absoluta.

- Tolerancia relativa (Relative tolerance). Mide el error relativo de cada estado. La tolerancia relativa representa un porcentaje del valor de cada estado. Por defecto, la tolerancia relativa está establecida en 0,001. Esto significa que el valor tendrá una exactitud del 0.1 %.
- Tolerancia absoluta (Absolute tolerance). Es el valor del umbral de error. Representa como error aceptable el valor de la medida del estado más próximo a cero.

Tiempo inicial	0
Tiempo final, sg.	2.2
Paso de simulación fijo	<i>Fixed – step</i>
Incremento del paso	0.0001
Método de integración	<i>Paso Fijo</i> <i>ode4</i>
Resto parámetros	Por defecto

Tabla 5.1 Parámetros seleccionados en el Solver

De las distintas opciones que ofrece el solver, los parámetros que se utilizan de forma común en todas las simulaciones, son los siguientes:

Para suprimir el estado transitorio del comienzo de la simulación, se ejecuta el proceso durante 2,2 segundos y se eliminan los datos correspondientes a los 0.2 segundos del inicio.

Resta todavía determinar bajo que condiciones de funcionamiento del rodamiento se va a realizar la simulación. Estos valores serán:

- Posición inicial del centro del anillo interno, (x,y) mm.
- Velocidad de giro del rodamiento, r.p.m.
- Carga radial aplicada al rodamiento, Newton.
 - Dirección de la carga, x, y o combinación.
- Defecto en anillo interno:
 - Profundidad, mm.
 - Longitud del arco que abarca el defecto, mm.
- Defecto en anillo externo:
 - Profundidad, mm.
 - Longitud del arco que abarca el defecto, mm.
 - Localización del defecto en el anillo.

Los valores de todos estos parámetros están íntimamente ligados a los parámetros bajo los que realizaremos los ensayos en la parte experimental, excepto la posición inicial del centro del anillo interno que no puede ser variada a voluntad en los ensayos experimentales. Seguidamente se detallan cada uno de los valores que se utilizan en la simulación:

1. El valor de la posición inicial del centro del anillo externo se tomará en la dirección $y(+)$, tal y como está aplicada la carga en el sistema radial y su valor dependerá de la estabilidad que presente el modelo. Se comenzará con $x_0 = 0$ y $y_0 = 0,001$ mm. Si al iniciar las simulaciones se observa que el transitorio del comienzo es muy grande, se introducirá un valor menor para el desplazamiento inicial.

2. Para las condiciones de velocidad y carga, se tomarán las distintas combinaciones que pueden formarse con los valores de la Tabla 5.2.

Carga <i>Newton</i>	Velocidad <i>Hz r.p.m.</i>	
100	5	300
500	10	600
1000	20	1200
1500	30	1800
2000	40	2400
2500	50	3000
3000		

Tabla 5.2 Parámetros de carga-velocidad usados en las simulaciones

3. El defecto en el anillo interno tiene una profundidad de 0.1 mm. y una longitud de arco de 1 mm.
4. El defecto en el anillo externo tiene una profundidad de 0.1 mm., una longitud de arco de 1 mm. y se sitúa en la posición más cargada, 90°.

Por último, antes de comenzar las simulaciones, es necesario definir la nomenclatura seguida para nombrar los archivos que contienen la señal temporal generada por el modelo. La notación empleada para denominar los archivos constará de 8 dígitos: **abcdefgh.txt**, cuyo código de valores aparece en la Tabla 5.3.

a, b	Carga aplicada, x 100 Newton : 01, 05, 10, 15, 20, 25, 30
c	Número de bolas : T (3 bolas) ; N (9 bolas)
d, e	Velocidad en Hz. : 05, 10, 20, 30, 40
f	Defecto : S (sin defecto) ; E (defecto anillo externo) ; I (defecto anillo interno)
g	Ecuaciones del modelo : N (Newton) ; L (Lagrange)
h	Número de G.D.L. : D (dos) ; C (cinco) ; O (once)

Tabla 5.3 Código seguido para nombrar los archivos generados por simulación

Así, por ejemplo, para nombrar el archivo de datos correspondiente a la simulación de un modelo de rodamiento de 9 bolas, con 5 grados de libertad, según las ecuaciones de Newton, soportando una carga radial de 1000 Newton, con defecto en el anillo externo y con una velocidad de giro del anillo interno de 2400 rpm., sería la siguiente:

10N40ENC.txt

Las simulaciones pueden agruparse en 18 grupos, según el número de bolas, el número de grados de libertad y el tipo de ecuaciones utilizadas para implementar el modelo: Newton o Lagrange.

En la Tabla 5.4 se muestra la notación empleada para denominar los ficheros de simulación del modelo de 2 G.D.L. implementado con las ecuaciones de Newton, para un rodamiento con tres bolas, sin defecto.

	Velocidad (Hz.)				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01T05SND	01T10SND	01T20SND	01T30SND	01T40SND
500	05T05SND	05T10SND	05T20SND	05T30SND	05T40SND
1000	10T05SND	10T10SND	10T20SND	10T30SND	10T40SND
1500	15T05SND	15T10SND	15T20SND	15T30SND	15T40SND
2000	20T05SND	20T10SND	20T20SND	20T30SND	20T40SND
2500	25T05SND	25T10SND	25T20SND	25T30SND	25T40SND
3000	30T05SND	30T10SND	30T20SND	30T30SND	30T40SND

Tabla 5.4 Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 2 G.D.L., 3 Bolas)

En la Tabla 5.5 se muestra la notación empleada para denominar los ficheros de simulación del modelo de 2 G.D.L. implementado con las ecuaciones de Newton, para un rodamiento con tres bolas, con defecto en el anillo externo.

	Velocidad (Hz.)				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01T05END	01T10END	01T20END	01T30END	01T40END
500	05T05END	05T10END	05T20END	05T30END	05T40END
1000	10T05END	10T10END	10T20END	10T30END	10T40END
1500	15T05END	15T10END	15T20END	15T30END	15T40END
2000	20T05END	20T10END	20T20END	20T30END	20T40END
2500	25T05END	25T10END	25T20END	25T30END	25T40END
3000	30T05END	30T10END	30T20END	30T30END	30T40END

Tabla 5.5 Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 2 G.D.L., 3 Bolas)

En la Tabla 5.6 se muestra la notación empleada en los ficheros de simulación del modelo de 2 G.D.L. implementado con las ecuaciones de Newton, para un rodamiento con tres bolas, con defecto en el anillo interno.

	Velocidad (Hz.)				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01T05IND	01T10IND	01T20IND	01T30IND	01T40IND
500	05T05IND	05T10IND	05T20IND	05T30IND	05T40IND
1000	10T05IND	10T10IND	10T20IND	10T30IND	10T40IND
1500	15T05IND	15T10IND	15T20IND	15T30IND	15T40IND
2000	20T05IND	20T10IND	20T20IND	20T30IND	20T40IND
2500	25T05IND	25T10IND	25T20IND	25T30IND	25T40IND
3000	30T05IND	30T10IND	30T20IND	30T30IND	30T40IND

Tabla 5.6 Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 2 G.D.L., 3 Bolas)

En la Tabla 5.7 se muestra la notación empleada en los ficheros de simulación del modelo de 2 G.D.L. implementado con las ecuaciones de Newton, para un rodamiento con nueve bolas, sin defecto.

Carga (N.)	Velocidad (Hz.)				
	05	10	20	30	40
100	01N05SND	01N10SND	01N20SND	01N30SND	01N40SND
500	05N05SND	05N10SND	05N20SND	05N30SND	05N40SND
1000	10N05SND	10N10SND	10N20SND	10N30SND	10N40SND
1500	15N05SND	15N10SND	15N20SND	15N30SND	15N40SND
2000	20N05SND	20N10SND	20N20SND	20N30SND	20N40SND
2500	25N05SND	25N10SND	25N20SND	25N30SND	25N40SND
3000	30N05SND	30N10SND	30N20SND	30N30SND	30N40SND

Tabla 5.7 Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 2 G.D.L., 9 Bolas)

En la Tabla 5.8 se muestra la notación empleada en los ficheros de simulación del modelo de 2 G.D.L. implementado con las ecuaciones de Newton, para un rodamiento con tres bolas, con defecto en el anillo externo.

Carga (N.)	Velocidad (Hz.)				
	05	10	20	30	40
100	01N05END	01N10END	01N20END	01N30END	01N40END
500	05N05END	05N10END	05N20END	05N30END	05N40END
1000	10N05END	10N10END	10N20END	10N30END	10N40END
1500	15N05END	15N10END	15N20END	15N30END	15N40END
2000	20N05END	20N10END	20N20END	20N30END	20N40END
2500	25N05END	25N10END	25N20END	25N30END	25N40END
3000	30N05END	30N10END	30N20END	30N30END	30N40END

Tabla 5.8 Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 2 G.D.L., 9 Bolas)

En la Tabla 5.22 se muestra la notación empleada en los ficheros de simulación del modelo de 2 G.D.L. implementado con las ecuaciones de Newton, para un rodamiento con nueve bolas, con defecto en el anillo interno.

Carga (N.)	Velocidad (Hz.)				
	05	10	20	30	40
100	01N05IND	01N10IND	01N20IND	01N30IND	01N40IND
500	05N05IND	05N10IND	05N20IND	05N30IND	05N40IND
1000	10N05IND	10N10IND	10N20IND	10N30IND	10N40IND
1500	15N05IND	15N10IND	15N20IND	15N30IND	15N40IND
2000	20N05IND	20N10IND	20N20IND	20N30IND	20N40IND
2500	25N05IND	25N10IND	25N20IND	25N30IND	25N40IND
3000	30N05IND	30N10IND	30N20IND	30N30IND	30N40IND

Tabla 5.9 Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 2 G.D.L., 9 Bolas)

En la Tabla 5.23 se muestra la notación empleada en los ficheros de simulación del modelo de 5 G.D.L. implementado con las ecuaciones de Newton, para un rodamiento con tres bolas, sin defecto.

	Velocidad (Hz.)				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01T05SNC	01T10SNC	01T20SNC	01T30SNC	01T40SNC
500	05T05SNC	05T10SNC	05T20SNC	05T30SNC	05T40SNC
1000	10T05SNC	10T10SNC	10T20SNC	10T30SNC	10T40SNC
1500	15T05SNC	15T10SNC	15T20SNC	15T30SNC	15T40SNC
2000	20T05SNC	20T10SNC	20T20SNC	20T30SNC	20T40SNC
2500	25T05SNC	25T10SNC	25T20SNC	25T30SNC	25T40SNC
3000	30T05SNC	30T10SNC	30T20SNC	30T30SNC	30T40SNC

Tabla 5.10 Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 5 G.D.L., 3 Bolas)

En la Tabla 5.24 se muestra la notación empleada en los ficheros de simulación del modelo de 5 G.D.L. implementado con las ecuaciones de Newton, para un rodamiento con tres bolas, con defecto en el anillo externo.

	Velocidad (Hz.)				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01T05ENC	01T10ENC	01T20ENC	01T30ENC	01T40ENC
500	05T05ENC	05T10ENC	05T20ENC	05T30ENC	05T40ENC
1000	10T05ENC	10T10ENC	10T20ENC	10T30ENC	10T40ENC
1500	15T05ENC	15T10ENC	15T20ENC	15T30ENC	15T40ENC
2000	20T05ENC	20T10ENC	20T20ENC	20T30ENC	20T40ENC
2500	25T05ENC	25T10ENC	25T20ENC	25T30ENC	25T40ENC
3000	30T05ENC	30T10ENC	30T20ENC	30T30ENC	30T40ENC

Tabla 5.11 Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 5 G.D.L., 3 Bolas)

En la Tabla 5.25 se muestra la notación empleada en los ficheros de simulación del modelo de 5 G.D.L. implementado con las ecuaciones de Newton, para un rodamiento con tres bolas, con defecto en el anillo interno.

	Velocidad (Hz.)				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01T05INC	01T10INC	01T20INC	01T30INC	01T40INC
500	05T05INC	05T10INC	05T20INC	05T30INC	05T40INC
1000	10T05INC	10T10INC	10T20INC	10T30INC	10T40INC
1500	15T05INC	15T10INC	15T20INC	15T30INC	15T40INC
2000	20T05INC	20T10INC	20T20INC	20T30INC	20T40INC
2500	25T05INC	25T10INC	25T20INC	25T30INC	25T40INC
3000	30T05INC	30T10INC	30T20INC	30T30INC	30T40INC

Tabla 5.12 Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 5 G.D.L., 3 Bolas)

En la Tabla 5.26 se muestra la notación empleada en los ficheros de simulación del modelo de 5 G.D.L. implementado con las ecuaciones de Lagrange, para un rodamiento con tres bolas sin defecto.

	Velocidad (Hz.)				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01T05SLC	01T10SLC	01T20SLC	01T30SLC	01T40SLC
500	05T05SLC	05T10SLC	05T20SLC	05T30SLC	05T40SLC
1000	10T05SLC	10T10SLC	10T20SLC	10T30SLC	10T40SLC
1500	15T05SLC	15T10SLC	15T20SLC	15T30SLC	15T40SLC
2000	20T05SLC	20T10SLC	20T20SLC	20T30SLC	20T40SLC
2500	25T05SLC	25T10SLC	25T20SLC	25T30SLC	25T40SLC
3000	30T05SLC	30T10SLC	30T20SLC	30T30SLC	30T40SLC

Tabla 5.13 Notación empleada en los ficheros de simulación (Lagrange, 5 G.D.L., 3 Bolas)

En la Tabla 5.27 se muestra la notación empleada en los ficheros de simulación del modelo de 5 G.D.L. implementado con las ecuaciones de Lagrange, para un rodamiento con tres bolas, con defecto en el anillo externo.

	Velocidad (Hz.)				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01T05ELC	01T10ELC	01T20ELC	01T30ELC	01T40ELC
500	05T05ELC	05T10ELC	05T20ELC	05T30ELC	05T40ELC
1000	10T05ELC	10T10ELC	10T20ELC	10T30ELC	10T40ELC
1500	15T05ELC	15T10ELC	15T20ELC	15T30ELC	15T40ELC
2000	20T05ELC	20T10ELC	20T20ELC	20T30ELC	20T40ELC
2500	25T05ELC	25T10ELC	25T20ELC	25T30ELC	25T40ELC
3000	30T05ELC	30T10ELC	30T20ELC	30T30ELC	30T40ELC

Tabla 5.14 Notación empleada en los ficheros de simulación (Lagrange, 5 G.D.L., 3 Bolas)

En la Tabla 5.15 muestra la notación empleada en los ficheros de simulación del modelo de 5 G.D.L. implementado con las ecuaciones de Lagrange, para un rodamiento con tres bolas, con defecto en el anillo interno.

	Velocidad (Hz.)				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01T05ILC	01T10ILC	01T20ILC	01T30ILC	01T40ILC
500	05T05ILC	05T10ILC	05T20ILC	05T30ILC	05T40ILC
1000	10T05ILC	10T10ILC	10T20ILC	10T30ILC	10T40ILC
1500	15T05ILC	15T10ILC	15T20ILC	15T30ILC	15T40ILC
2000	20T05ILC	20T10ILC	20T20ILC	20T30ILC	20T40ILC
2500	25T05ILC	25T10ILC	25T20ILC	25T30ILC	25T40ILC
3000	30T05ILC	30T10ILC	30T20ILC	30T30ILC	30T40ILC

Tabla 5.15 Notación empleada en los ficheros de simulación (Lagrange, 5 G.D.L., 3 Bolas)

En la Tabla 5.16 se muestra la notación empleada en los ficheros de simulación del modelo de 11 G.D.L. implementado con las ecuaciones de Newton, para un rodamiento con 9 bolas sin defecto.

	Velocidad (Hz.)				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01N05SNO	01N10SNO	01N20SNO	01N30SNO	01N40SNO
500	05N05SNO	05N10SNO	05N20SNO	05N30SNO	05N40SNO
1000	10N05SNO	10N10SNO	10N20SNO	10N30SNO	10N40SNO
1500	15N05SNO	15N10SNO	15N20SNO	15N30SNO	15N40SNO
2000	20N05SNO	20N10SNO	20N20SNO	20N30SNO	20N40SNO
2500	25N05SNO	25N10SNO	25N20SNO	25N30SNO	25N40SNO
3000	30N05SNO	30N10SNO	30N20SNO	30N30SNO	30N40SNO

Tabla 5.16 Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 11 G.D.L., 9 Bolas)

En la Tabla 5.17 muestra la notación empleada en los ficheros de simulación del modelo de 11 G.D.L. implementado con las ecuaciones de Newton, para un rodamiento con nueve bolas, con defecto en el anillo externo.

	Velocidad (Hz.)				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01N05ENO	01N10ENO	01N20ENO	01N30ENO	01N40ENO
500	05N05ENO	05N10ENO	05N20ENO	05N30ENO	05N40ENO
1000	10N05ENO	10N10ENO	10N20ENO	10N30ENO	10N40ENO
1500	15N05ENO	15N10ENO	15N20ENO	15N30ENO	15N40ENO
2000	20N05ENO	20N10ENO	20N20ENO	20N30ENO	20N40ENO
2500	25N05ENO	25N10ENO	25N20ENO	25N30ENO	25N40ENO
3000	30N05ENO	30N10ENO	30N20ENO	30N30ENO	30N40ENO

Tabla 5.17 Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 11 G.D.L., 9 Bolas)

En la Tabla 5.18 se muestra la notación empleada en los ficheros de simulación del modelo de 11 G.D.L. implementado con las ecuaciones de Newton, para un rodamiento con nueve bolas, con defecto en el anillo interno.

	Velocidad (Hz.)				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01N05INO	01N10INO	01N20INO	01N30INO	01N40INO
500	05N05INO	05N10INO	05N20INO	05N30INO	05N40INO
1000	10N05INO	10N10INO	10N20INO	10N30INO	10N40INO
1500	15N05INO	15N10INO	15N20INO	15N30INO	15N40INO
2000	20N05INO	20N10INO	20N20INO	20N30INO	20N40INO
2500	25N05INO	25N10INO	25N20INO	25N30INO	25N40INO
3000	30N05INO	30N10INO	30N20INO	30N30INO	30N40INO

Tabla 5.18 Notación empleada en los ficheros de simulación (Newton, 11 G.D.L., 9 Bolas)

En la Tabla 5.19 muestra la notación empleada en los ficheros de simulación del modelo de 11 G.D.L. implementado con las ecuaciones de Lagrange, para un rodamiento con 9 bolas sin defecto.

	Velocidad (Hz.)				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01N05SLO	01N10SLO	01N20SLO	01N30SLO	01N40SLO
500	05N05SLO	05N10SLO	05N20SLO	05N30SLO	05N40SLO
1000	10N05SLO	10N10SLO	10N20SLO	10N30SLO	10N40SLO
1500	15N05SLO	15N10SLO	15N20SLO	15N30SLO	15N40SLO
2000	20N05SLO	20N10SLO	20N20SLO	20N30SLO	20N40SLO
2500	25N05SLO	25N10SLO	25N20SLO	25N30SLO	25N40SLO
3000	30N05SLO	30N10SLO	30N20SLO	30N30SLO	30N40SLO

Tabla 5.19 Notación empleada en los ficheros de simulación (Lagrange, 11 G.D.L., 9 Bolas)

En la Tabla 5.20 se muestra la notación empleada en los ficheros de simulación del modelo de 11 G.D.L. implementado con las ecuaciones de Lagrange, para un rodamiento con nueve bolas, con defecto en el anillo externo.

	Velocidad (Hz.)				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01N05ELO	01N10ELO	01N20ELO	01N30ELO	01N40ELO
500	05N05ELO	05N10ELO	05N20ELO	05N30ELO	05N40ELO
1000	10N05ELO	10N10ELO	10N20ELO	10N30ELO	10N40ELO
1500	15N05ELO	15N10ELO	15N20ELO	15N30ELO	15N40ELO
2000	20N05ELO	20N10ELO	20N20ELO	20N30ELO	20N40ELO
2500	25N05ELO	25N10ELO	25N20ELO	25N30ELO	25N40ELO
3000	30N05ELO	30N10ELO	30N20ELO	30N30ELO	30N40ELO

Tabla 5.20 Notación empleada en los ficheros de simulación (Lagrange, 11 G.D.L., 9 Bolas)

En la Tabla 5.21 muestra la notación empleada en los ficheros de simulación del modelo de 11 G.D.L. implementado con las ecuaciones de Lagrange, para un rodamiento con nueve bolas, con defecto en el anillo interno.

	Velocidad (Hz.)				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01N05ILO	01N10ILO	01N20ILO	01N30ILO	01N40ILO
500	05N05ILO	05N10ILO	05N20ILO	05N30ILO	05N40ILO
1000	10N05ILO	10N10ILO	10N20ILO	10N30ILO	10N40ILO
1500	15N05ILO	15N10ILO	15N20ILO	15N30ILO	15N40ILO
2000	20N05ILO	20N10ILO	20N20ILO	20N30ILO	20N40ILO
2500	25N05ILO	25N10ILO	25N20ILO	25N30ILO	25N40ILO
3000	30N05ILO	30N10ILO	30N20ILO	30N30ILO	30N40ILO

Tabla 5.21 Notación empleada en los ficheros de simulación (Lagrange, 11 G.D.L., 9 Bolas)

5.2. SIMULACIÓN TÉRMICA DEL RODAMIENTO

La distribución de temperaturas en el rodamiento durante la simulación va a depender de las condiciones iniciales de la potencia calorífica desarrollada en las zonas de contacto bola-anillo interno y bola-anillo externo, de los coeficientes de convención-radiación de todas las superficies del modelo y del tiempo transcurrido desde que se inicia la simulación hasta el fin de la misma, si la simulación se realiza en régimen transitorio.

Estos parámetros también han de estar ligados a los valores presentes en la parte experimental y, por tanto, deberán respetarse aquellas condiciones de funcionamiento bajo las que puedan realizarse los ensayos experimentales.

Las condiciones iniciales de temperatura, en los elementos que componen el sistema, se toma como 20°C, ya que la temperatura ambiente de la sala donde se realizan los ensayos experimentales se encuentra en torno a esa temperatura. Durante el proceso experimental, la temperatura ambiente será registrada para poder corregir las alteraciones que se produzcan respecto a esta temperatura de 20°C.

Las simulaciones térmicas, como se esquematiza en la Figura 5.55, consisten básicamente en obtener un campo de temperaturas en el modelo partiendo de su geometría, una carga térmica aplicada a unas determinadas superficies del modelo y unos coeficientes de convención-radiación aplicados al resto de las superficies del modelo.

La Tabla 5.22 muestra las características de las simulaciones realizadas a un rodamiento de tres bolas sin defecto.

	nº Bolas	Defecto	Velocidad	temperatura	Tiempo
Simulación	Tres/Nueve	S, E, I	10, 20, 30 Hz	Calen. / Enfria.	minutos
S01	T	S	10	Calentamiento	90
S02	T	S	0	Enfriamiento	180
S03	T	S	20	Calentamiento	90
S04	T	S	0	Enfriamiento	180
S05	T	S	30	Calentamiento	90
S06	T	S	0	Enfriamiento	180

Tabla 5.22 Simulación térmica, rodamiento 3 bolas sin defecto

La Tabla 5.23 muestra las características de las simulaciones realizadas a un rodamiento de tres bolas con defecto en anillo externo.

	nº Bolas	Defecto	Velocidad	temperatura	Tiempo
Simulación	Tres/Nueve	S, E, I	10, 20, 30 Hz	Calen. / Enfria.	minutos
S07	T	E	10	Calentamiento	90
S08	T	E	0	Enfriamiento	180
S09	T	E	20	Calentamiento	90
S10	T	E	0	Enfriamiento	180
S11	T	E	30	Calentamiento	90
S12	T	E	0	Enfriamiento	180

Tabla 5.23 Simulación térmica, rodamiento 3 bolas con defecto en anillo externo

La Tabla 5.24 muestra las características de las simulaciones realizadas a un rodamiento de tres bolas con defecto en anillo interno.

	n° Bolas	Defecto	Velocidad	temperatura	Tiempo
Simulación	Tres/Nueve	S, E, I	10, 20, 30 Hz	Calen. / Enfria.	minutos
S13	T	I	10	Calentamiento	90
S14	T	I	0	Enfriamiento	180
S15	T	I	20	Calentamiento	90
S16	T	I	0	Enfriamiento	180
S17	T	I	30	Calentamiento	90
S18	T	I	0	Enfriamiento	180

Tabla 5.24 Simulación térmica, rodamiento 3 bolas con defecto en anillo interno

La Tabla 5.25 muestra las características de las simulaciones realizadas a un rodamiento de nueve bolas sin defecto.

	n° Bolas	Defecto	Velocidad	temperatura	Tiempo
Simulación	Tres/Nueve	S, E, I	10, 20, 30 Hz	Calen. / Enfria.	minutos
S01	N	S	10	Calentamiento	90
S02	N	S	0	Enfriamiento	180
S03	N	S	20	Calentamiento	90
S04	N	S	0	Enfriamiento	180
S05	N	S	30	Calentamiento	90
S06	N	S	0	Enfriamiento	180

Tabla 5.25 Simulación térmica, rodamiento 9 bolas sin defecto

La Tabla 5.26 muestra las características de las simulaciones realizadas a un rodamiento de nueve bolas con defecto en anillo externo.

	n° Bolas	Defecto	Velocidad	temperatura	Tiempo
Simulación	Tres/Nueve	S, E, I	10, 20, 30 Hz	Calen. / Enfria.	minutos
S07	N	E	10	Calentamiento	90
S08	N	E	0	Enfriamiento	180
S09	N	E	20	Calentamiento	90
S10	N	E	0	Enfriamiento	180
S11	N	E	30	Calentamiento	90
S12	N	E	0	Enfriamiento	180

Tabla 5.26 Simulación térmica, rodamiento 9 bolas con defecto en anillo externo

La Tabla 5.27 muestra las características de las simulaciones realizadas a un rodamiento de nueve bolas con defecto en anillo interno.

	n° Bolas	Defecto	Velocidad	temperatura	Tiempo
Simulación	Tres/Nueve	S, E, I	10, 20, 30 Hz	Calen. / Enfria.	minutos
S13	N	I	10	Calentamiento	90
S14	N	I	0	Enfriamiento	180
S15	N	I	20	Calentamiento	90
S16	N	I	0	Enfriamiento	180
S17	N	I	30	Calentamiento	90
S18	N	I	0	Enfriamiento	180

Tabla 5.27 Simulación térmica, rodamiento 9 bolas con defecto en anillo interno

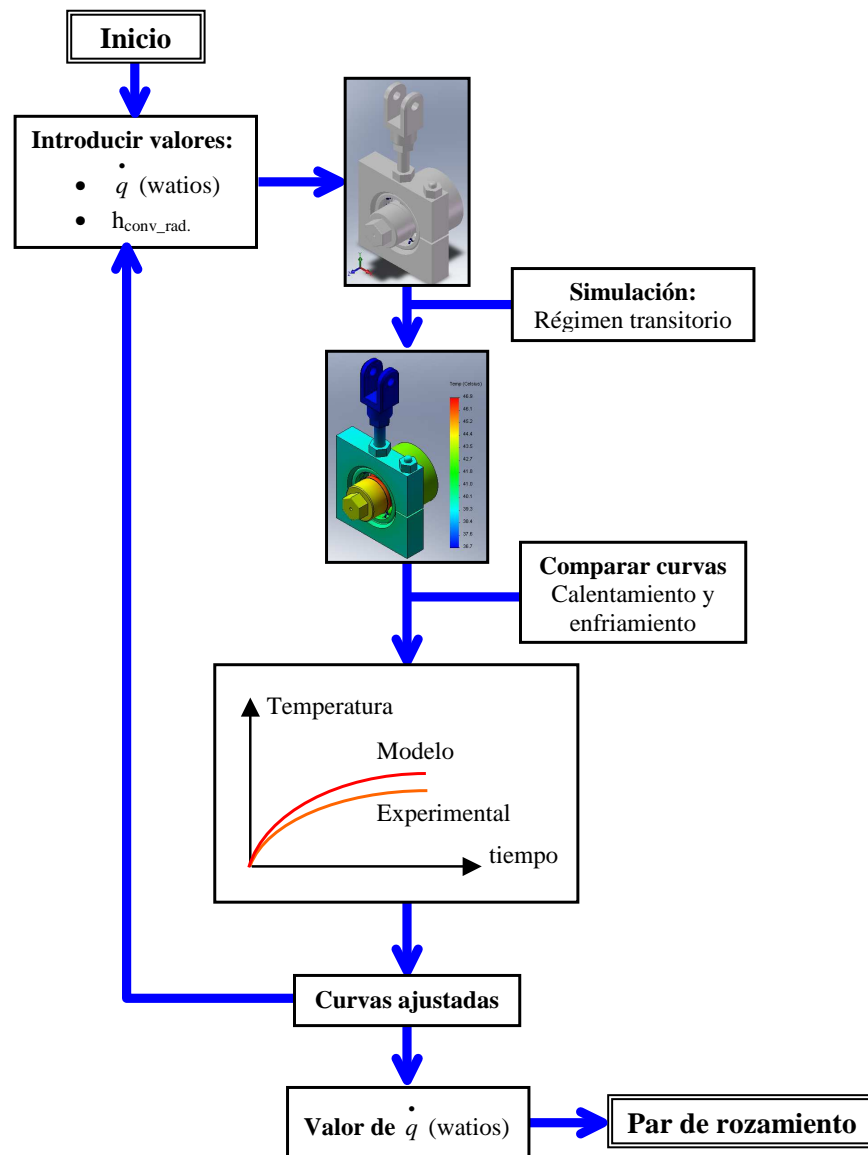


Figura 5.55 Secuencia seguida en la simulación térmica

Capítulo 6

METODOLOGÍA DE LOS ENSAYOS EXPERIMENTALES

6.1. SELECCIÓN DE RODAMIENTOS

Para realizar los ensayos experimentales se emplean rodamientos rígidos de bolas SKF 6206. Estos rodamientos están compuestos por los anillos interno y externo, 9 bolas y una jaula de poliamida. Los motivos más importantes que han llevado a la elección de este rodamiento son los siguientes:

- El uso extendido de este rodamiento en la maquinaria de tamaño medio, como cajas de cambios de maquinaria agrícola, automóviles, maquinaria de obras públicas, motores eléctricos, etc.
- El tamaño es aceptable para su manipulación y generación de defectos sin tener que utilizar una maquinaria sofisticada.
- El régimen de carga y velocidad que presentan es adecuado para unos ensayos experimentales en bancos de rodamientos estándar.
- Posibilitan el despiece para poder generar en los mismos los defectos necesarios.

Se cuenta con 60 rodamientos debidamente identificados de tal forma que formen seis grupos de 10 rodamientos, con las siguientes características:

- Rodamientos de 9 bolas en perfecto estado (sin defecto).
- Rodamientos de 3 bolas en perfecto estado (sin defecto).
- Rodamientos de 9 bolas con defecto en anillo externo.
- Rodamientos de 3 bolas con defecto en anillo externo.
- Rodamientos de 9 bolas con defecto en anillo interno.
- Rodamientos de 3 bolas con defecto en anillo interno.

No se han tenido en cuenta rodamientos con defectos en elementos rodantes por la dificultad de poder modelar el funcionamiento de dichos elementos.

Para diferenciar cada uno de los rodamientos, se procedió a marcar estos con un punzón eléctrico sobre la parte lateral del anillo externo o interno de aquellos rodamientos que presentan defecto.

6.2. GENERACIÓN DE DEFECTOS EN LOS RODAMIENTOS

El tamaño de defecto que se va a realizar sobre los rodamientos es igual para todos los rodamientos defectuosos. Este consiste en una ranura de 1 mm. de anchura, a lo largo de todo el arco axial de la pista, por 0'25 mm. de profundidad, dispuesta sobre el anillo correspondiente (externo o interno) paralela al eje del rodamiento. El defecto se genera operando con un botador sobre el rodamiento, erosionando la superficie comprendida entre las dos marcas que denotan el tamaño del defecto pero haciendo una presión media con el botador. Con el fin de conseguir uniformidad, se produjeron todos los defectos en una sesión, intentando mantener el mismo nivel de imperfección.



Figura 6.1 Herramienta para generar los defectos en las pistas de rodadura del rodamiento

Para generar el defecto a los rodamientos se sigue el siguiente procedimiento:

- Se desmonta el rodamiento.
- Se selecciona el elemento al cual se le va a proporcionar el defecto: el anillo exterior o el anillo interior.
- Se fija el anillo mediante una mordaza a la mesa trabajo .
- Se realiza una marca pequeña con el botador sobre la pista de rodadura del anillo (exterior o interior), se mide con el calibre la distancia a eliminar y se hace una segunda marca, finalmente se erosiona con el punzón eléctrico la superficie del camino de rodadura comprendida entre las dos marcas. El error cometido por medir la cuerda y no el arco es despreciable respecto a otros como por ejemplo, el grosor de la punta del botador.

- Se limpian los elementos del rodamiento.
- Finalmente, se monta el rodamiento con el número de bolas adecuado al ensayo, y se les proporciona una mínima lubricación.

Antes de generar los defectos, se marcarán los rodamientos. La notación seguida para diferenciar los rodamientos, consiste en una letra seguida de un número. Las letras serán : " s, e, i ", que se corresponden con rodamientos nuevos, rodamientos con defecto en anillo externo y rodamientos con defecto en anillo interno, respectivamente. Los números diferencian los rodamientos dentro del mismo grupo (con el mismo defecto): estos van del '0', correspondiente al primer rodamiento, hasta el '9' que corresponde al décimo rodamiento.

nº bolas	Tipo defecto	Nomenclatura									
3, T	Sin defecto	Ts0	Ts1	Ts2	Ts3	Ts4	Ts5	Ts6	Ts7	Ts8	Ts9
	anillo Externo	Te0	Te1	Te2	Te3	Te4	Te5	Te6	Te7	Te8	Te9
	anillo Interno	Ti0	Ti1	Ti2	Ti3	Ti4	Ti5	Ti6	Ti7	Ti8	Ti9
9, N	Sin defecto	Ns0	Ns1	Ns2	Ns3	Ns4	Ns5	Ns6	Ns7	Ns8	Ns9
	anillo Externo	Ne0	Ne1	Ne2	Ne3	Ne4	Ne5	Ne6	Ne7	Ne8	Ne9
	anillo Interno	Ni0	Ni1	Ni2	Ni3	Ni4	Ni5	Ni6	Ni7	Ni8	Ni9

Tabla 6.1 Nomenclatura utilizada para marcar los rodamientos empleados en los ensayos experimentales

6.3. SISTEMA DE MEDIDA

6.3.1. Medida de Vibraciones

En la Figura 6.2 se muestra la composición y disposición de los equipos de medida y control necesarios para realizar los ensayos experimentales con los rodamientos y registrar la señal de vibración para un análisis posterior.

A continuación se detallan las características básicas de cada uno de estos elementos que forman parte del sistema de medida.

Acelerómetros

Los acelerómetros empleados para registrar las vibraciones son de tipo piezoeléctricos, ya que estos presentan una menor sensibilidad a las interferencias electromagnéticas. Se usaron varios tipos de acelerómetros, siendo todos ellos de la marca brüel&kjaer, cuyas características principales se resumen en la Tabla 6.2.

Se utilizaron dos tipos de fijación del acelerómetro a la brida soporte del rodamiento. Una de ellas es una base magnética que, a pesar de su sencillez de montaje, presenta el inconveniente de limitar el rango de medida hasta una frecuencia de 3-5 kHz. En aquellos casos en los cuales se requirió un mayor rango de frecuencia, se atornillaba directamente el acelerómetro a la brida mediante un tornillo de métrica M5.

Modelo	Brüel & Kjær 4382	Brüel & Kjær 4383	Brüel & Kjær 4321 V	Brüel & Kjær 4374	Brüel & Kjær 4374
Características					
Tipo de acelerómetro	Aplicación general	Aplicación general	Triaxial	Miniatura	Miniatura
Nº de serie	1363439	2211104	2305399	1381083	1381082
Tipo de elemento sensor	Piezoeléctrico tipo PZ 23 (titanio ASTM grado 2)	Piezoeléctrico tipo PZ 23 (titanio ASTM grado 2)	Piezoeléctrico tipo PZ 23 (titanio ASTM grado 2)	Piezoeléctrico tipo PZ 27 (berilio)	Piezoeléctrico tipo PZ 27 (berilio)
Peso	17 gramos	17 gramos	55 gramos	0.65 gramos	0.65 gramos
Sensibilidad de referencia	3.17 pC/ms ⁻²	3.152 pC/ms ⁻²	<div>x → 0.983 pC/ms⁻²</div> <div>y → 0.983 pC/ms⁻²</div> <div>z → 0.975 pC/ms⁻²</div>	0.124 pC/ms ⁻²	0.113 pC/ms ⁻²
Sensibilidad transversal	2.2 %	0.3 %	<div>x → < 5 %</div> <div>y → < 5 %</div> <div>z → < 5 %</div>	1.4 %	3.4 %
Frecuencia de resonancia	≈ 27 kHz	26.2 kHz	<div>x → 37.8 kHz</div> <div>y → 36.6 kHz</div> <div>z → 40.4 kHz</div>	≈ 85 kHz	≈ 85 kHz
Frecuencia de resonancia transversal	10 kHz	10 kHz	<div>x → 14 kHz</div> <div>y → 14 kHz</div> <div>z → 14 kHz</div>	21 kHz	21 kHz
Rango de frecuencia	0.1 Hz 8.5 kHz	0.1 Hz 8.4 kHz	<div>x → 0.1 Hz 12 Khz</div> <div>y → 0.1 Hz 12 Khz</div> <div>z → 0.1 Hz 12 Khz</div>	1 Hz 26 kHz	1 Hz 26 kHz
Rango de medida de aceleración	± 2000 g de pico	± 5000 g de pico	± 1000 g de pico	± 25000 g de pico	± 25000 g de pico
Rango de temperaturas	-74 a +250 °C	-74 a +250 °C	-74 a +250 °C	-74 a +250 °C	-74 a +250 °C
Capacidad del transductor	1165 pF	1100 pF	1100 pF	656 pF	610 pF
Resistencia del transductor	> 20 GΩ	> 20 GΩ	> 20 GΩ	> 20 GΩ	> 20 GΩ
Tipo de conexión	En cabeza	Lateral	Lateral	Lateral	Lateral

Tabla 6.2 Características de los acelerómetros usados para la captación de vibraciones

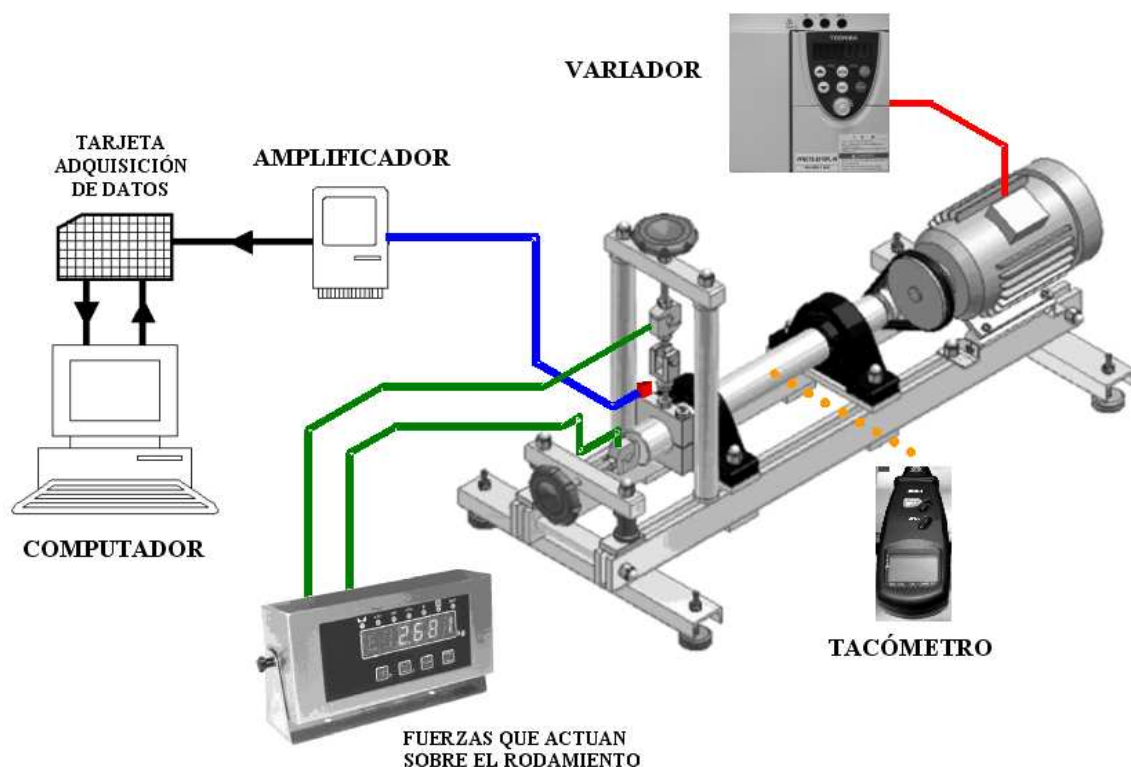


Figura 6.2 Banco de ensayos, sistema de medida y control utilizados en los ensayos experimentales con rodamientos

Para la correcta captación de la señal vibratoria se tuvieron en cuenta las siguientes consideraciones:

- La colocación del acelerómetro se debe realizar en una zona limpia y sin rugosidades, de modo que no existan espacios libres entre la superficie del transductor y la superficie del punto de medida.
- Es aconsejable limpiar periódicamente la base del soporte magnético para evitar la presencia de suciedad que pueda distorsionar la medida.
- La limpieza del conector del acelerómetro y del cable, es fundamental para una correcta medida.
- Hay que asegurarse de que el soporte magnético está correctamente apretado al acelerómetro para evitar posibles movimientos relativos entre el citado soporte y el acelerómetro.
- No deben presentarse dobleces a lo largo de toda la longitud del cable porque se podría llegar a alterar su resistencia y falsear la medida. Por el mismo motivo, es importante que el apantallamiento del cable no sufra roces o esté deteriorado.
- Durante el proceso de medida, el cable no debe ser sometido a vibración debida a golpeteo ni a tensión mecánica porque podrían distorsionar las medidas.
- Antes y tras cada serie de medidas de vibraciones se deben verificar las características del acelerómetro que previamente ha sido calibrado.

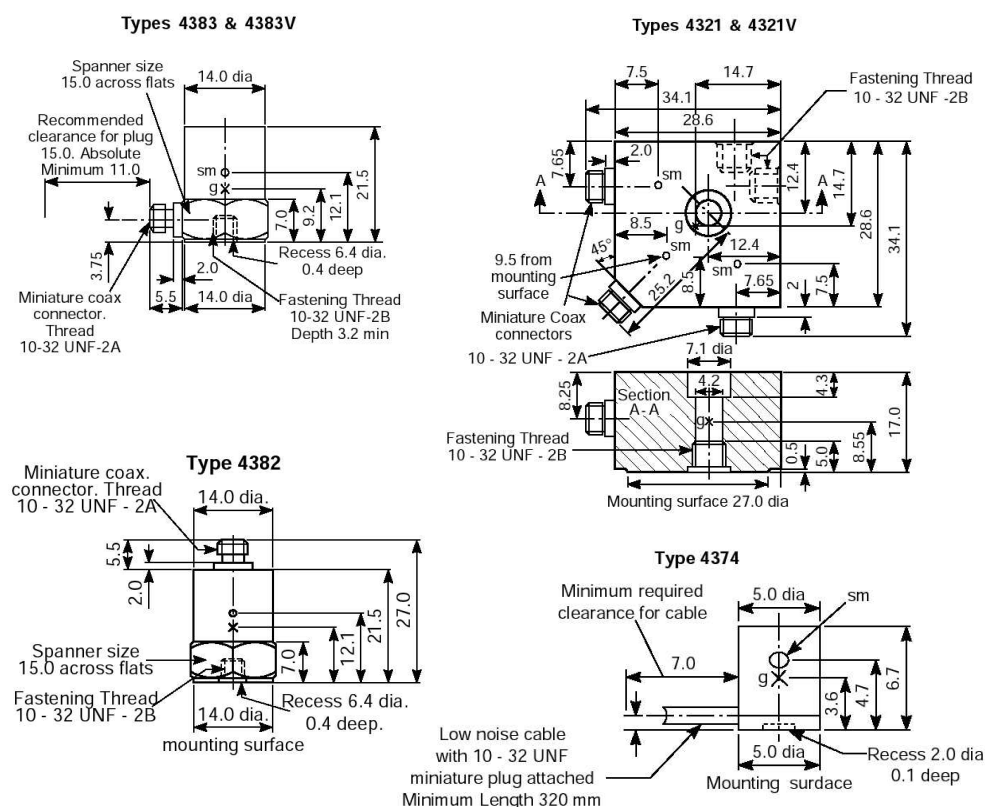


Figura 6.3 Principales dimensiones de los acelerómetros utilizados

La Figura 6.3 muestra las principales dimensiones de los acelerómetros utilizados.

Amplificador

El amplificador de carga empleado para amplificar la señal captada por el acelerómetro, es el modelo 2635 de brüel&kjaer (Figura 6.4), con un rango de frecuencias que abarca desde 0.1 Hz. hasta 200 kHz.

Este amplificador está compuesto por cuatro etapas (Figura 6.5):

1. *Amplificador de señal.* Etapa diseñada especialmente para evitar la recalibración del sistema cuando se varía la longitud de los cables hasta el captador.
2. *Amplificador con filtro de paso bajo.* Esta etapa dispone de ajuste de ganancia en el amplificador de entrada y el integrador y de una serie de filtros de paso bajo, con unas características de corte de 12dB/octava, lo que permite eliminar las señales fuera del margen de frecuencias a estudiar.
3. *Amplificador integrador.* En la Figura 6.6 se muestran las curvas características de respuesta en frecuencia. Como se puede comprobar, la curva para aceleración es lineal desde una frecuencia próxima a 0.2 Hz. Hasta 100 kHz. Esta etapa permite elegir entre los tres diferentes modos de operación (aceleración, velocidad o desplazamiento). Además de realizar su función integradora efectúa el filtrado de paso alto adecuado para evitar el ruido de baja frecuencia.



Figura 6.4 Amplificador de carga brüel&kjaer 2635

4. *Amplificador de salida.* Esta última etapa facilita un ajuste muy fino de la sensibilidad (de 0,1 a 11 pC), lo que permite una calibración y posterior lectura de las medidas muy simple. El ruido de fondo intrínseco del amplificador brüel&kjaer 2635 es de 0,005 pC referido a un transductor con una capacidad de 1 nF y puesto el amplificador a la máxima sensibilidad.

El amplificador de carga brüel&kjaer 2635 incluye, además, un detector de sobrecarga de señal, así como la unidad de alimentación.

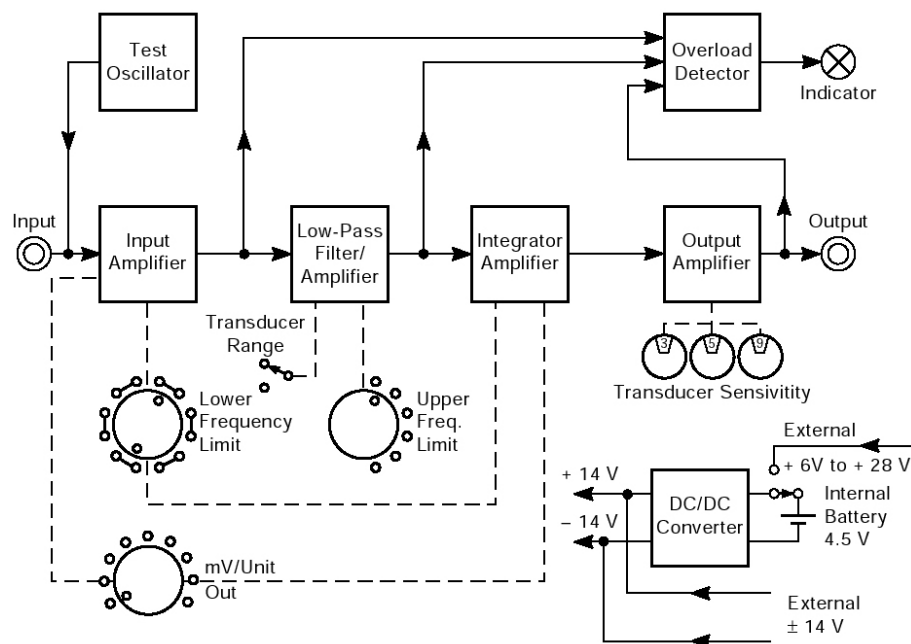


Figura 6.5 Diagrama de bloques del amplificador de carga brüel&kjaer 2635

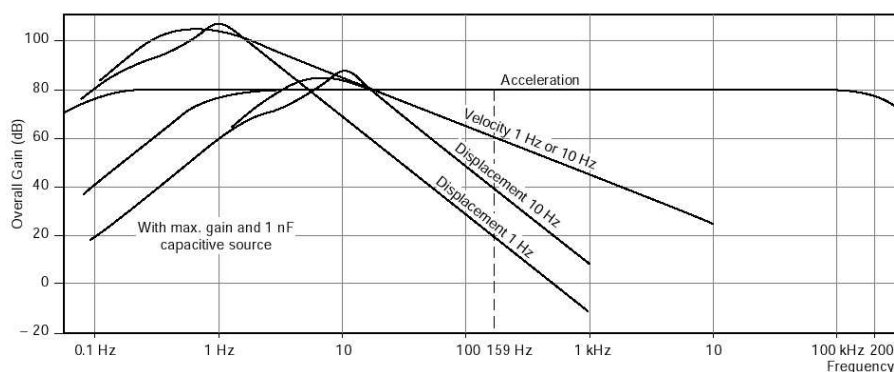


Figura 6.6 Curvas de respuesta en frecuencia del amplificador de carga brüel&kjaer 2635

Además del amplificador *B&K* 2635, también se utilizó un amplificador multicanal NEXUS, modelo *B&K* 2693 (Figura 6.7), cuyas características son similares, en lo fundamental, a las del amplificador brüel&kjaer 2635, mejoradas en ciertos aspectos como:

- El amplificador NEXUS es multicanal, posee 4 canales.
- La curva de respuesta para aceleración es lineal desde una frecuencia próxima a 0,1 Hz. Hasta 140 kHz.
- Dispone de un "display" de barras, para ver la magnitud de la vibración, lo cual permite un mejor ajuste de escala.
- Permite la opción de compensar la longitud del cable.
- Posee un display digital.

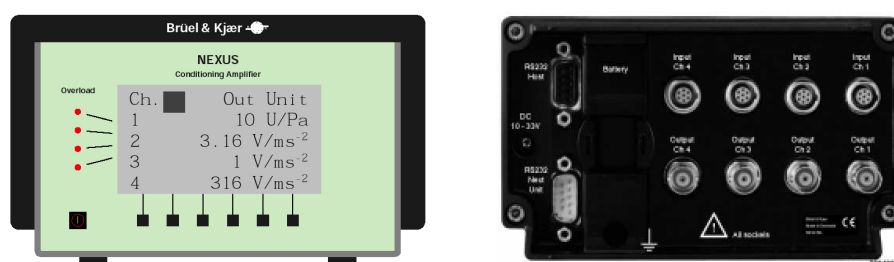


Figura 6.7 Parte frontal y trasera del amplificador brüel&kjaer 2693

Tarjeta de adquisición de datos

Para captar las medidas de vibraciones se empleó una tarjeta digitalizadora multicanal que transforma las señales analógicas en señales digitales o discretas. El rango de frecuencias del sistema de adquisición de datos abarca desde 0,1 Hz. hasta 1 MHz.

El paquete informático de adquisición de datos está constituido por:

- Tarjeta DAS-1200 Series Board, de la marca Keithley, de 8 canales.

- Caja de conexiones multicanal STP-37.
- Bus Keithley que permite la unión de la tarjeta con la computadora.
- El programa informático que se encarga de la adquisición y gestión de los datos es el Test Point 7.0, desarrollado por la compañía Bently. Las señales quedan registradas en ficheros de datos en formato ASCII.

6.3.2. Medida de Temperaturas

Termopares

Como es bien conocido, un termopar es un dispositivo formado por la unión de dos metales distintos donde se produce un voltaje que es función de la diferencia de temperatura entre uno de los extremos, denominado "punto caliente" de medida, y el otro, denominado "punto frío", unión fría o de referencia. Los termopares son ampliamente usados en la industria como sensores de temperatura ya que son económicos, intercambiables y capaces de medir un amplio rango de temperaturas.

La selección de termopares es importante para asegurarse que cubren el rango de temperaturas a determinar. Se encuentran disponibles distintos tipos de termopares:

- Tipo K (Cromo (Ni-Cr) Chromel / Aluminio (aleación de Ni -Al) Alumel): presenta una amplia variedad de aplicaciones, bajo costo y una variedad de sondas. Tienen un rango de temperatura de -200°C a $+1372^{\circ}\text{C}$ y una sensibilidad $41\ \mu\text{V}/^{\circ}\text{C}$ aprox.
- Tipo E (Cromo / Constantán (aleación de Cu-Ni)): No son magnéticos y gracias a su sensibilidad, son ideales para el uso en bajas temperaturas, en el ámbito criogénico. Tienen una sensibilidad de $68\ \mu\text{V}/^{\circ}\text{C}$.
- Tipo J (Hierro / Constantán): debido a su limitado rango, el tipo J es menos popular que el K. Son ideales para usar en viejos equipos que no aceptan termopares más modernos. El tipo J no puede usarse a temperaturas superiores a 760°C ya que una abrupta transformación magnética causa una descalibración permanente. Tienen un rango de -40°C a $+750^{\circ}\text{C}$ y una sensibilidad de $52\ \mu\text{V}/^{\circ}\text{C}$. Es afectado por la corrosión.
- Tipo N (Nicrosil(Ni-Cr-Si / Nisil (Ni-Si)): adecuado para medidas de altas temperaturas gracias a su elevada estabilidad y resistencia a la oxidación de altas temperaturas, además, no necesita del platino utilizado en los tipos B, R y S, son más caros.
- Los termopares tipo B, R y S son los más estables, pero presentan una baja sensibilidad ($10\ \mu\text{V}/^{\circ}\text{C}$ aprox.) y generalmente se usan para medir altas temperaturas (superiores a 300°C). Los termopares con una baja sensibilidad tienen, además, una resolución menor.

Los termopares utilizados en las medidas de temperatura son del tipo K pues es el que mejor se ajusta a las necesidades requeridas por la precisión, rango de medida de temperaturas y el coste de los mismos.

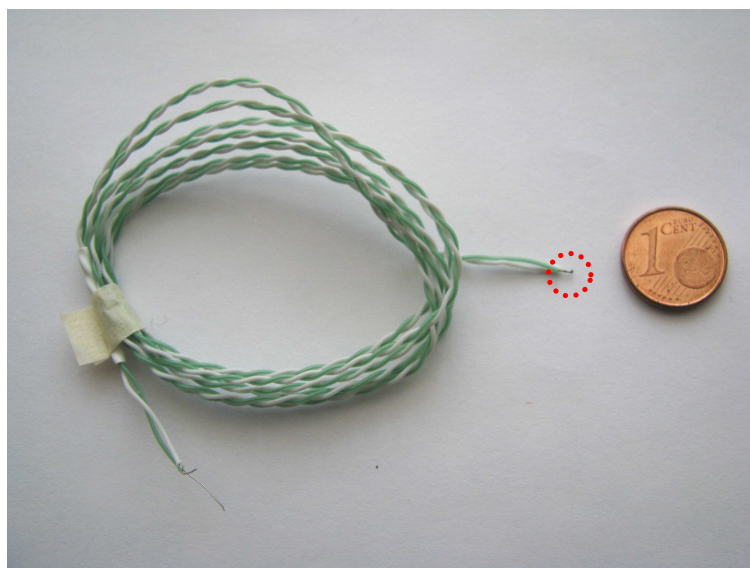


Figura 6.8 Termopar de tipo K empleado en las medidas de temperaturas

Se deben emplear conectores comerciales del mismo tipo que el termopar, para evitar problemas. Para minimizar la desviación térmica y mejorar los tiempos de respuesta, los termopares están integrados con delgados cables, tal y como muestra la Figura 6.8.

Unidad de adquisición de datos de temperatura

La unidad de adquisición de datos Agilent 34970A, en su forma básica, contiene tres slots, con un multímetro de 6 1/2 dígitos interno. Cada canal puede ser configurado independientemente para medir una de 11 diferentes funciones sin adicionar costos o problemas de accesorios de acondicionamiento de señal. Es pues, un sistema de adquisición de datos de capacidad completa de bajo costo. Dentro del modulo existen terminales a tornillo que eliminan la necesidad de bloques de terminales. El modulo mas popular es el 34901A que incluye una referencia para termopares y 20 canales diferenciales a 2 hilos.

Contiene una fuente de alimentación para 3-slots con interfaces GPIB y RS232. El multímetro interno de 6 1/2-dígitos (22-bits), escanea hasta 250 canales por segundo.

El acondicionamiento de señal incluido para manejar termopares, RTDs y termistores, voltaje y corriente ac/dc; resistencia; frecuencia y periodo con 50000 puntos de lecturas en memoria no volátil que mantiene los datos aun cuando el voltaje de AC es eliminado. El software Agilent BenchLink Data Logger esta incluido con la unidad de adquisición de datos 34970A. que es una interface de la familia Microsoft Windows® interface y permite la configuración de la prueba en tiempo real y análisis de datos. Es posible exportar los datos a formato de hoja de cálculo Excel.

Pirómetro

Para medir la temperatura de la superficie del anillo que aprieta el anillo interno del rodamiento al eje se utilizó un pirómetro Testo 860-T1 . Este instrumento es un medidor de



Figura 6.9 Unidad de adquisición de datos Agilent 34970A

temperaturas sin contacto mediante láser con una gama de temperaturas que va de -30 a 900 °C. Con este equipo se define el área que se mide por lo que siempre se sabe exactamente dónde se encuentra la medición.

Las ventajas que presenta el pirómetro Testo 860-T1 son las siguientes:

- Posee un láser circular con visualizador que indica el lugar exacto de la zona donde se mide la temperatura.
- Función de alarma, acústica y visual
- Emisividad totalmente ajustable en un rango de 0,10 a 1,00.
- Pantalla amplia y de fácil visualización.



Figura 6.10 Pirómetro Testo 860-T1

El rango de medida de temperaturas va de -30,0 ... 900,0 °C. La resolución es de $\pm 0,1$ °C (-30,0 .. 900,0 °C) . La exactitud de la medida es de:

- $\pm 2,0\text{ }^{\circ}\text{C} + 1\text{ dígito para } T < -5,0\text{ }^{\circ}\text{C}$
- $\pm 0,75\text{ }^{\circ}\text{C} + 1\text{ dígito para } T\text{ de } -4,9\text{ a } 74,9\text{ }^{\circ}\text{C}$
- $\pm 0,75\text{ \% del vm} + 1\text{ dígito para } T\text{ de } 75,0\text{ a } 900,0\text{ }^{\circ}\text{C}.$

6.3.3. Ordenador

Para el registro de la señal vibratoria, una vez que la tarjeta digitalizadora ha transformado la señal analógica en señal discreta y con la ayuda del software que complementa y gestiona la tarjeta: el programa Test Point que permite controlar la tarjeta digitalizadora y almacena los ficheros de datos, en formato ASCII, resultado de la digitalización de la señal de vibración. En el computador se desarrollaron una serie de rutinas en el entorno MATLAB para aplicar las técnicas antes citadas, de forma rápida y sencilla, a partir de algoritmos originales y otros ya conocidos. Así se generarán gráficos e informes que nos permitirán analizar la señal de vibración.

La visualización en tiempo real así como el registro de las temperaturas se realiza a través del puerto serie del ordenador, utilizando el software Agilent BenchLink Data Logger.

6.3.4. Cableado

El cableado de todos los elementos es el que recomiendan los fabricantes de instrumentos para el correcto registro de la señal de vibración y temperaturas, utilizando los apantallamientos convenientemente y evitando las interferencias por lazos de tierra y el ruido tribológico.

6.3.5. Banco de ensayos de rodamientos

Para alcanzar los objetivos del presente trabajo de investigación resultaba imprescindible disponer de un banco de ensayos sobre el que experimentar diferentes tipos de elementos mecánicos y su comportamiento vibratorio (Figura 6.11).

Las características más relevantes que se tuvieron en cuenta a la hora de diseñar el banco de ensayos fueron las que a continuación se señalan:

1. Posibilidad de reproducir las diversas características de trabajo de los rodamientos que se estudien. Para ello, se contará con un mecanismo de aplicación de cargas que permita actuar sobre el rodamiento tanto axial como radialmente.
2. Sencillez y fiabilidad en el sistema de medida y facilidad en la regulación de los esfuerzos que se apliquen al rodamiento objeto de estudio.
3. El banco debe contar con la posibilidad de regular con precisión la velocidad de giro, manteniendo en cada régimen de vueltas seleccionado la adecuada estabilidad.
4. El diseño del alojamiento del rodamiento debe permitir su montaje y desmontaje con facilidad. El banco de rodamientos consistirá en una estructura de máxima sencillez, compuesta de perfiles de acero ensamblados. Esta estructura estará diseñada de forma que posea una rigidez aceptable, unos coeficientes elevados de amortiguamiento y unas

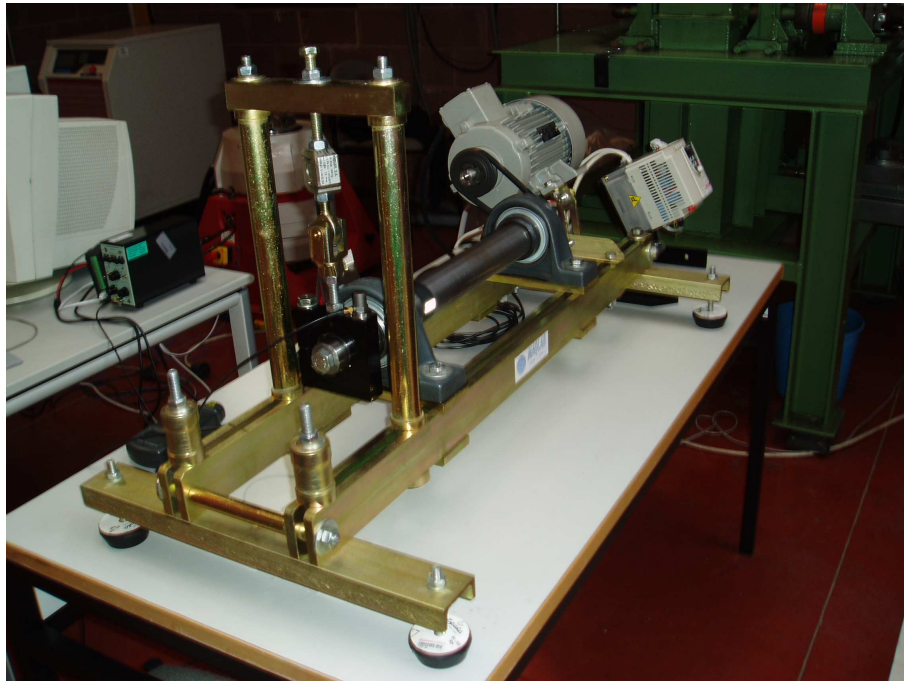


Figura 6.11 Banco de ensayo de rodamientos

frecuencias propias alejadas de las frecuencias de defecto esperadas, ya sean los fallos desequilibrios, desalineamientos, o defectos en los rodamientos estudiados, etc.

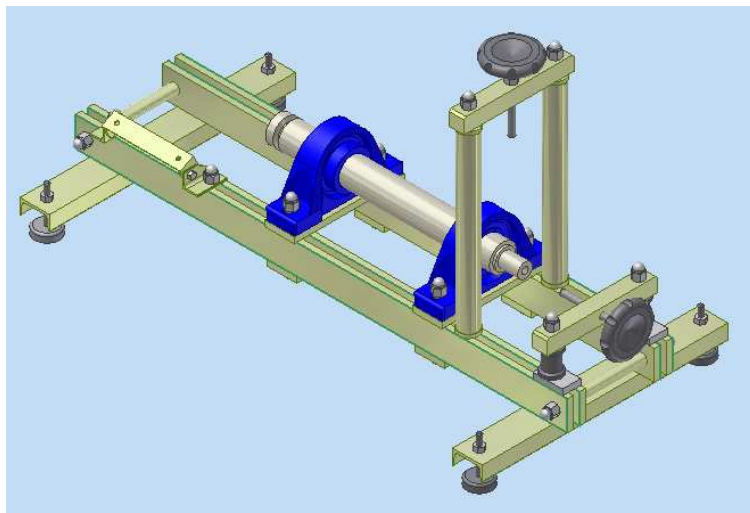


Figura 6.12 Bastidor del banco de ensayo de rodamientos

Como se observa en la Figura 6.12 sobre este bastidor, con las características mencionadas anteriormente, se sitúan los soportes de rodamiento de la marca INA, cuyas características se detallan en la Figura 6.13 , que alojan al eje principal. Cercano a uno de los extremos de este eje, se practica una entalla con la forma adecuada para que por ella se arrastre una correa trapezoidal que es accionada por una polea insertada en el eje del motor eléctrico de accionamiento. El otro extremo del eje-rotor se mecaniza para adecuar su diámetro al del

agujero del rodamiento objeto de estudio. Sobre este extremo se pueden colocar casquillos que se adecúen al diámetro del agujero del rodamiento, pudiendo de esta forma,ensayar varios tipos de rodamientos.

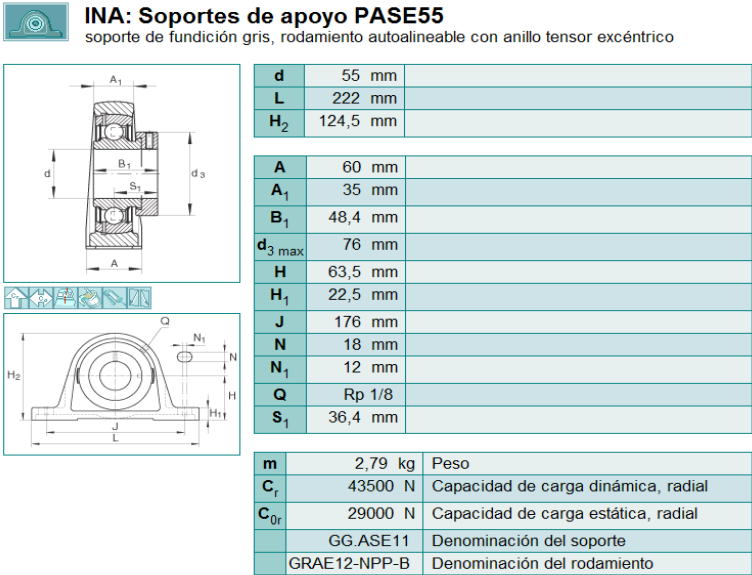


Figura 6.13 Características y dimensiones de los soportes del rotor del banco de ensayos

Para evitar que el anillo interior del rodamiento objeto de ensayo deslice sobre la superficie del eje, se ha dispuesto un sistema de fijación mediante un casquillo y un tornillo, según se muestra en la Figura 6.14.

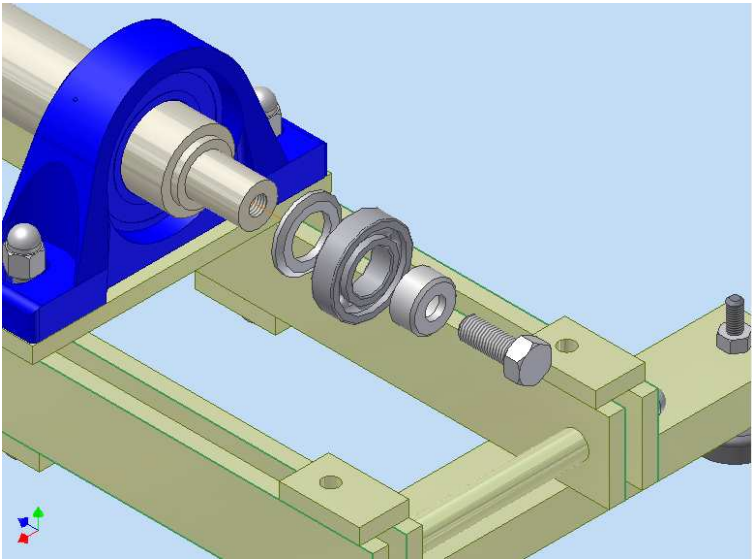


Figura 6.14 Sistema de fijación del rodamiento al rotor

En cuanto al sistema de transmisión de movimiento del motor al eje, como se comentó, se optó por una transmisión elástica mediante una correa trapezoidal frente al acoplamiento elástico directo debido, mayormente, al reducido par que hay que transmitir del motor al eje y

la necesidad de un preciso alineamiento motor-eje para evitar vibraciones externas al elemento estudiado. El sistema de actuación de la carga sobre el rodamiento se efectúa por medio de dos husillos que actúan radial y axialmente Figura 6.15 .

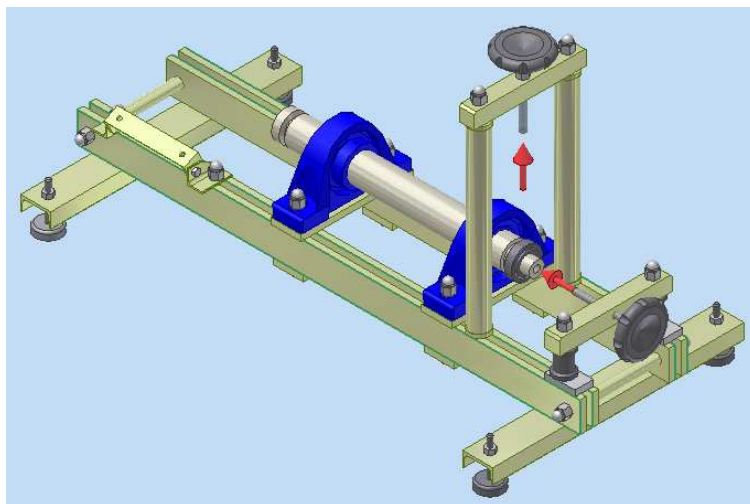


Figura 6.15 Aplicación de la carga al rodamiento ensayado

La regulación de la carga se realiza girando el husillo manualmente hasta que el visor indique la carga apropiada al ensayo que se está realizando. Se eligió el accionamiento mediante husillo por la facilidad de control de cargas aplicadas y la posibilidad de motorizar en un futuro estas maniobras y automatizar el procedimiento de ensayo. El control de la fuerza o carga que actúa sobre el rodamiento, se realiza mediante dos células de carga con sus correspondientes visores. Las células de carga son del modelo S-2 (A), con un límite de 1000 Kg. El visor es el modelo SC-01 de la misma firma Sensocar.

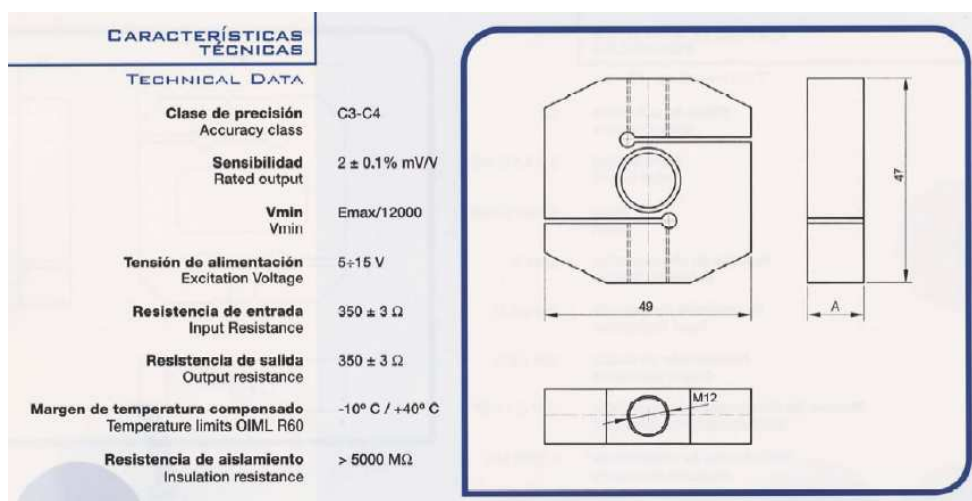


Figura 6.16 Características de las células de carga empleadas en el banco de ensayos

La brida o alojamiento del rodamiento Figura 6.17 se ha diseñado de forma que pueda cambiarse el rodamiento sin grandes esfuerzos y sin necesidad de tener que utilizar

herramientas especiales como extractores. Se ha diseñado prestando una atención especial a las frecuencias propias de vibración, de forma que estas no se encuentren próximas a las frecuencias esperadas de defecto en los rodamientos.

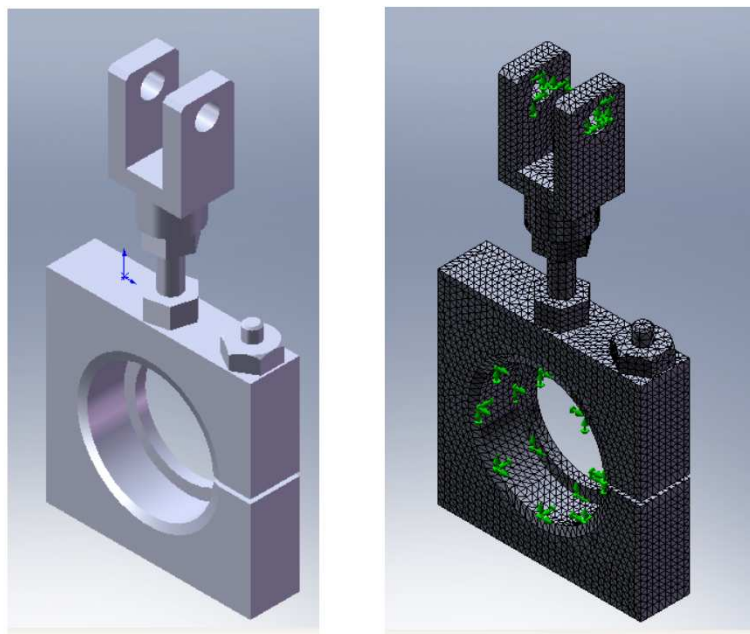


Figura 6.17 Brida o alojamiento del rodamiento

Para determinar las frecuencias de resonancia de la brida, se ha utilizado el software Cosmos. La simulación se ha realizado considerando como restricciones fijas el alojamiento del rodamiento y los agujeros de la horquilla Figura 6.17.

En la Tabla 6.3 se muestran los valores de las ocho primeras frecuencias propias de la brida y en la Figura 6.18 el modo correspondiente a la 5ª frecuencia propia.

Frecuencia	Hz.
1	5716
2	6159
3	9977
4	11206
5	11487
6	11803
7	12137
8	16020

Tabla 6.3 Frecuencias naturales de la brida

En las Figuras 6.19 y 6.19 se pueden observar completa y detalladamente los elementos mecánicos que componen el banco de ensayos de rodamientos.

El Banco de ensayos dispone de un motor eléctrico trifásico encargado del accionamiento del eje sobre el que se sitúa el rodamiento a estudiar. La regulación de la velocidad del motor

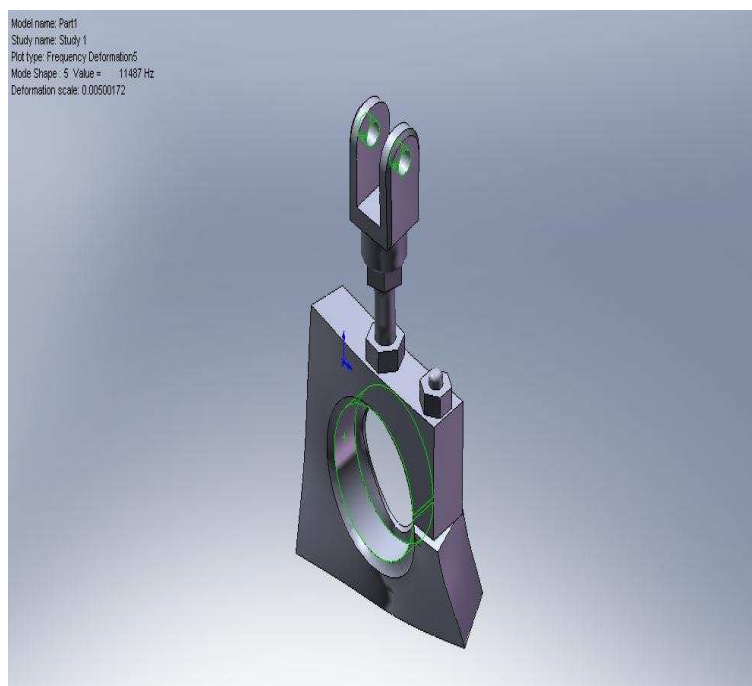


Figura 6.18 Modo de la quinta frecuencia propia de la brida

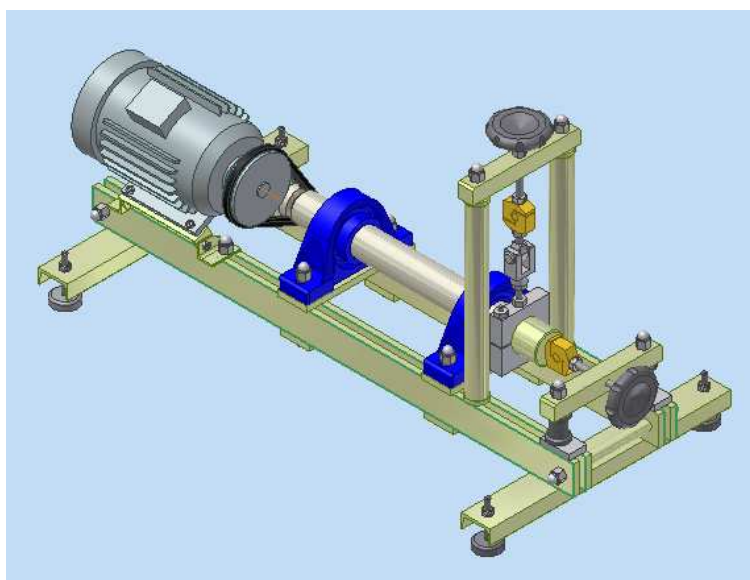


Figura 6.19 Elementos que componen el banco de ensayos de rodamientos, modelo

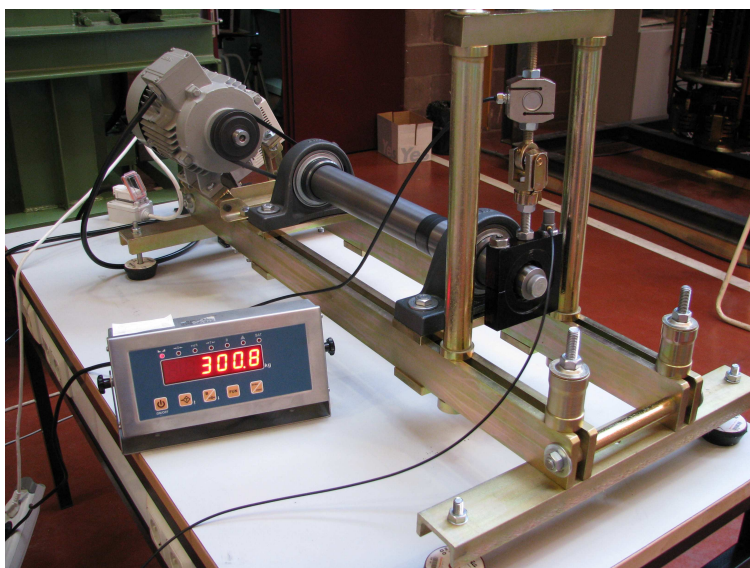


Figura 6.20 Elementos que componen el banco de ensayos de rodamientos, banco real



Figura 6.21 Variador de frecuencia para control de velocidad del rotor

trifásico de corriente alterna utilizado en el banco de ensayos, se realiza por medio de un variador electrónico de frecuencia. Se prefirió este sistema, frente a los variadores mecánicos, por su sencillez de control así como por la mayor precisión en la velocidad requerida. En el armario de control correspondiente se sitúa el variador de velocidad con los correspondientes controles y elementos de seguridad.

También en el armario de control se coloca un tacómetro encargado de registrar a través del adecuado captador la velocidad del eje del banco en todo momento. Al seleccionar el motor a instalar en el banco de ensayos se ha tenido en cuenta que el par de rozamiento que origina la resistencia de rozamiento del rodamiento a ensayar quede convenientemente por debajo del par nominal del motor. El caso desfavorable se corresponderá con aquellos ensayos en los que la lubricación sea escasa o nula.

El motor del banco de ensayos es un motor trifásico comercial Siemens de 1,5 kW., rotor en cortocircuito, de 4 polos y 50 Hz. con una velocidad nominal de 1420 r.p.m., cuya velocidad es regulada variando la frecuencia de giro. El par nominal es de 5,23 Nm.

El variador de velocidad es de la firma comercial TOSHIBA, modelo VFNC15, para una tensión de alimentación monofásica de 230 V., con salida a motor de 1,5 kW de 3 x 230 V.

y con las correspondientes protecciones internas a cortocircuitos en la salida, fugas a tierra y tensión de red excesiva o transitorios. La frecuencia de la corriente de salida puede modificarse de 0 a 100 Hz. con lo que se consigue la correspondiente variación de velocidad, alcanzándose por tanto unas 3000 r.p.m. en el motor. El variador dispone de dispositivos de regulación y control de la aceleración y deceleración que son controlados en función de la inercia, llegando a parar si la sobretensión que se produce es excesiva.

6.4. DISEÑO DE EXPERIMENTOS

6.4.1. Ensayos vibratorios

En el banco de ensayos se pueden variar la velocidad de rotación del anillo interno (activando un mando giratorio del variador de velocidad) o fijándole la velocidad, la carga que actúa sobre el rodamiento (actuando sobre los husillos que soportan las células de carga).

Para colocar el rodamiento en el banco de ensayos, primero se monta el anillo interior del rodamiento sobre el eje o árbol de la bancada, posteriormente se monta la arandela y se aprieta el tornillo, de esta forma, el anillo interno queda solidario al eje. Seguidamente, se monta la brida sobre el anillo externo y se aprieta el tornillo con una llave dinamométrica a 10 N.m, de esta forma queda montado el rodamiento con las tolerancias correspondientes según el catálogo del fabricante. A continuación se une, mediante una rótula, la brida a la célula de carga que, unida al husillo correspondiente que proporciona la carga radial necesaria en el ensayo.

Una vez montado el rodamiento, se actúa sobre el husillo hasta alcanzar la carga planificada. Se sitúa el acelerómetro sobre la brida y ya está preparado el sistema para ponerlo en marcha. Cuando comienza a funcionar, por medio del mando situado sobre el variador de frecuencia, se consigue ajustar la velocidad de rotación a la velocidad necesaria para el ensayo.

Los ensayos se van a realizar con carga variable, de 100 Newton hasta 3000 Newton, y velocidad variable, desde 300 rpm (5Hz) hasta 2400 rpm (50 Hz), tal y como se detalla en la Tabla 6.4.

Carga Newton	Velocidad	
	Hz	r.p.m.
100	5	300
500	10	600
1000	20	1200
1500	30	1800
2000	40	2400
2500		
3000		

Tabla 6.4 Parámetros Carga-Velocidad de los ensayos de rodamientos

En total tenemos 35 estados de carga-velocidad diferentes para cada serie de rodamientos 's, e, i' de los cuales se registraron 10 archivos. La nomenclatura seguida en la clasificación de las señales vibratorias, consta de 8 dígitos distribuidos según se indica en la Tabla 6.5:

a, b	Carga aplicada, x 100 Newton : 01, 05, 10, 15, 20, 25, 30
c	Número de bolas : T (3 bolas) ; N (9 bolas)
d, e	Velocidad en Hz. : 05, 10, 20, 30, 40
f	Defecto : S (sin defecto) ; E (defecto anillo externo) ; I (defecto anillo interno)
g, h	número de la serie, de 00 hasta 99

Tabla 6.5 Código seguido para la nomenclatura de los archivos

Así, por ejemplo, para nombrar el archivo de datos correspondiente al tercer ensayo del rodamiento con 3 bolas "Te5"soportando una carga radial de 1000 Newton, con defecto en el anillo externo y con una velocidad de giro del anillo interno de 2400 rpm, seria la siguiente:

10T40E52_.txt

Los 210 estados de carga-velocidad quedan registrados en 210 ficheros de datos. Cada fichero contiene la información de 100 medidas correspondientes a una serie de rodamientos y 10 medidas por rodamiento de la serie.

Cada medida se realiza durante un tiempo de 4 segundos a una frecuencia de muestreo de 5 kHz, lo que supone un registro de 20000 datos tomados cada 0.0002 segundos. Para seleccionar los valores citados anteriormente, además de la información que aporta la literatura, mi experiencia y la de mis tutores, se realizaron dos ensayos para comprobar las diferencias entre ellos, muestreando a 5 kHz en un ensayo y muestreando a 10 kHz en el otro ensayo.

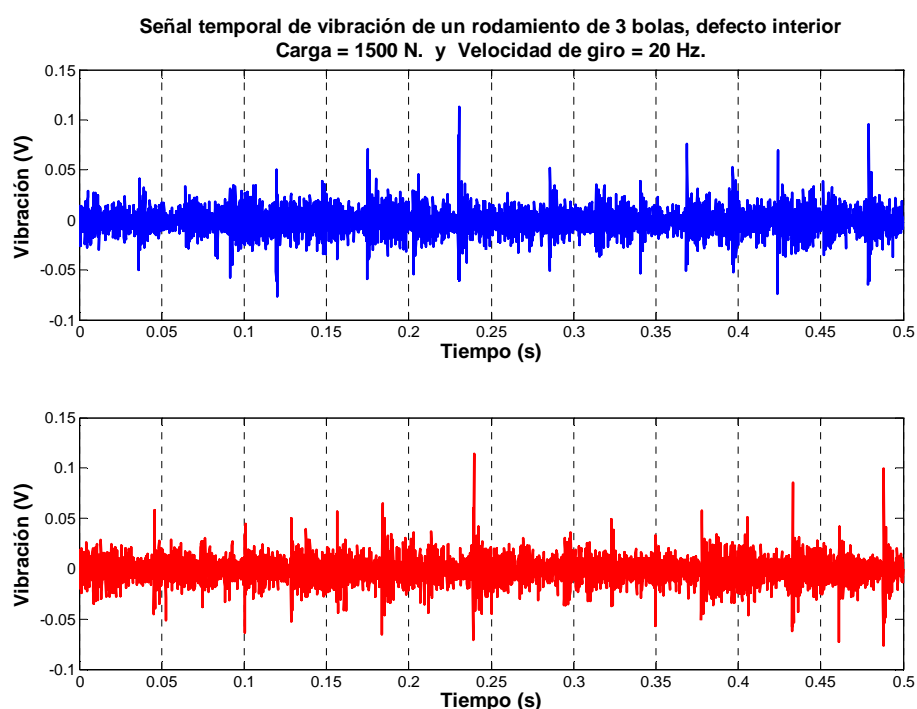


Figura 6.22 Señales temporales obtenidas muestreando 10 kHz.

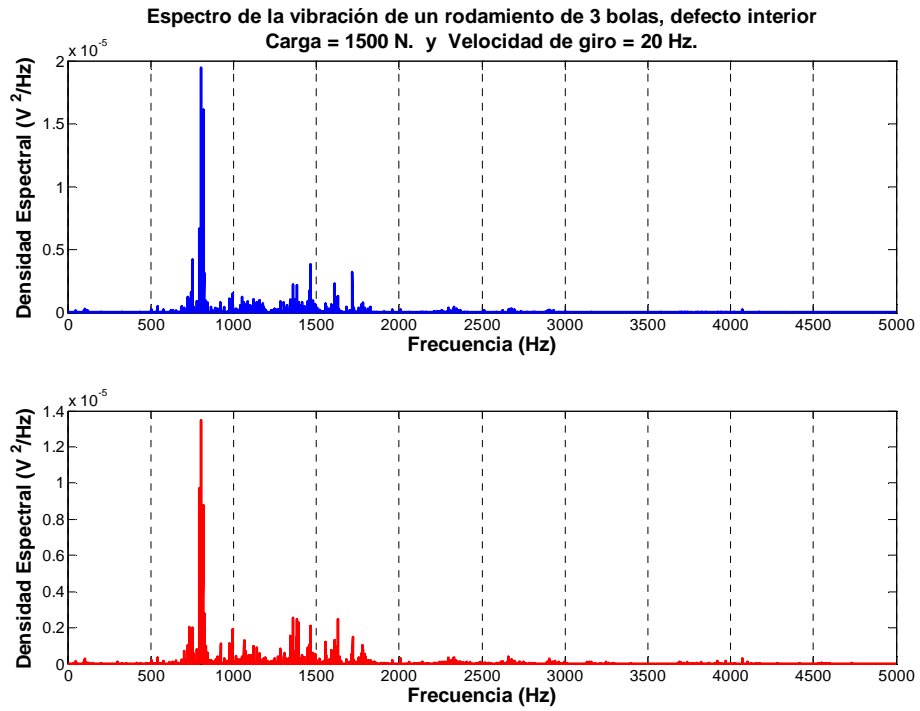


Figura 6.23 Espectros de la señal temporal obtenida muestreando a 10 kHz.

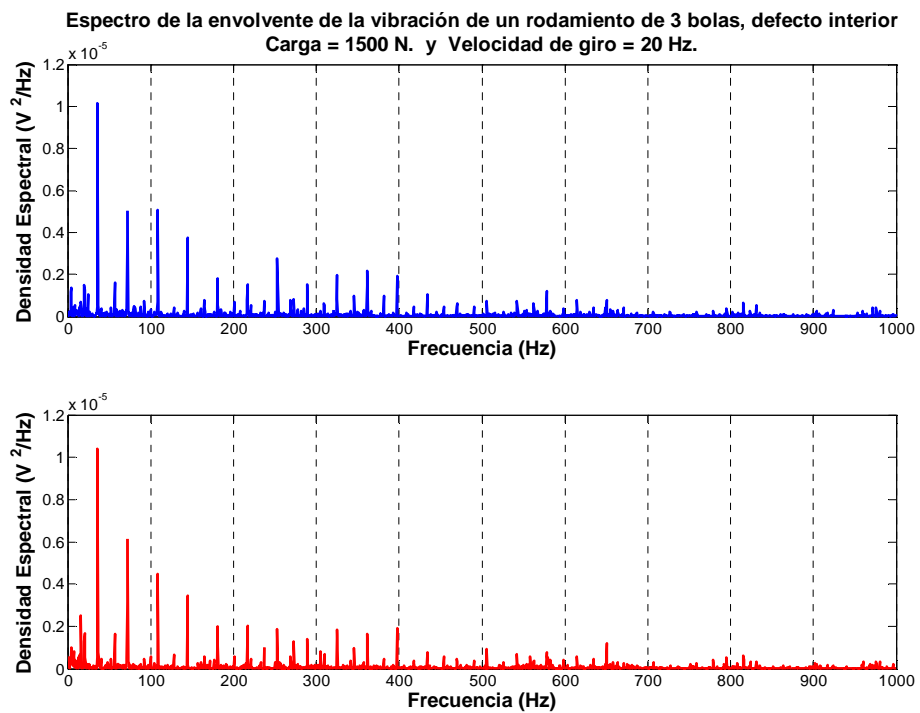


Figura 6.24 Espectros de la envolvente de la señal temporal obtenida muestreando a 10 kHz.

La Figura 6.22 muestra las señales temporales de dos archivos muestreados a distintas frecuencias. Como puede apreciarse, las medidas son muy repetitivas, tanto en forma como en magnitud y tanto su espectro Figura 6.23 como el espectro de sus envolventes Figura 6.24 son muy similares. También se observó en el espectro Figura 6.23 que a partir de los 2500 Hz, los armónicos que aparecen eran poco significativos, por eso se optó por tomar finalmente, una frecuencia de muestreo de 5000 Hz. además, seleccionando los 5 kHz tenemos una resolución en el espectro de frecuencia de 0'25 Hz frente a los 0'5 Hz de resolución que tendríamos muestreando a 10 kHz.

Otro aspecto importante que debe tenerse en cuenta es la ganancia utilizada en el amplificador. Esta tiene que ser lo mayor posible pero sin que el amplificador se sature, ya que la señal quedaría truncada y como consecuencia, perderíamos información y quedarían distorsionados los resultados. En cualquier caso, aunque se registre una señal con ganancia menor de la óptima, repercutiría en la misma apareciendo un leve ruido eléctrico.

Si observamos la Figura 6.25 se corresponden a dos señales temporales medidas en condiciones operativas similares, una con ganancia óptima (señal en rojo) y otra con ganancia un poco inferior (señal en azul). Se aprecia como en esta última (señal en azul) los picos de defecto aparecen más camuflados. Si observamos los espectros de las mismas señales Figura 6.26, vemos como aparecen picos de ruido eléctrico (50 y 100 Hz.) y alrededores de los 2000 Hz. En el espectro de la envolvente Figura 6.27 se aprecia que en la señal con menos ganancia (azul) aparecen los citados picos a 50 y 100 Hz.

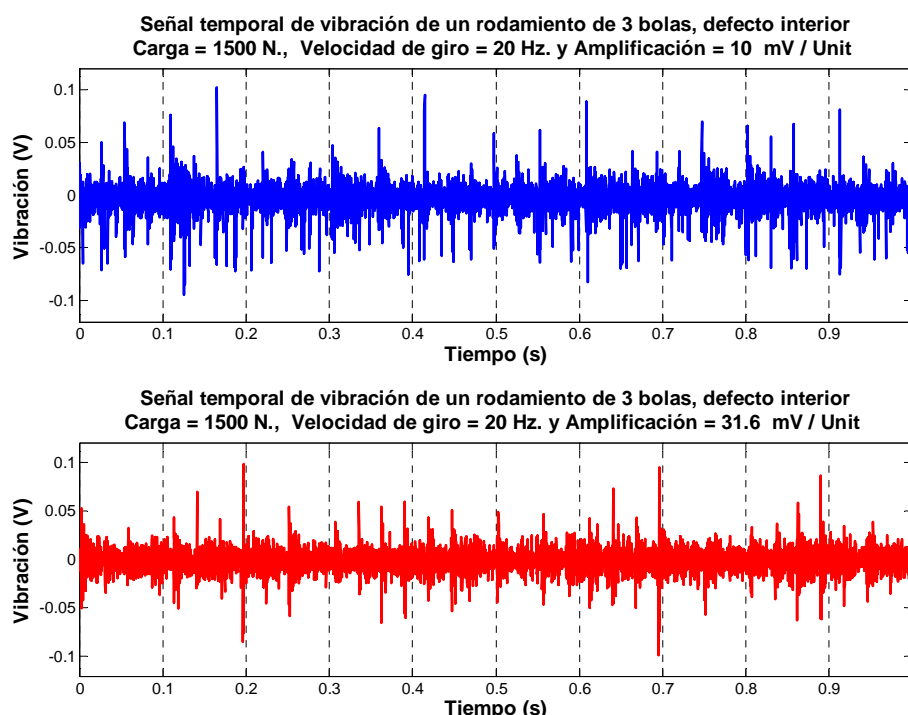


Figura 6.25 Señales temporales obtenidas con distintas ganancias

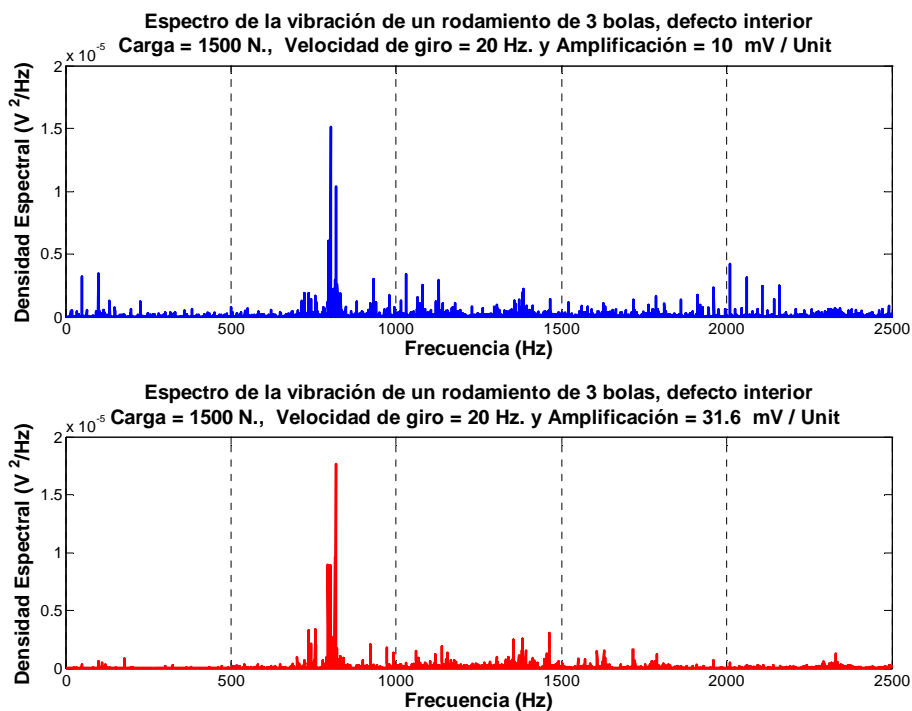


Figura 6.26 Espectros de las señales temporales obtenidas con distintas ganancias

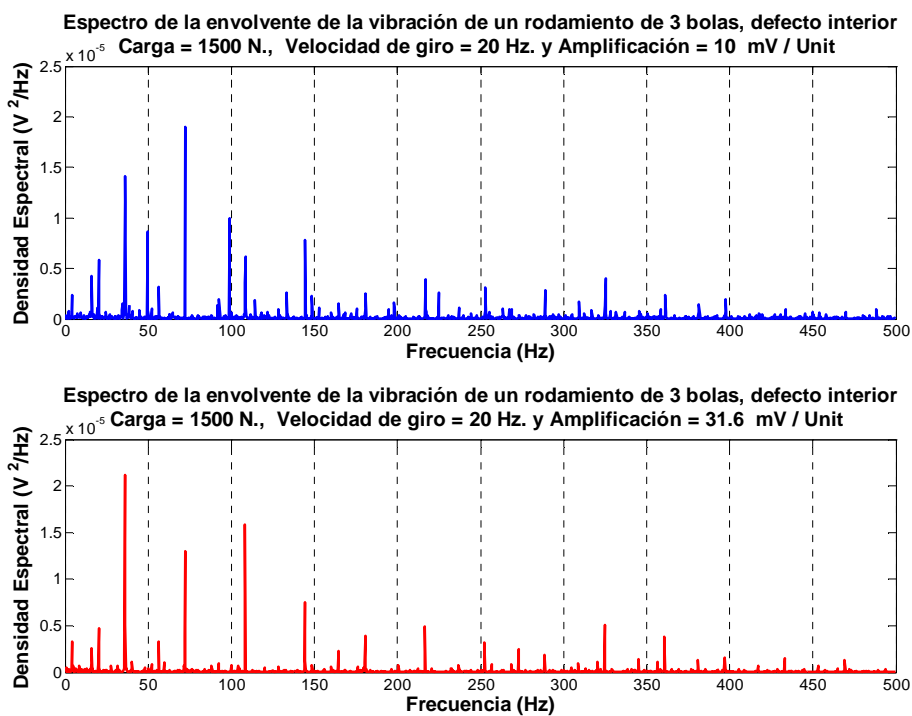


Figura 6.27 Espectros de las envolventes de las señales temporales obtenidas con distintas ganancias

Los ensayos pueden agruparse en 6 grupos según el número de bolas y el tipo de defecto en los rodamientos, incluidos los rodamientos sin defecto, resultando los archivos que se muestran en las Tablas 6.6 a 6.11.

	Velocidad (Hz.) AB=00, 01, ..., 99				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01T05SAB	01T10SAB	01T20SAB	01T30SAB	01T40SAB
500	05T05SAB	05T10SAB	05T20SAB	05T30SAB	05T40SAB
1000	10T05SAB	10T10SAB	10T20SAB	10T30SAB	10T40SAB
1500	15T05SAB	15T10SAB	15T20SAB	15T30SAB	15T40SAB
2000	20T05SAB	20T10SAB	20T20SAB	20T30SAB	20T40SAB
2500	25T05SAB	25T10SAB	25T20SAB	25T30SAB	25T40SAB
3000	30T05SAB	30T10SAB	30T20SAB	30T30SAB	30T40SAB

Tabla 6.6 Notación empleada en los ficheros experimentales utilizando rodamientos de 3 bolas sin defecto

	Velocidad (Hz.) AB=00, 01, ..., 99				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01T05EAB	01T10EAB	01T20EAB	01T30EAB	01T40EAB
500	05T05EAB	05T10EAB	05T20EAB	05T30EAB	05T40EAB
1000	10T05EAB	10T10EAB	10T20EAB	10T30EAB	10T40EAB
1500	15T05EAB	15T10EAB	15T20EAB	15T30EAB	15T40EAB
2000	20T05EAB	20T10EAB	20T20EAB	20T30EAB	20T40EAB
2500	25T05EAB	25T10EAB	25T20EAB	25T30EAB	25T40EAB
3000	30T05EAB	30T10EAB	30T20EAB	30T30EAB	30T40EAB

Tabla 6.7 Notación empleada en los ficheros experimentales utilizando rodamientos de 3 bolas con defecto en anillo externo

	Velocidad (Hz.) AB=00, 01, ..., 99				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01T05IAB	01T10IAB	01T20IAB	01T30IAB	01T40IAB
500	05T05IAB	05T10IAB	05T20IAB	05T30IAB	05T40IAB
1000	10T05IAB	10T10IAB	10T20IAB	10T30IAB	10T40IAB
1500	15T05IAB	15T10IAB	15T20IAB	15T30IAB	15T40IAB
2000	20T05IAB	20T10IAB	20T20IAB	20T30IAB	20T40IAB
2500	25T05IAB	25T10IAB	25T20IAB	25T30IAB	25T40IAB
3000	30T05IAB	30T10IAB	30T20IAB	30T30IAB	30T40IAB

Tabla 6.8 Notación empleada en los ficheros experimentales utilizando rodamientos de 3 bolas con defecto en anillo interno

	Velocidad (Hz.) AB=00, 01, ..., 99				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01N05SAB	01N10SAB	01N20SAB	01N30SAB	01N40SAB
500	05N05SAB	05N10SAB	05N20SAB	05N30SAB	05N40SAB
1000	10N05SAB	10N10SAB	10N20SAB	10N30SAB	10N40SAB
1500	15N05SAB	15N10SAB	15N20SAB	15N30SAB	15N40SAB
2000	20N05SAB	20N10SAB	20N20SAB	20N30SAB	20N40SAB
2500	25N05SAB	25N10SAB	25N20SAB	25N30SAB	25N40SAB
3000	30N05SAB	30N10SAB	30N20SAB	30N30SAB	30N40SAB

Tabla 6.9 Notación empleada en los ficheros experimentales utilizando rodamientos de 9 bolas sin defecto

	Velocidad (Hz.) AB=00, 01, ..., 99				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01N05EAB	01N10EAB	01N20EAB	01N30EAB	01N40EAB
500	05N05EAB	05N10EAB	05N20EAB	05N30EAB	05N40EAB
1000	10N05EAB	10N10EAB	10N20EAB	10N30EAB	10N40EAB
1500	15N05EAB	15N10EAB	15N20EAB	15N30EAB	15N40EAB
2000	20N05EAB	20N10EAB	20N20EAB	20N30EAB	20N40EAB
2500	25N05EAB	25N10EAB	25N20EAB	25N30EAB	25N40EAB
3000	30N05EAB	30N10EAB	30N20EAB	30N30EAB	30N40EAB

Tabla 6.10 Notación empleada en los ficheros experimentales utilizando rodamientos de 9 bolas con defecto en anillo externo

	Velocidad (Hz.) AB=00, 01, ..., 99				
Carga (N.)	05	10	20	30	40
100	01N05IAB	01N10IAB	01N20IAB	01N30IAB	01N40IAB
500	05N05IAB	05N10IAB	05N20IAB	05N30IAB	05N40IAB
1000	10N05IAB	10N10IAB	10N20IAB	10N30IAB	10N40IAB
1500	15N05IAB	15N10IAB	15N20IAB	15N30IAB	15N40IAB
2000	20N05IAB	20N10IAB	20N20IAB	20N30IAB	20N40IAB
2500	25N05IAB	25N10IAB	25N20IAB	25N30IAB	25N40IAB
3000	30N05IAB	30N10IAB	30N20IAB	30N30IAB	30N40IAB

Tabla 6.11 Notación empleada en los ficheros experimentales utilizando rodamientos de 3 bolas con defecto en anillo interno

Para la realización de nuestro estudio se deben obtener las frecuencias que cabe esperar según el tipo de defecto que tenga el rodamiento ensayado, que se calculan según las fórmulas ya expuestas. Además, si se supone que la frecuencia de giro del anillo interior es de w_{in} Hz. (y el anillo exterior es fijo), las frecuencias de defecto para el rodamiento SKF 6206, considerando situaciones ideales, y los datos de la Tabla 6.12, serán:

Número de bolas	$Z=3$
Ángulo de contacto	$\alpha = 0^\circ$
Diámetro de las bolas	$dbo = 9.5 \text{ mm.}$
Diámetro medio	$dm = 46 \text{ mm.}$

Tabla 6.12 Parámetros del rodamiento ensayado

- Frecuencia de defecto en anillo externo:

$$BPFO = \frac{w_{in} \cdot Z}{2} \left(1 - \frac{dbo \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right) = \frac{w_{in} \cdot 3}{2} \left(1 - \frac{9.5 \cdot 1}{46} \right) = \frac{219}{184} \cdot w_{in} \text{ Hz}$$

- Frecuencia de defecto en anillo interno:

$$BPFI = \frac{w_{in} \cdot Z}{2} \left(1 + \frac{dbo \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right) = \frac{w_{in} \cdot 3}{2} \left(1 + \frac{9.5 \cdot 1}{46} \right) = \frac{333}{184} \cdot w_{in} \text{ Hz}$$

- Frecuencia de defecto en bola:

$$BPF = \frac{w_{in} \cdot Z}{2} \left[1 - \left(\frac{dbo \cdot \cos(\alpha)}{dm} \right)^2 \right] = \frac{w_{in} \cdot 3}{2} \left[\left(1 - \frac{9.5 \cdot 1}{46} \right)^2 \right] = 0.9444 \cdot w_{in} \text{ Hz}$$

Las Tablas 6.13 y 6.14 muestran los armónicos esperados en los espectros correspondientes a un rodamiento con tres bolas y defecto en el anillo interno y externo respectivamente.

Armónico	Frecuencia esperada (Hz)					
$1 \cdot w_{in}$	5	10	20	30	40	50
$2 \cdot w_{in}$	10	20	40	60	80	100
$3 \cdot w_{in}$	15	30	60	90	120	150
$4 \cdot w_{in}$	20	40	80	120	160	200
$5 \cdot w_{in}$	25	50	100	150	200	250
$6 \cdot w_{in}$	30	60	120	180	240	300
$BPFI - w_{in}$	4.05	8.1	16.2	24.3	32.4	40.5
$BPFI$	9.05	18.1	36.2	54.3	72.4	90.5
$BPFI + w_{in}$	14.05	28.1	56.2	84.3	112.4	140.5
$BPFI + 2 \cdot w_{in}$	19.05	48.1	76.2	114.3	152.4	190.5
$1.5 \cdot BPFI$	13.575	27.15	54.3	81.45	108.6	135.75
$(2 \cdot BPFI) - w_{in}$	13.1	26.2	52.4	78.6	104.8	131
$2 \cdot BPFI$	18.1	36.2	72.4	108.6	144.8	181
$(2 \cdot BPFI) + w_{in}$	23.1	46.2	92.4	138.6	184.8	231
$2.5 \cdot BPFI$	22.625	45.25	90.5	135.75	181	226.25
$(3 \cdot PFI) - w_{in}$	22.15	44.3	88.6	132.9	177.2	221.5
$3 \cdot BPFI$	27.15	54.3	108.6	162.9	217.2	271.5
$(3 \cdot BPFI) + w_{in}$	32.15	64.3	128.6	192.9	257.2	321.5

Tabla 6.13 Frecuencias de los principales armónicos esperados para un rodamiento con tres bolas y defecto en el anillo interno

Armónico	Frecuencia esperada (Hz)					
$1 \cdot w_{in}$	5	10	20	30	40	50
$2 \cdot w_{in}$	10	20	40	60	80	100
$3 \cdot w_{in}$	15	30	60	90	120	150
$4 \cdot w_{in}$	20	40	80	120	160	200
$5 \cdot w_{in}$	25	50	100	150	200	250
$6 \cdot w_{in}$	30	60	120	180	240	300
$BPFE - w_{in}$	0.95	1.9	3.8	5.7	7.6	9.5
$BPFE$	5.95	11.9	23.8	35.7	47.6	59.5
$BPFE + w_{in}$	10.95	21.9	43.8	65.7	87.6	109.5
$BPFE + 2 \cdot w_{in}$	15.95	31.9	63.8	95.7	127.6	159.5
$1.5 \cdot BPFE$	8.925	17.85	35.7	53.55	71.4	89.25
$(2 \cdot BPFE) - w_{in}$	6.9	13.8	27.6	41.4	55.2	69
$2 \cdot BPFE$	11.9	23.8	47.6	71.4	95.2	119
$(2 \cdot BPFE) + w_{in}$	16.9	33.8	67.6	101.4	135.2	169
$2.5 \cdot BPFE$	14.875	29.75	59.5	89.25	119	148.75
$(3 \cdot BPFE) - w_{in}$	12.85	25.7	51.4	77.1	102.8	128.5
$3 \cdot BPFE$	17.85	35.7	71.4	107.1	142.8	178.5
$(3 \cdot BPFE) + w_{in}$	22.85	45.7	91.4	137.1	182.8	228.5

Tabla 6.14 Frecuencias de los principales armónicos esperados para un rodamiento con tres bolas y defecto en el anillo externo

6.4.2. Ensayos amortiguamiento

El amortiguamiento es algo inherente a todas las estructuras. Dada la diversidad de valores asignados al coeficiente de amortiguamiento en el contacto bola-pista de rodadura en el material analizado, donde es necesario utilizar este valor, optamos por hallarlo de forma experimental. Para ello, utilizamos una arandela y una bola de un rodamiento axial. Los ensayos se realizan dejando caer una bola sobre la parte plana del anillo desde una altura de 300 mm. La señal del impacto y su decadencia en el tiempo se registran en un archivo de datos. El procesamiento de estos archivos permite obtener, mediante el método del decremento logarítmico o el método del ancho de banda, el valor buscado del coeficiente de amortiguamiento, según se describe a continuación.

Se define el amortiguamiento como la disminución progresiva en el tiempo de la intensidad de un fenómeno periódico []. Si un sistema mecánico que se encuentra vibrando no es excitado de forma continuada por alguna causa externa, la amplitud de las vibraciones va disminuyendo hasta desaparecer. El proceso por el cual la energía de la vibración se disipa hacia el medio en forma de calor o de vibraciones (sonido), se debe al amortiguamiento.

Existen varios mecanismos de amortiguamiento, entre los que cabe destacar:

- **Amortiguamiento seco de Coulomb.** Este es el que se produce en el rozamiento entre dos sólidos.
- **Amortiguamiento viscoso.** La fuerza resistente es proporcional a la velocidad, denominándose el factor de proporcionalidad coeficiente de amortiguamiento. Este es el único amortiguamiento que produce una vibración lineal, por lo que es el más usado a la hora de modelar sistemas complejos con amortiguamiento.
- **Amortiguamiento histérico o estructural.** Se debe al rozamiento interno entre las moléculas y cristales en el momento de la vibración. La relación fuerza-deformación genera un ciclo de histéresis cuya área encerrada en el ciclo es el trabajo disipado en forma de calor.

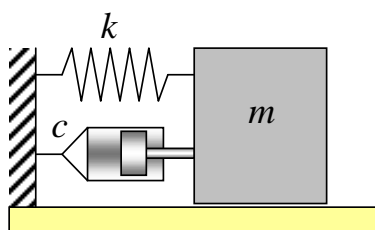


Figura 6.28 Sistema masa-muelle-amortiguador

Consideremos un sistema vibratorio masa-muelle-amortiguador como el representado en la Figura 6.28. La ecuación diferencial del movimiento viene dada por:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0 \quad (6.1)$$

La solución de esta ecuación diferencial describe el movimiento de la masa en función del tiempo. Esta solución es del tipo:

$$x = A \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad (6.2)$$

derivando la expresión 6.2 y sustituyendo el resultado en la ecuación 6.1 se obtiene:

$$m \cdot A \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t} + c \cdot A \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} + k \cdot A \cdot e^{\lambda \cdot t} = 0$$

La ecuación característica es $m \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + k = 0$. Resolviendo respecto a λ tenemos las dos raíces:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4 \cdot m \cdot k}}{2 \cdot m} \quad (6.3)$$

La solución general de la ecuación diferencial es del tipo:

$$x(t) = A_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$

Según el valor del discriminante de las raíces se distinguen tres casos:

- Si $c^2 - 4 \cdot m \cdot k > 0$ el sistema está sobreamortiguado (presenta amortiguamiento fuerte o supercrítico)
- Si $c^2 - 4 \cdot m \cdot k = 0$ el sistema tiene amortiguamiento crítico.
- Si $c^2 - 4 \cdot m \cdot k < 0$ el sistema oscila con amplitud decreciente (amortiguamiento débil o subcrítico)

Oscilador sobreamortiguado En este caso, el sistema no es realmente un oscilador, ya que no oscila, retorna a su posición de equilibrio lentamente, por tal motivo es denominado *sistema sobreamortiguado*. Sucede cuando $c^2 - 4 \cdot m \cdot k > 0$ y la solución es de la forma:

$$x(t) = A_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \quad (6.4)$$

donde los coeficientes de las exponenciales son menores que cero pero reales:

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4 \cdot m \cdot k}}{2 \cdot m} \quad \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4 \cdot m \cdot k}}{2 \cdot m}$$

Las constantes A_1 y A_2 dependen de las condiciones iniciales.

Oscilador con amortiguamiento crítico Este caso es el límite entre un sistema oscilante y uno no oscilante. Ocurre cuando $c^2 - 4 \cdot m \cdot k = 0$. Las dos raíces son iguales:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-c \pm 0}{2 \cdot m}$$

La solución única es:

$$x(t) = A_1 \cdot e^{\frac{-c}{2 \cdot m} \cdot t} + A_2 \cdot t \cdot e^{\frac{-c}{2 \cdot m} \cdot t} \quad (6.5)$$

Como antes, A_1 y A_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales. El valor de $c = \sqrt{4 \cdot m \cdot k}$ se denomina amortiguamiento crítico y se representa por c_{cr} .

$$c_{cr} = \sqrt{4 \cdot m \cdot k} = 2 \cdot m \cdot \omega_o \quad (6.6)$$

y, como puede apreciarse, solamente depende de las características del sistema oscilatorio.

Para otro valor cualquiera de c , se denomina relación de amortiguamiento al parámetro adimensional dado por:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{\sqrt{4 \cdot m \cdot k}} = \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega_o} \quad (6.7)$$

Oscilador con amortiguamiento débil . La amplitud de la senoide está controlada por el término de la exponencial.

En este caso, tenemos un oscilador que oscila alrededor de la posición de equilibrio con amplitud decreciente. Sucede cuando $c^2 - 4 \cdot m \cdot k < 0$.

La solución es de la forma:

$$x(t) = A \cdot e^{\frac{-c}{2 \cdot m} \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad (6.8)$$

Como antes, A y φ son constantes que dependen de las condiciones iniciales. La frecuencia de oscilación es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2} = \sqrt{\omega_o^2 - \left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2} \quad (6.9)$$

La frecuencia de oscilación del sistema amortiguado es un poco menor que la frecuencia de oscilación del sistema no amortiguado $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ porque la fuerza que lo amortigua, frena la masa y la retarda.

La oscilación del sistema está descrita por una senoide de frecuencia

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2}$$

cuya amplitud está multiplicada por una exponencial decreciente cuya constante de tiempo es $\tau = \frac{2 \cdot m}{c}$ (Figura 6.29).

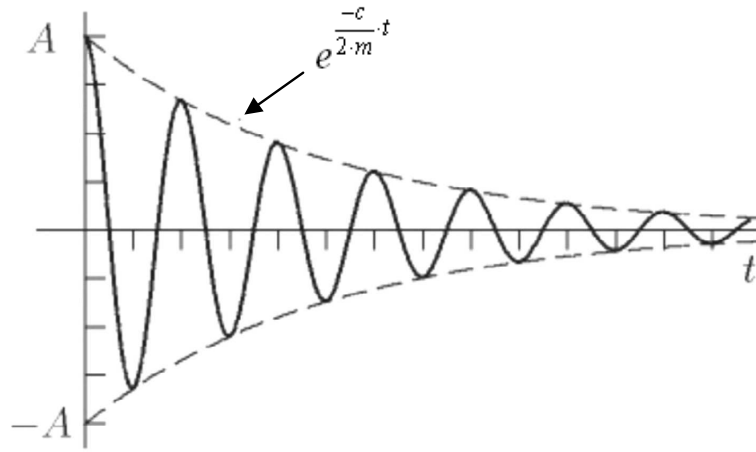


Figura 6.29 Decrecimiento de una señal con amortiguamiento débil

En la Figura 6.30 se muestran las respuestas del sistema para varios valores de la relación de amortiguamiento.

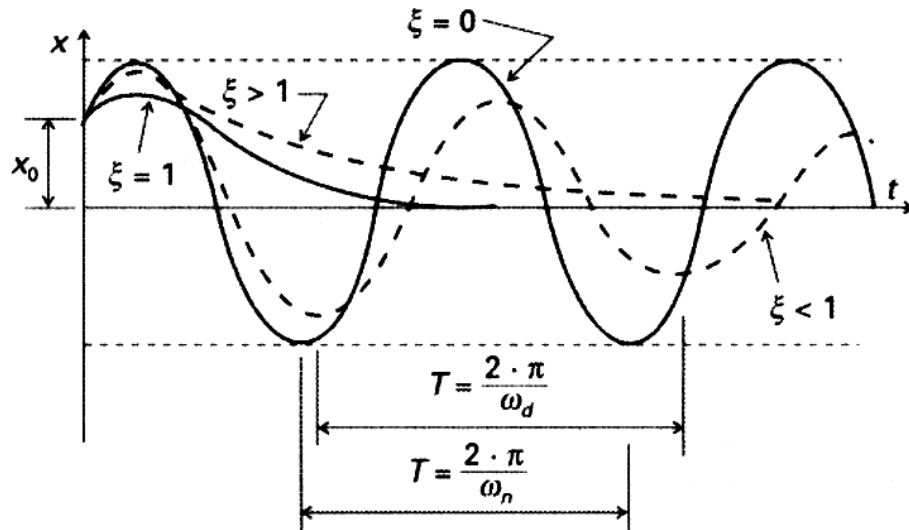


Figura 6.30 Señal con varios grados de amortiguamiento

La frecuencia natural amortiguada viene dada por la ecuación 6.10:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{c}{2 \cdot m \cdot k/m}\right)^2} = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2}{4 \cdot m^2 \cdot \omega_n^2}} \quad (6.10)$$

La ecuación 6.11 muestra la relación entre los valores de frecuencia natural amortiguada y la frecuencia natural del sistema.

$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{cr}^2}} = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad (6.11)$$

Método del decremento logarítmico

El procedimiento del decremento logarítmico es el método más utilizado, en el dominio del tiempo, para la estimación del amortiguamiento de un sistema oscilatorio. Como se ha visto, la respuesta de un sistema subamortiguado viene dada por la ecuación 6.12.

$$x(t) = A \cdot e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \varphi) \quad (6.12)$$

La relación entre las amplitudes correspondientes a dos máximos en los instantes t_1 y t_2 viene dada por la ecuación 6.13:

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{A \cdot e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t_1}}{A \cdot e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t_2}} \quad (6.13)$$

Simplificando y operando queda:

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot (t_1 - t_2)} = e^{\xi \cdot \omega_n \cdot (t_2 - t_1)} = e^{\xi \cdot \omega_n \cdot n \cdot T} \quad (6.14)$$

donde $n \cdot T$ es el número de periodos entre los instantes t_1 y t_2 .

Aplicando logaritmos neperianos en ambos miembros de la ecuación 6.14 y teniendo en cuenta que $\ln(e) = 1$, resulta:

$$\ln \left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)} \right) = \xi \cdot \omega_n \cdot n \cdot T \cdot \ln(e) \quad (6.15)$$

Considerando que $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$ y también que $\frac{\omega_n}{\omega_d} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$, de la ecuación 6.15 resulta finalmente la expresión que permite calcular el llamado decremento logarítmico, δ :

$$\delta = \ln \left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)} \right) = \frac{2\pi \cdot n \cdot \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (6.16)$$

Cuando el amortiguamiento es pequeño, $\xi < 0'1$ podemos simplificarla a:

$$\delta \cong 2\pi \cdot n \cdot \xi \quad (6.17)$$

Conocido el valor del decremento logarítmico, podemos determinar el valor del amortiguamiento del sistema mediante la ecuación 6.17.

Método del ancho de banda

Para determinar el amortiguamiento de un sistema en el dominio de la frecuencia, se utiliza el método del ancho de banda.

La respuesta en frecuencia de un sistema oscilatorio con 1 GDL y amortiguamiento viscoso, viene dado por la ecuación 6.18 :

$$|A(\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \omega)^2}} \quad (6.18)$$

La Figura 6.31 muestra gráficamente un ejemplo de esta función.

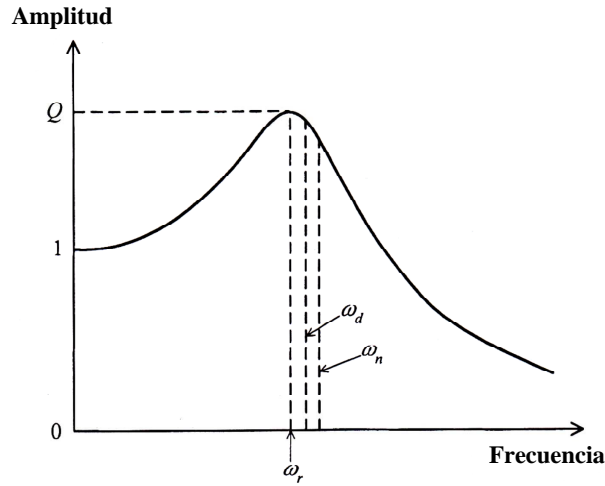


Figura 6.31 Respuesta en frecuencia de un sistema de 1 GDL

El pico de amplitud máxima tiene lugar a la frecuencia en que el denominador de la ecuación adquiere el valor mínimo. Derivando el denominador de la ecuación 6.18 tenemos:

$$\frac{d}{d\omega} \left[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \omega_n^2 \cdot \omega^2 \right] = 0$$

$$2 \cdot (\omega_n^2 - \omega^2) \cdot (-2\omega) + 8 \cdot \xi^2 \cdot \omega_n^2 \cdot \omega = 0$$

$$-4 \cdot \omega_n^2 \cdot \omega + 4 \cdot \omega^3 + 8 \cdot \xi^2 \cdot \omega_n^2 \cdot \omega = 0$$

$$\omega^2 = \omega_n^2 - 2 \cdot \xi^2 \cdot \omega_n^2 = \omega_n^2 (1 - 2 \cdot \xi^2)$$

$$\omega = \omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2} \quad (6.19)$$

Esta frecuencia para la cual la magnitud de la respuesta es máxima, se denomina frecuencia de resonancia, se denota con ω_r y viene dada por la ecuación 6.19.

Para amortiguamientos pequeños $\xi < 0.1$, los valores de ω_n , ω_d y ω_r están muy próximos. El factor de amplificación, Q , es el valor de la amplitud máxima que corresponde a la frecuencia de resonancia []. Este valor se obtiene sustituyendo la ecuación 6.19 en la ecuación 6.18.

$$Q = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\left(\omega_n^2 - \left(\omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2} \right)^2 \right)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \omega_n^2 \cdot \left(\omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2} \right)^2}}$$

$$Q = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega_n^4 \left[1 - 2 \cdot (1 - 2 \cdot \xi^2) + (1 - 2 \cdot \xi^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot (1 - 2 \cdot \xi^2) \right]}}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \xi^2 \cdot (1 - \xi^2)}} = \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (6.20)$$

Para pequeños valores de $\xi < 0.1$ resulta:

$$Q = \frac{1}{2 \cdot \xi} \quad (6.21)$$

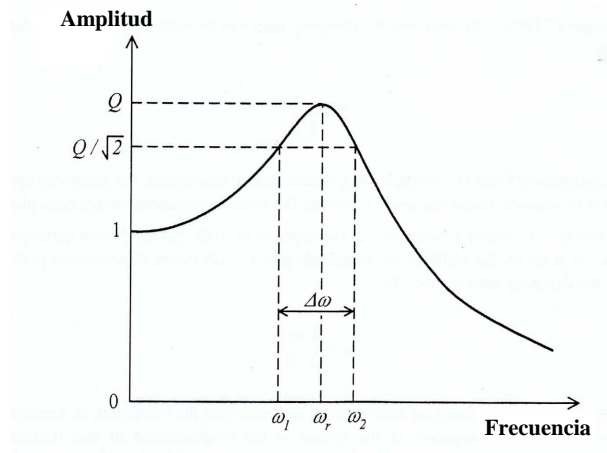


Figura 6.32 Representación gráfica del ancho de banda

Se define el ancho de banda $\Delta\omega$ como el valor de la diferencia de frecuencias alrededor de la frecuencia de resonancia ω_1, ω_2 que corresponden a un factor de amplificación $Q/\sqrt{2}$, según puede apreciarse en la Figura 6.32. Teniendo en cuenta que:

$$\frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{2}} \quad (6.22)$$

e igualando la ecuación 6.18 con este factor de amplificación, la ecuación 6.22 queda:

$$\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \omega_r)^2}} = \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{2}}$$

Operando podemos poner:

$$\omega_n^2 \cdot 2 \cdot \xi \cdot \sqrt{2} = \sqrt{(\omega_n^2 - \omega_r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \omega_r)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y reagrupando convenientemente, resulta la ecuación cuadrática en ω^2 :

$$(\omega_n^2 - \omega_r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \omega_r)^2 - (\omega_n^2 \cdot 2 \cdot \xi \cdot \sqrt{2})^2 = 0$$

$$\omega^4 - 2\omega_n^2 (1 - 2\xi^2) \cdot \omega^2 + \omega_n^4 (1 - 8\xi^2) = 0 \quad (6.23)$$

La ecuación 6.23 tiene dos raíces ω_1^2 y ω_2^2 de tal forma que:

$$(\omega^2 - \omega_1^2) \cdot (\omega^2 - \omega_2^2) = 0 \quad (6.24)$$

Desarrollando la ecuación 6.24 resulta:

$$(\omega^2 - \omega_1^2) \cdot (\omega^2 - \omega_2^2) = \omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \cdot \omega^2 + \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 = 0 \quad (6.25)$$

Identificando los coeficientes de las ecuaciones cuadráticas 6.23 y 6.25, tenemos:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = 2\omega_n^2 (1 - 2\xi^2) \quad (6.26)$$

y

$$\omega_1^2 \cdot \omega_2^2 = \omega_n^4 (1 - 8\xi^2) \quad (6.27)$$

Desarrollando el cuadrado de la diferencia de las frecuencias ω_1, ω_2 queda:

$$(\omega_1 - \omega_2)^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2 \quad (6.28)$$

Teniendo en cuenta los valores de las ecuaciones 6.26 y 6.27, podemos poner la ecuación 6.28 como:

$$(\omega_1 - \omega_2)^2 = 2\omega_n^2 (1 - 2\xi^2) - 2\omega_n^2 \sqrt{1 - 8\xi^2} \quad (6.29)$$

Para pequeños valores de ξ podemos poner:

$$\sqrt{1 - 8\xi^2} \cong 1 - 4\xi^2 \quad (6.30)$$

sustituyendo este valor en la ecuación 6.29 queda:

$$(\omega_1 - \omega_2)^2 \cong 2\omega_n^2 (1 - 2\xi^2) - 2\omega_n^2 (1 - 4\xi^2) \cong 4\xi^2 \omega_n^2 \quad (6.31)$$

por tanto, teniendo en cuenta la ecuación 6.31, para pequeños valores de amortiguamiento:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\xi\omega_n = 2\xi\omega_r \quad (6.32)$$

La ecuación 6.32 permite calcular el valor del factor de amortiguamiento conociendo el valor de la frecuencia de resonancia y el ancho de banda correspondiente:



Figura 6.33 Ensayos de amortiguamiento

$$\xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2 \cdot \omega_r} \quad (6.33)$$

Cálculo experimental del coeficiente de amortiguamiento

Para determinar el coeficiente de amortiguamiento en el contacto bola-anillo, realizamos el siguiente ensayo: desde una altura de 250 mm. se deja caer una bola de rodamiento sobre la cara plana de un anillo de rodamiento axial, obteniendo, mediante un acelerómetro, la señal del impacto y su decremento. A partir de esta señal vibratoria podemos obtener, mediante alguno de los métodos descritos anteriormente, el valor del coeficiente de amortiguamiento ξ .

La Figura 6.33 muestra el equipo utilizado para realizar los ensayos de amortiguamiento. Registramos en 5 archivos nombrados *damp_01.txt* a *damp_05.txt* la señal temporal correspondiente a 5 ensayos. La Figura 6.34 muestra la señal temporal de uno de estos archivos.

Dada la irregularidad que presenta la señal temporal, utilizaremos el método del ancho de banda para calcular el amortiguamiento. La Figura 6.35 muestra el espectro en frecuencia de la señal temporal mostrada en la Figura 6.34.

Tomaremos como valor del coeficiente de amortiguamiento, c , el valor medio que resulte de todos los coeficientes de amortiguamiento calculados a partir de las frecuencias de resonancia que se repiten en todos los archivos, en una banda que abarca desde los 0 Hz. Hasta los 5 kHz. La masa del anillo del rodamiento sobre el que se efectúan los ensayos es de 350 gramos. Realizando los cálculos, se obtiene un valor medio del coeficiente de amortiguamiento de $c = 15'82 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$.

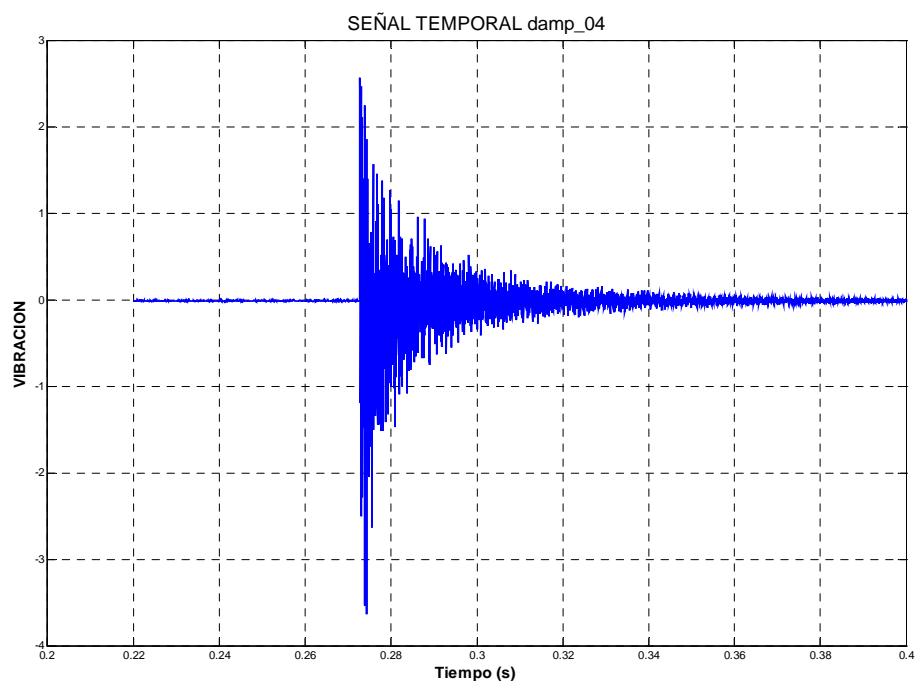


Figura 6.34 Señal temporal amortiguada del ensayo de impacto

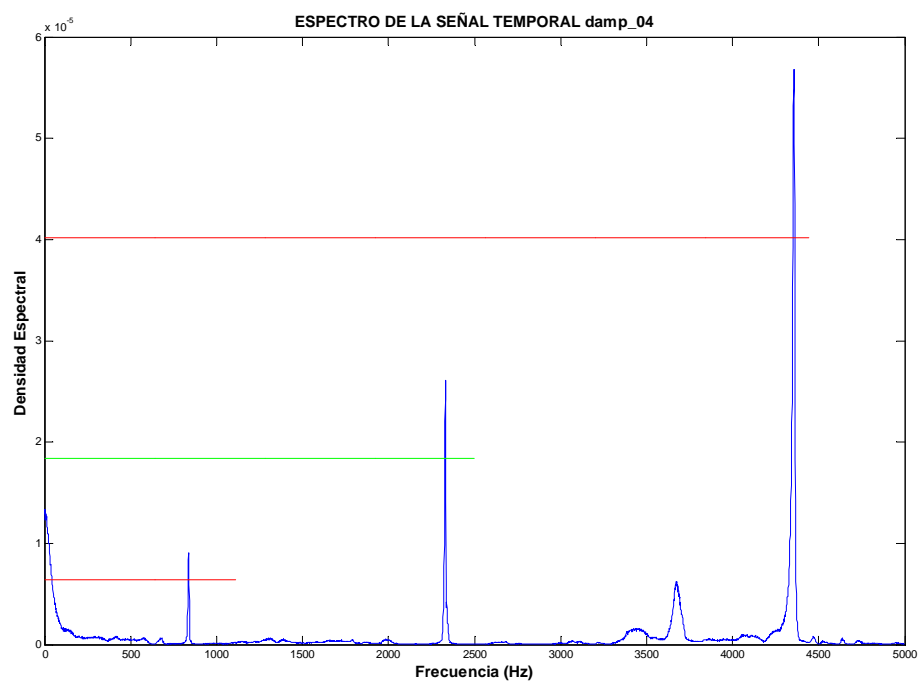


Figura 6.35 Espectro en frecuencia de la señal amortiguada de la Figura 6.34

6.4.3. Ensayos térmicos

El objetivo principal de los ensayos térmicos es la obtención del flujo de calor o, en su caso, la potencia disipada en el rodamiento en funcionamiento originada por las fuerzas disipativas. A partir del valor de la potencia disipada, se puede obtener, mediante la ecuación 4.1, el par de rozamiento que corresponde a cada una de las velocidades ensayadas y contrastar los resultados de este valor obtenido por distintos métodos en la sección 4.1.

Los ensayos se realizan con los seis tipos de rodamientos de que se dispone:

- Rodamientos con 9 bolas Sin defecto.
- Rodamientos con 9 bolas y defecto en el anillo Externo.
- Rodamientos con 9 bolas y defecto en el anillo Interno.
- Rodamientos con 3 bolas Sin defecto.
- Rodamientos con 3 bolas y defecto en el anillo Externo.
- Rodamientos con 3 bolas y defecto en el anillo Interno.

Para cada uno de estos tipos de rodamientos, se realizarán tres ensayos, a diferentes velocidades, que van desde las 600 r.p.m. hasta las 1800 r.p.m., manteniendo constante una carga radial de 3000 Newtons (no se aplica carga axial). La elección de estas cargas y velocidades se debe a lo siguiente:

- La potencia disipada es directamente proporcional al par de rozamiento, según se indica en la ecuación 4.1. Si la carga es muy pequeña, la potencia disipada es pequeña y la diferencia del valor del par calculado, por los distintos métodos, no es significativamente grande o distinto como para poder estimar el error que se comete en cada método y el que mejor se ajusta a los ensayos experimentales. Una carga mayor de 3000 N. supone un deterioro prematuro en los rodamientos con tres bolas, ya que con esta carga se pretende llegar al régimen estacionario de temperatura en el sistema mecánico.
- De igual forma, la potencia disipada es proporcional al régimen de giro. Una velocidad angular menor de 600 r.p.m. supone un tiempo de establecimiento del régimen permanente de temperatura excesivamente grande, mientras que una velocidad superior a las 1800 r.p.m. origina en la sala de ensayo grandes turbulencias de aire debido a la refrigeración del motor de accionamiento del rotor. Por estos motivos, se establecen como velocidades de ensayo 600, 1200 y 1800 r.p.m.

Los cálculos se realizan considerando las siguientes hipótesis:

- Todas las fuerzas disipativas se engloban en una única fuerza de rozamiento equivalente que se designa como Fr_e .
- La fuerza de rozamiento equivalente es proporcional a la tensión máxima en el punto de contacto $\sigma_{\text{máx}}$, cuyo valor viene dado por la ecuación 3.25.

- Todas las superficies estacionarias (sin movimiento) presentan el mismo coeficiente de radiación-convención.
- Todas las superficies en movimiento tienen el mismo coeficiente de radiación-convención.
- Cuando el sistema, tras el calentamiento, se detiene, las superficies que estaban en movimiento y ahora están estacionarias poseen igual coeficiente de radiación-convención y su valor es ligeramente superior al de las superficies que siempre han estado estacionarias, pues estas se encuentran a una temperatura superior.

Se implementó un modelo con el software Cosmos mediante el cual se hallará, por iteración, la potencia calorífica disipada en la pista interna y pista externa del rodamiento. La Figura 6.36 muestra el citado modelo.

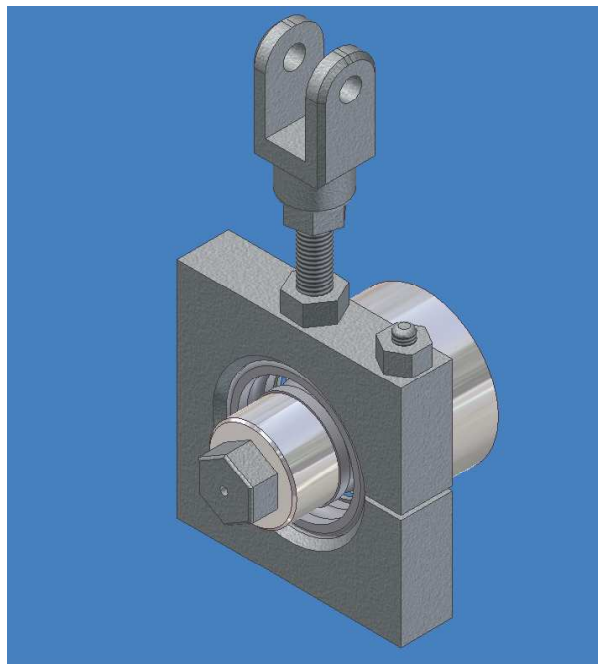


Figura 6.36 Modelo del conjunto brida-rodamiento para el estudio térmico

Creado el modelo, con la geometría y dimensiones adecuadas, se pasa al estudio térmico del mismo. En este estudio es necesario realizar los siguientes pasos:

- Selección del material de cada una de las partes del sistema.
- Introducir el valor de los coeficientes de transmisión (radiación y convención) para cada una de las superficies del modelo.
- Indicar el valor de la potencia calorífica disipada (en *watios*) o también es posible considerar el flujo de calor (w/m^2) y la superficie sobre la que se origina.
- Seleccionar si se quiere un estudio de régimen estacionario o transitorio.
- Si el régimen es transitorio hay que indicar el tiempo de estudio y los intervalos de cada uno de los cálculos intermedios que deben realizarse para conseguir resultados.

En la práctica, el cálculo del calor disipado por radiación es difícil ya que se desconoce, normalmente, el valor de las temperaturas superficiales del resto de superficies del entorno del sistema estudiado, por lo que una buena aproximación será suponerla igual a la temperatura del aire (ambiente). Por tanto, la expresión del flujo de calor se puede expresar (linealizando la ecuación 4.43) como un coeficiente de convección equivalente al de radiación mediante:

$$\frac{\dot{q}}{A} = h_{rad} \cdot \Delta T$$

Donde ΔT representa la diferencia de temperaturas entre la pared y el medio (aire). Dicha diferencia se contabiliza en grados Celsius ya que es lo mismo que en Kelvin.

Evidentemente, el valor del coeficiente de convección equivalente en radiación será (suponiendo la temperatura del resto de superficies igual a la del aire):

$$h_{rad} = \varepsilon \cdot \sigma (TK_{sup} + TK_{aire}) (TK_{sup}^2 + TK_{aire}^2)$$

Por lo señalado anteriormente, como el sistema estudiado se encuentra en el seno de un fluido (aire, en nuestro caso), el calor intercambiado, desde las superficies del sistema a su entorno, tiene dos contribuciones, una convectiva y otra radiante, es decir:

$$\frac{\dot{q}}{A} = h_{conv} \cdot \Delta T + h_{rad} \cdot \Delta T = h_{conv_rad} \cdot \Delta T$$

Ambos fenómenos se pueden agrupar en un coeficiente global de película (que contabilice ambas contribuciones) y que no es más que la suma de ambos coeficientes de forma individualizada.

$$h_{conv_rad} = h_{conv} + h_{rad}$$

La dificultad del estudio se centra, por tanto, en la obtención del coeficiente de convección-radiación del sistema. Estos valores (para superficies estacionarias y superficies en movimiento) se obtienen experimentalmente de los ensayos térmicos por medio de las curvas de enfriamiento del sistema mecánico.

Cuando se introduce en el modelo una potencia calorífica, hay que determinar su valor (en vatios) y la superficie sobre la que se genera. La ecuación 4.1 determina la potencia disipada total. Esta potencia total, que se designará como \dot{q} , es igual a la suma de la potencia disipada en la pista de rodadura interna \dot{q}_{in} mas la potencia disipada en la pista de rodadura externa \dot{q}_{out} . Si se estima un valor de potencia disipada global, por ejemplo, de $\dot{q} = 10$ vatios, se debe establecer que proporción de esta potencia recae sobre la pista interna y cual sobre la pista externa.

El trabajo desarrollado por la fuerza equivalente de rozamiento puede indicarse de la forma:

$$\tau = \mu \cdot Fr_e = \mu \cdot N \cdot L \quad (6.34)$$

Considerando que el coeficiente de rozamiento μ es una constante del sistema, la fuerza normal, N, es proporcional al esfuerzo máximo en el punto de contacto σ_{max} y designando

como L_i y L_o las distancias recorridas por el elemento rodante sobre la pista de rodadura interna y externa, respectivamente, podemos enunciar:

$$\tau \propto \mu \cdot \sigma_{\text{máx}}^{\text{in}} \cdot L_i + \mu \cdot \sigma_{\text{máx}}^{\text{out}} \cdot L_o \quad (6.35)$$

La potencia consumida en desgaste y calentamiento del sistema, viene dada por:

$$\dot{q} = \frac{d\tau}{dt} \propto \frac{d(\mu \cdot \sigma_{\text{máx}}^{\text{in}} \cdot L_i + \mu \cdot \sigma_{\text{máx}}^{\text{out}} \cdot L_o)}{dt} \quad (6.36)$$

Por tanto, despreciando el desgaste, la potencia que corresponde a cada uno de los anillos podemos deducirla mediante la ecuación 6.37:

$$\frac{\dot{q}_{\text{in}}}{\dot{q}_{\text{out}}} = \frac{\sigma_{\text{máx}}^{\text{in}} \cdot L_i}{\sigma_{\text{máx}}^{\text{out}} \cdot L_{\text{out}}} \quad (6.37)$$

Para una carga radial, Q , la magnitud del esfuerzo máximo (ecuación 3.30) en el anillo interno para el rodamiento objeto de estudio vale:

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{in}} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot \pi \cdot a_i \cdot b_i} = 228'89 \cdot Q^{\frac{1}{3}} \quad (6.38)$$

De igual forma, para la misma carga radial, Q , la magnitud del esfuerzo máximo (ecuación 3.37) en el anillo externo vale:

$$\sigma_{\text{máx}}^{\text{out}} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot \pi \cdot a_o \cdot b_o} = 190'75 \cdot Q^{\frac{1}{3}} \quad (6.39)$$

La relación L_i/L_o se hallará aplicando la ecuación de Willis al sistema epicicoidal representado en la Figura 6.37.

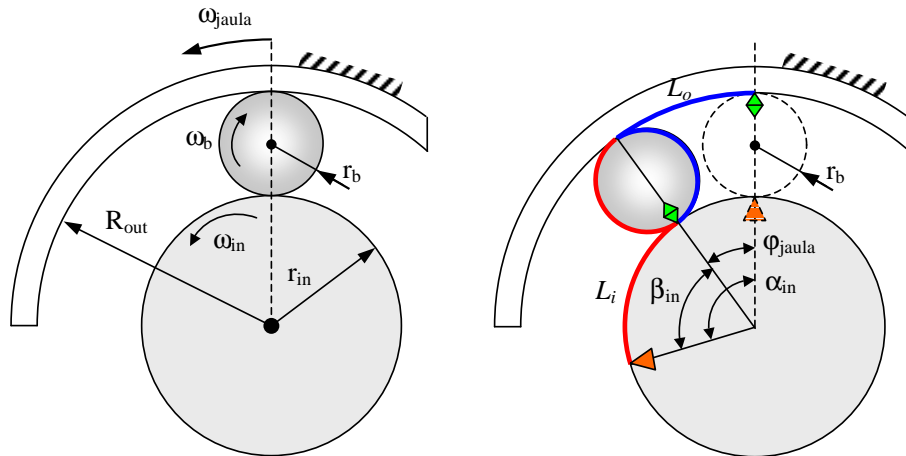


Figura 6.37 Longitud recorrida por la bola sobre las pistas de rodadura

Con la nomenclatura mostrada en la Figura 6.37, se cumple que:

$$\frac{\omega_{in} - \omega_{jaula}}{\omega_{out} - \omega_{jaula}} = -\frac{d_{out}}{d_{in}} = -\frac{R_{out}}{r_{in}} \quad (6.40)$$

Considerando que $\omega_{out} = 0$, puesto que el anillo externo es estacionario, resulta:

$$r_{in} \cdot (\omega_{in} - \omega_{jaula}) = R_{out} \cdot \omega_{jaula} \quad (6.41)$$

Considerando las velocidades angulares y el incremento temporal " Δt " son constantes, se puede expresar la ecuación 6.41 en función de los ángulos, de forma:

$$r_{in} \cdot (\alpha_{in} - \varphi_{jaula}) = R_{out} \cdot \varphi_{jaula} \quad (6.42)$$

Como $L_o = \varphi_{jaula} \cdot R_{out}$ y $L_i = (\alpha_{in} - \varphi_{jaula}) \cdot r_{in}$, resulta finalmente que:

$$L_i = L_o \quad (6.43)$$

Teniendo en cuenta que $L_i = L_o$ y los valores de $\sigma_{m\acute{a}x}^{in}$ y $\sigma_{m\acute{a}x}^{out}$, se sustituye en la ecuación 6.37, resultando:

$$\frac{\dot{q}_{in}}{\dot{q}_{out}} = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}^{in} \cdot L_i}{\sigma_{m\acute{a}x}^{out} \cdot L_o} = \frac{228'89 \cdot Q^{\frac{1}{3}} \cdot L_o}{190'75 \cdot Q^{\frac{1}{3}} \cdot L_o} = 1'19 \quad (6.44)$$

De la potencia disipada total, correspondiente al anillo externo:

$$\dot{q} = \dot{q}_{in} + \dot{q}_{outlimits} = 1'19 \cdot \dot{q}_{out} + \dot{q}_{out} = 2'19 \cdot \dot{q}_{out} \quad (6.45)$$

$$\dot{q}_{out} = \frac{\dot{q}}{2,19} \cong 0'45 \cdot \dot{q} \quad (6.46)$$

Luego, al anillo externo le corresponde aproximadamente el 45 % de la potencia disipada total, mientras que al anillo interno, le corresponde el 55 %. Por ejemplo, si $\dot{q} = 10$ watios, tendremos que $\dot{q}_{out} = 4'5$ watios y $\dot{q}_{in} = 5'5$ watios.

En la Figura 6.38 puede apreciarse la disposición del equipo utilizado para los ensayos vibro-térmicos.



Figura 6.38 Disposición del equipo para los ensayos de medida Temperatura.Vibración

Los datos del ensayo térmico se obtienen de cuatro termopares designados con los siguientes nombres:

- T_B , mide la temperatura del anillo externo.
- T_R , mide la temperatura del interior del rotor.
- T_A , mide la temperatura ambiente.
- T_{bo} , que mide la temperatura de la bola en el instante en que se detiene el movimiento del rodamiento.

La posición de los termopares T_B y T_R se muestran en las Figuras 6.39 y 6.40 respectivamente.

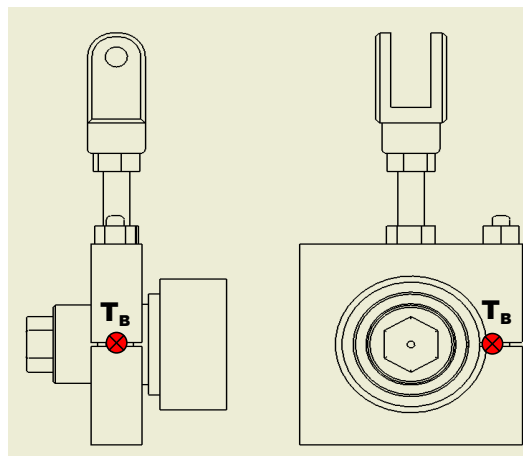
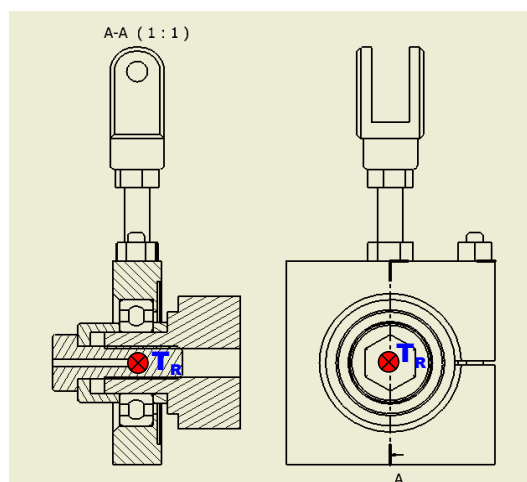


Figura 6.39 Posición del termopar T_B sobre la brida**Figura 6.40** Posición termopar T_R sobre el rotor

Para la medida de la temperatura de las bolas, en el instante de la parada, se ha diseñado un útil que contiene un termopar que se desliza por el interior de un tubo accionando el pulsador del extremo Figura 6.41. El diseño de este dispositivo se debió a ciertos problemas que se presentaban a la hora de efectuar esta medida de temperatura. Estos problemas son los siguientes:

- No se puede tocar con las manos el termopar, ya que este acusa rápidamente un incremento de temperatura.
- Hay que ejercer cierta presión del termopar sobre la superficie de la cual se quiere extraer una medida de temperatura.
- Hay que evitar que se produzca un cortocircuito en los terminales del termopar con la superficie metálica de la bola, ya que si esto sucede, se perderían todas las medidas realizadas hasta ese instante.
- Hay que colocar el termopar sobre la bola de forma adecuada, para que éste quede lo más centrado posible.

Para evitar variaciones indeseadas en la temperatura, durante los ensayos, estos se realizan en una sala cerrada. Esta situación presenta, a su vez, el inconveniente de que la temperatura ambiente se va incrementando con el paso del tiempo. Se considerará que se llega al régimen permanente de temperatura cuando las pendientes a las curvas de temperatura del rotor, brida y ambiente sean iguales. Los valores de las pendientes pueden visualizarse en el gráfico de temperaturas asignando unas marcas, tal y como muestra la Figura xxx.

Al mismo tiempo que se va registrando la temperatura, se va adquiriendo la señal vibratoria a intervalos de tiempo regulares de 60 segundos. El procesado de estos archivos nos permite, a través de su potencia espectral, comprobar la evolución del nivel vibratorio con la temperatura.



Figura 6.41 Útil diseñado para la medida de la temperatura de la bola

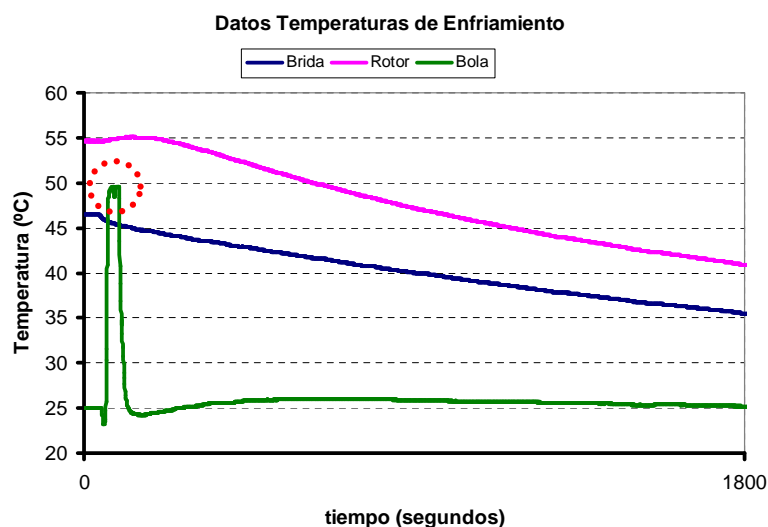


Figura 6.42 Temperatura de la bola del rodamiento

Como cada ensayo se realiza, generalmente, con una temperatura ambiente distinta y puesto que lo que realmente interesa son los gradientes de temperatura, a los valores de temperatura de brida y temperatura del rotor les restamos el valor de la temperatura ambiente, centrando el estudio únicamente en los incrementos de temperatura que se producen a lo largo del tiempo. Como el valor de la temperatura ambiente sufre fluctuaciones a lo largo del ensayo, el valor que realmente se resta de las temperatura de la brida y el rotor es el que resulta de una recta ajustada a los valores de temperatura ambiente.

Como puede apreciarse en la Figura 6.42, el valor de la temperatura de la bola en el instante de la parada del rodamiento está comprendida entre los valores de la temperatura del rotor y de la temperatura de la brida.

El procedimiento seguido para el montaje del rodamiento en el banco de ensayos, para un ensayo vibro-térmico, fue el siguiente:

- Limpieza del extremo del eje y del hueco de la brida donde será alojado el rodamiento.
- Colocar la masilla adecuada para garantizar la conducción térmica del anillo externo al termopar en la ranura de la brida.
- Colocado el termopar en el seno de la masilla, alojar el rodamiento con la debida precaución para no romper el cable del termopar (Figura 6.43).
- Montar el conjunto en el extremo del eje y apretar el tornillo de sujeción (Figura 6.43).
- Unir la brida a la célula de carga que registra la fuerza radial aplicada al rodamiento.
- Colocar el termopar en el alojamiento del rotor.
- Colocar el acelerómetro en su correcta posición, sobre la brida.

Mediante estos pasos, queda preparado el sistema para poner en marcha los equipos de medida y comenzar un ensayo de medida vibro-térmico.

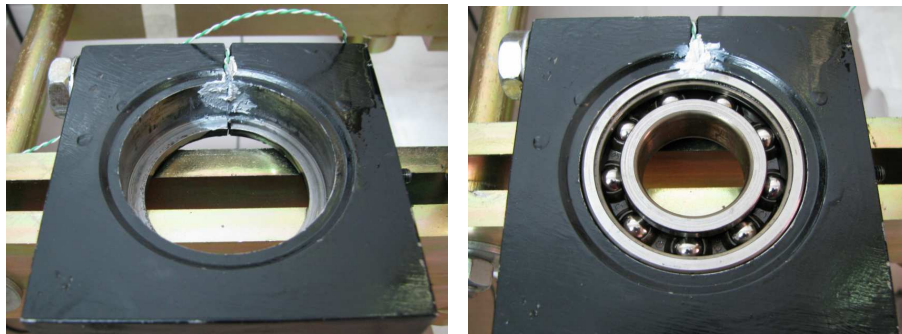


Figura 6.43 Punto de colocación del termopar en la brida, solidario al anillo externo

Capítulo 7

RESULTADOS. VALIDACIÓN DE LOS MODELOS NUMÉRICOS

7.1. INTRODUCCIÓN

Durante los ensayos experimentales se atendió a las siguientes representaciones:

- En el campo temporal, la representación temporal de la señal de vibración captada por el acelerómetro y la envolvente de la señal temporal rectificada.
- En el campo frecuencial, se representa el espectro de potencia de la señal temporal y el espectro de potencia de la envolvente.
- En el campo tiempo-frecuencial, la representación del mapa wavelet de 0'2 segundos de la señal temporal y una escala de 128 puntos y el mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal. La wavelet madre utilizada es la Daubechies 6. Se seleccionan estos parámetros por ser, tras muchas pruebas, los que mejores resultados aportaban.

Los resultados fueron en todo momento satisfactorios con forme a lo que dicta la literatura y se expone en los temas. Demostración de ello es la fácil identificación de los defectos en el espectro de la envolvente de cualquier rodamiento defectuoso.

7.2. SEÑALES EXPERIMENTALES

Seguidamente se aportan dos ejemplos de dos procesos completos. El primero de ellos corresponde aun rodamiento SKF 6206 modificado con 3 bolas, en tanto que el siguiente ejemplo corresponde aun rodamiento SKF 6206.

En cada ejemplo se presenta la señal temporal, y la envolvente rectificada de la señal temporal, comentando las características peculiares que cada una presenta. Seguidamente, se muestran el espectro de la señal temporal, el espectro de la envolvente y el espectro de la envolvente donde se han señalado las frecuencias características que pueden identificarse. Finalmente, se comentan las características de la imagen de los coeficientes de la transformada wavelet de la señal temporal y la wavelet de la envolvente.

7.2.1. Rodamiento de 3 bolas con defecto en el anillo interno, carga de 1500 N. y velocidad de giro de 20 Hz

En las Figuras 7.1 y 7.2 se muestran la señal temporal y la envolvente de la señal rectificada respectivamente. Se observa los picos de paso por defecto pero hace prácticamente imposible identificar de que tipo de defecto se trata. En la Figura 7.3 se muestra el espectro de potencia de la señal temporal de la Figura 7.1. Se aprecia rápidamente una frecuencia de resonancia alrededor de los 800 Hz, pero de la observación de la misma, no podemos cualificar ni cuantificar defecto alguno. Sin embargo, el espectro de la envolvente Figura 7.4 si que muestra una representación donde se puede apreciar las frecuencias características de defecto.

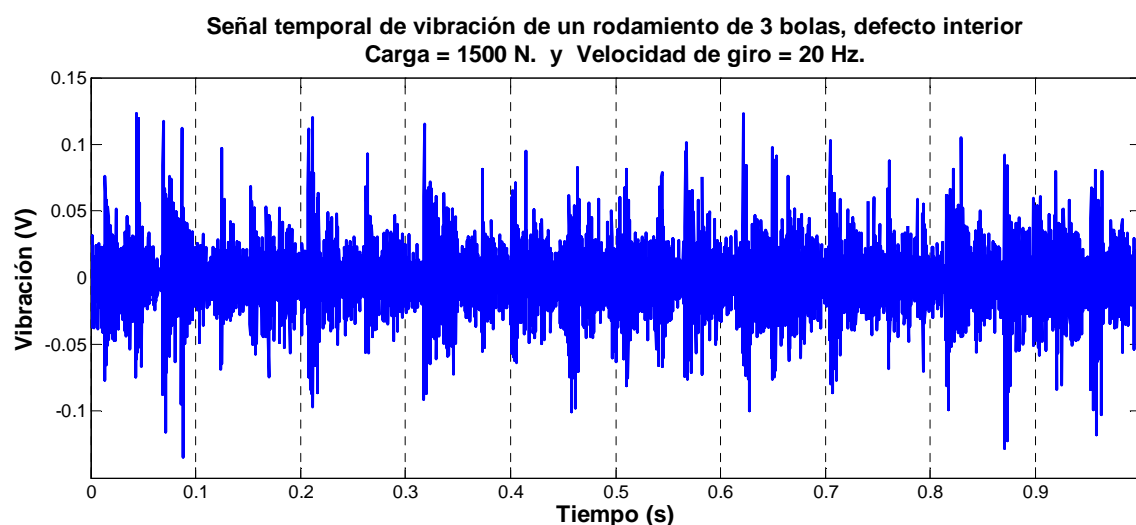


Figura 7.1 Señal temporal de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interna, con 3 bolas.

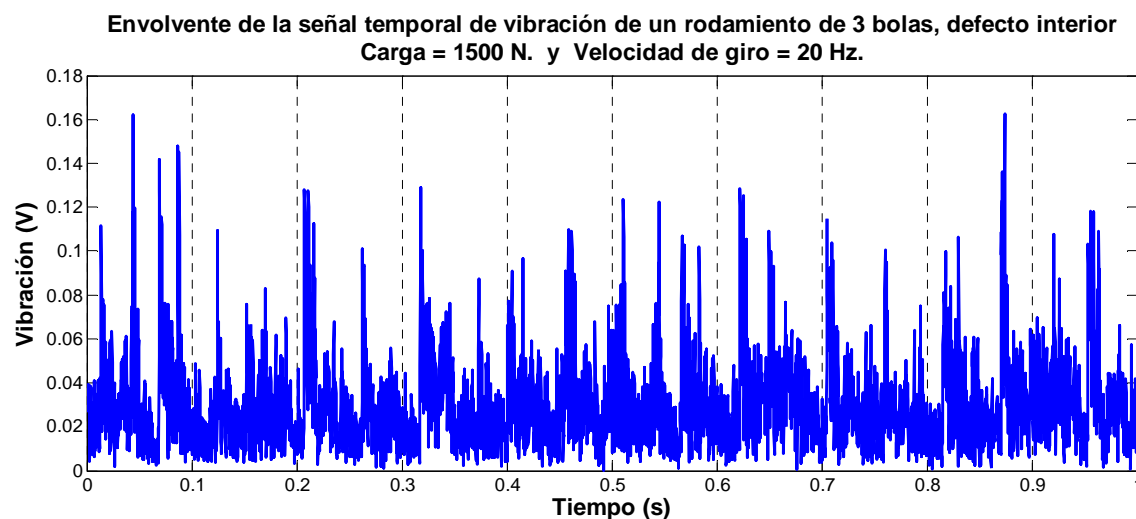


Figura 7.2 Envolvente de la señal temporal de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interna, con 3 bolas.

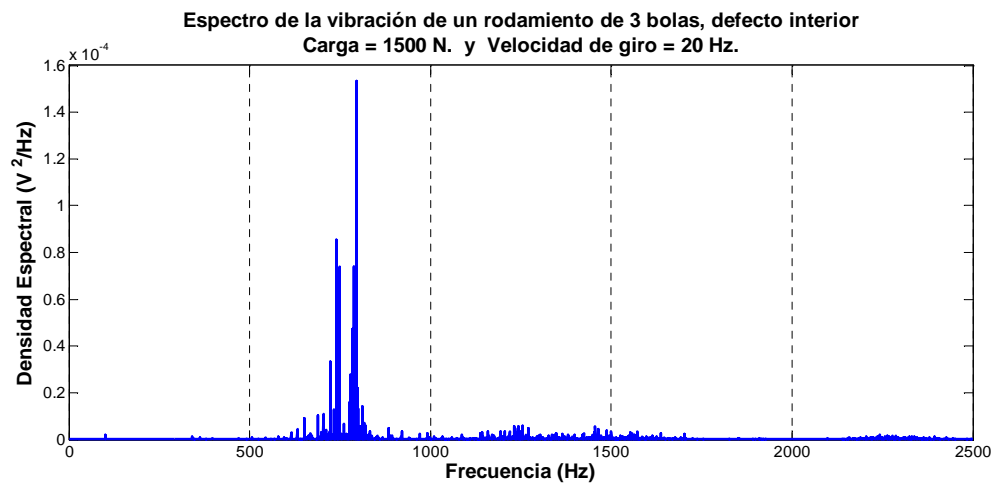


Figura 7.3 Espectro de la señal temporal representada en la Figura 7.1

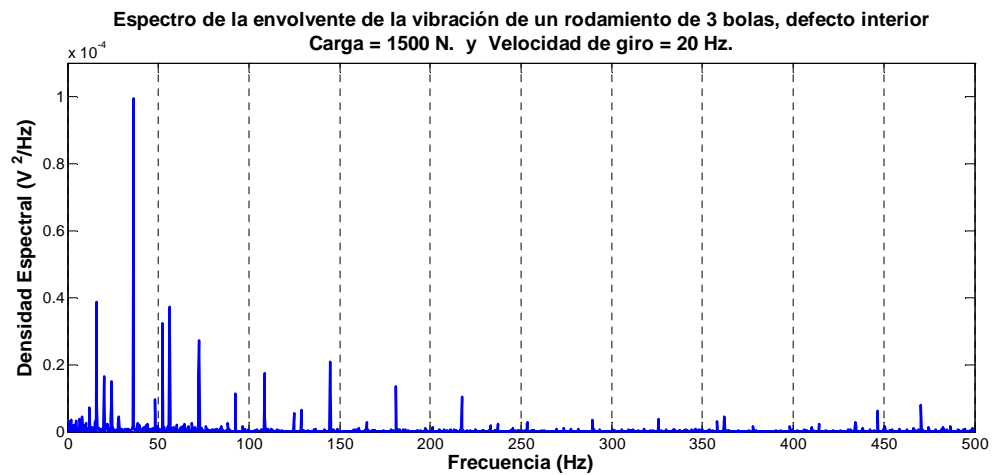


Figura 7.4 Espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.2

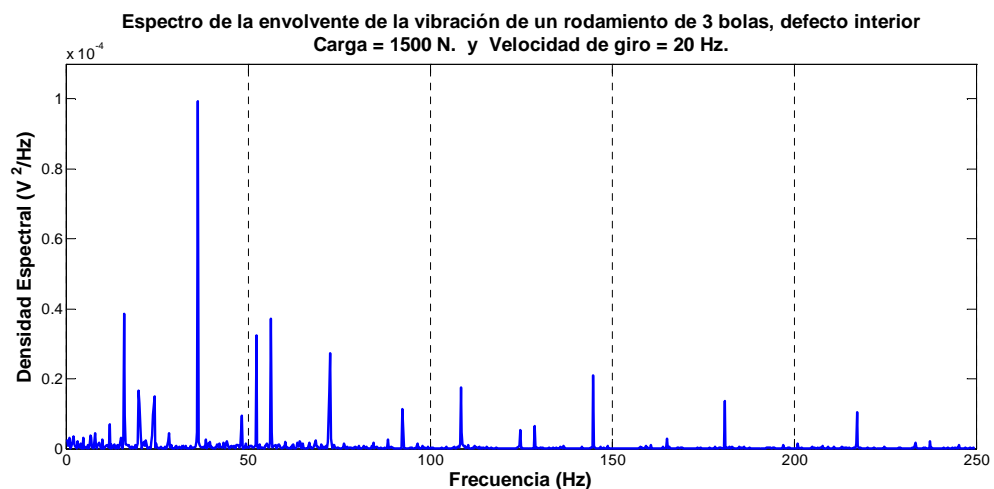


Figura 7.5 Espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.2

En la Figura 7.6 se muestra un detalle del espectro de la envolvente de la señal temporal donde se encuentran unas marcas que corresponden a las frecuencias características de este tipo de defecto que se describen seguidamente.

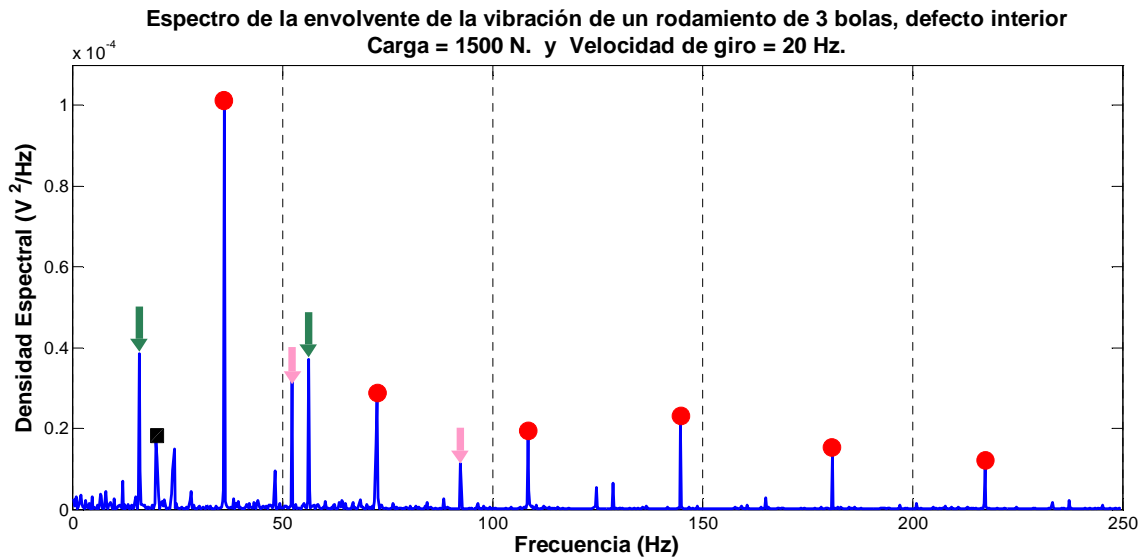


Figura 7.6 Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.2

- El pico finalizado en un cuadrado negro es el primer armónico de la frecuencia de giro, su valor es de: $n = 20$ Hz
- Los picos finalizados con un punto rojo son los armónicos correspondientes a la frecuencia de fallo en anillo interior

$$BPFI = 36'2 \text{ Hz}$$

- Los dos picos coronados por flechas verdes son las bandas laterales que aparecen a cada lado del primer armónico de la frecuencia de fallo en anillo interior:

$$BPFI - n = 16'2 \text{ Hz}$$

$$BPFI + n = 56'2 \text{ Hz}$$

- Los dos picos coronados por flechas rosas son las bandas laterales que aparecen a cada lado del segundo armónico de la frecuencia de fallo en anillo interior:

$$2 \cdot BPFI - n = 52'4 \text{ Hz}$$

$$2 \cdot BPFI + n = 92'4 \text{ Hz}$$

En las Figuras 7.7 y 7.8 se muestra el mapa wavelet de la señal temporal y de la envolvente de la señal temporal respectivamente. Se aprecia que es un defecto típico de aro interior, pues se aprecia en alta frecuencia (parte inferior de la escala con marcas rojas-amarillas) con rastros hacia baja frecuencia (parte alta de la escala en azul claro).

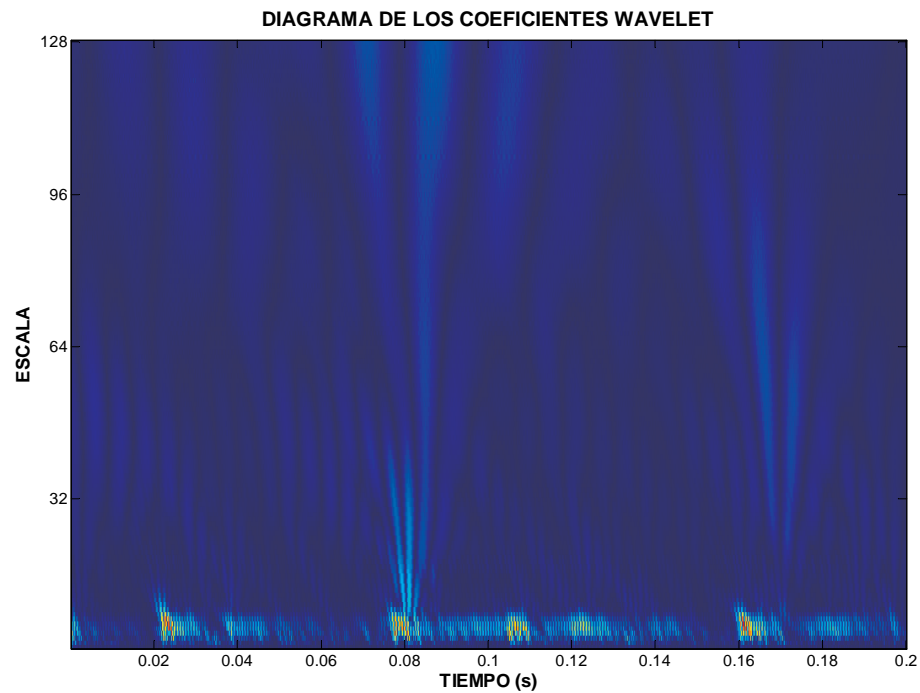


Figura 7.7 Mapa wavelet de la señal temporal representada en la Figura 7.1

El mapa wavelet de la envolvente, se observa igualmente los picos a alta frecuencia (parte baja de la escala) pero se observa claramente los picos a baja y media frecuencia correspondientes a paso por el fallo (rastros rojos)

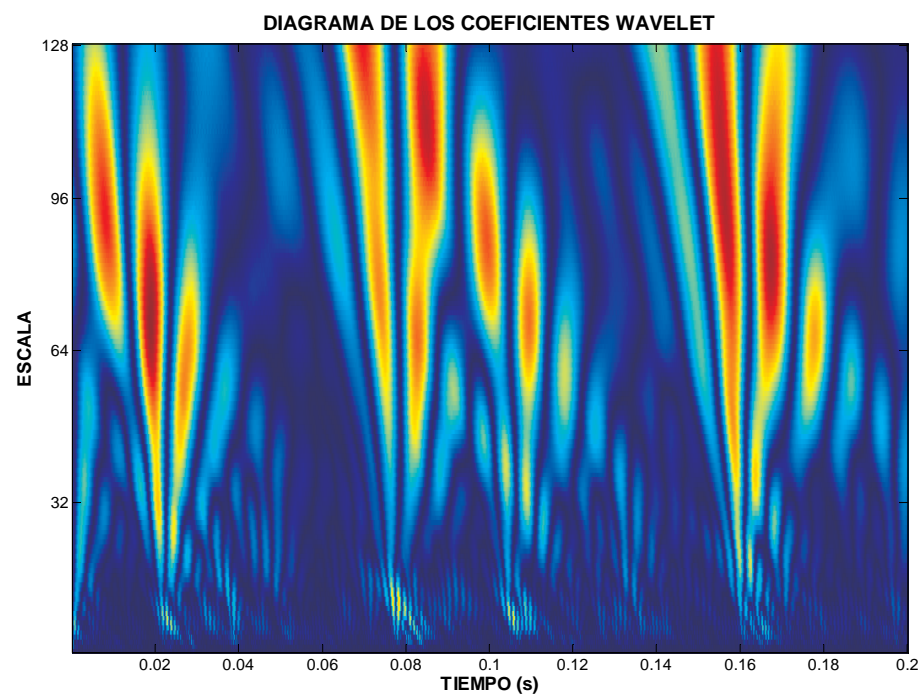


Figura 7.8 Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.2

7.2.2. Rodamiento de 9 bolas con defecto en el anillo externo, carga de 1000 N. y velocidad de giro de 30 Hz

En las Figuras 7.9 y 7.10 se muestran la señal temporal y la envolvente de la señal rectificada respectivamente. Se observa los picos de paso por defecto pero no es imposible identificar y asegurar de que tipo de defecto se trata, aunque pudiera parecer que existe modulación en los picos y consecuentemente defecto en anillo interno.

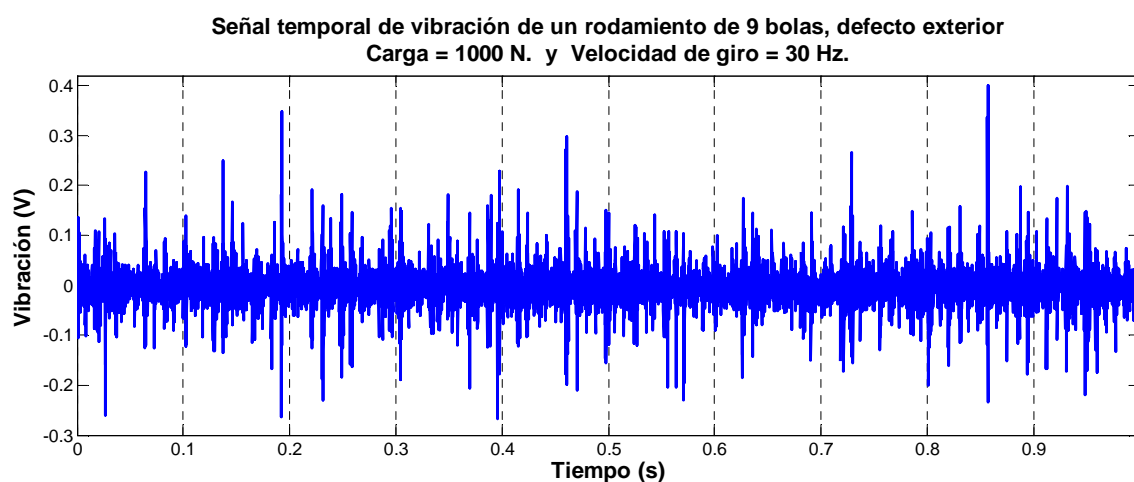


Figura 7.9 Señal temporal de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista externa.

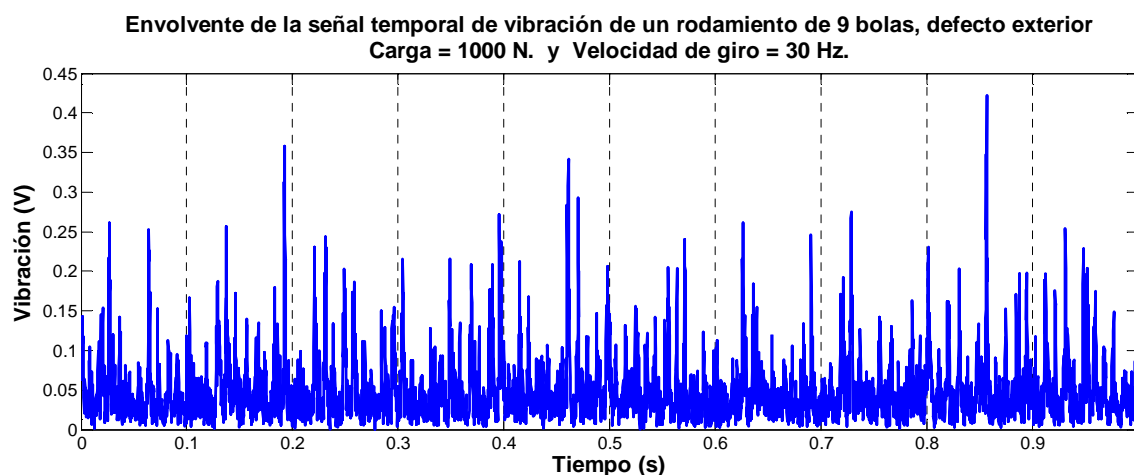


Figura 7.10 Envolvente de la señal temporal de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista externa.

En la Figura 7.11 se muestra el espectro de potencia de la señal temporal de la Figura 7.9. Se aprecia también en esta ocasión una frecuencia de resonancia alrededor de los 800 Hz pero además aparecen resonancias en la banda que va de 900 Hz a 2500 Hz que no aparecían en el rodamiento de 3 bolas, pero de la observación de la figura, tampoco podemos cualificar ni cuantificar defecto alguno. Sin embargo, el espectro de la envolvente Figura 7.12 si que muestra una representación donde se puede apreciar las frecuencias características de defecto.

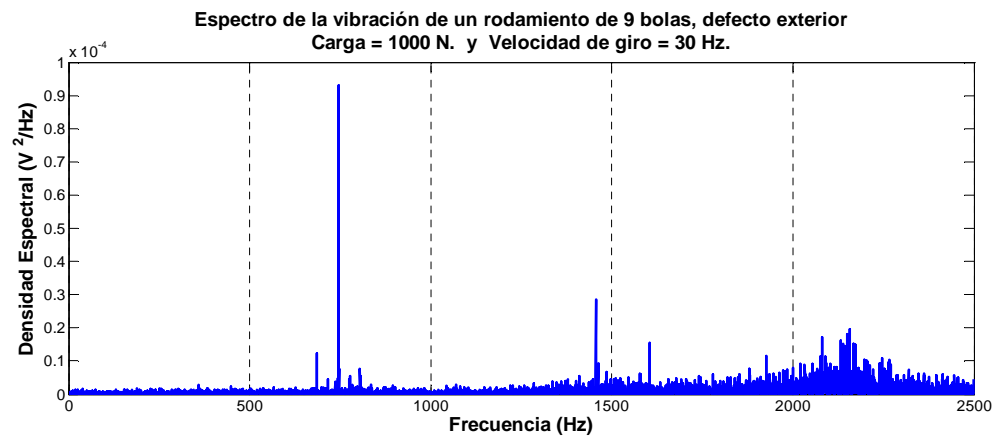


Figura 7.11 Espectro de la señal temporal representada en la Figura 7.9

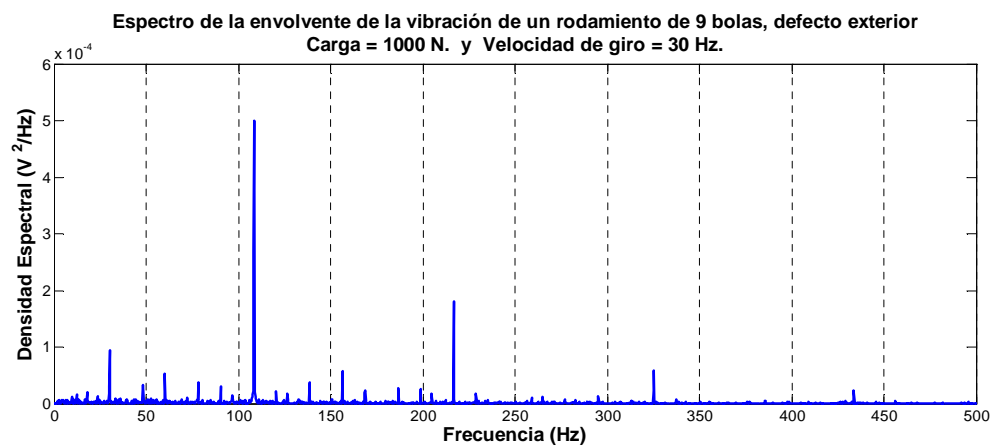


Figura 7.12 Espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.10

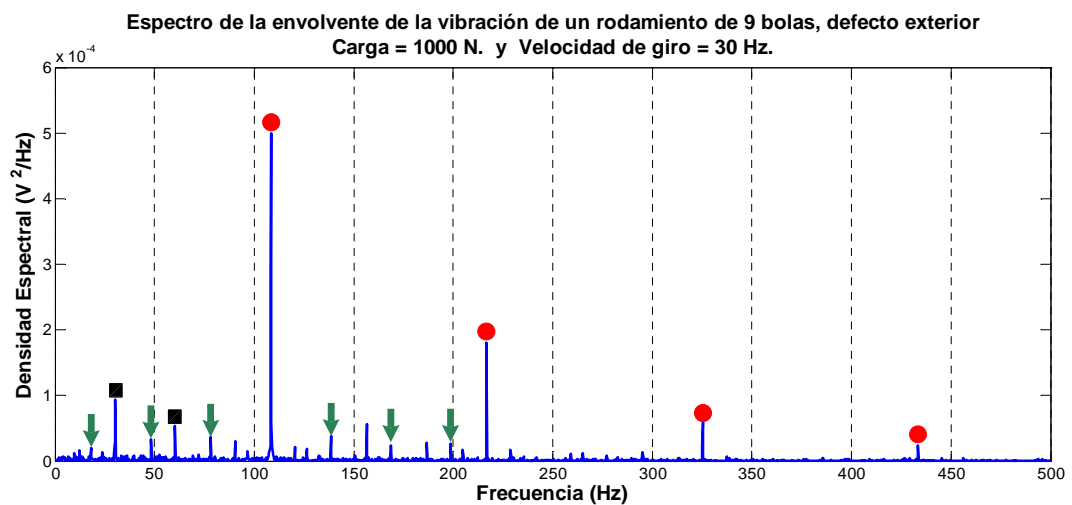


Figura 7.13 Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.10

- Los picos finalizados en un cuadrado negro son el primer y segundo armónico de la frecuencia de giro:

$$n = 30 \text{ Hz}$$

- Los picos finalizados con un punto rojo son los armónicos correspondientes a la frecuencia de fallo en anillo exterior

$$BPFE = 107'1 \text{ Hz}$$

- Los dos picos coronados por flechas verdes son las bandas laterales que aparecen a cada lado del primer armónico de la frecuencia de fallo en anillo interior:

$$BPFE - n = 77'1 \text{ Hz}$$

$$BPFE + n = 137'1 \text{ Hz}$$

$$BPFE - 2 \cdot n = 47'1 \text{ Hz}$$

$$BPFE + 2 \cdot n = 167'1 \text{ Hz}$$

$$BPFE - 3 \cdot n = 17'1 \text{ Hz}$$

$$BPFE + 3 \cdot n = 197'1 \text{ Hz}$$

En las Figuras 7.14 y 7.15 se muestra el mapa wavelet de la señal temporal y de la envolvente de la señal temporal respectivamente. Al corresponder estas figuras a un rodamiento de 9 bolas, las frecuencias típicas de defecto son mayores que en el rodamiento de 3 bolas. Ahora, prácticamente son inapreciables en alta frecuencia (parte inferior de la escala con marcas rojas-amarillas) aunque si aparecen los rastros hacia baja frecuencia (parte alta de la escala en azul claro).

En el mapa wavelet de la envolvente, tampoco se aprecian los picos a alta frecuencia (parte baja de la escala) pero se observa claramente los picos a baja y media frecuencia correspondientes a paso por el fallo (rastros rojos), con una menor banda de frecuencia y menos espaciados que en el caso del rodamiento de 3 bolas.

7.2.3. Análisis comparativo de rodamiento de 3 bolas con rodamiento de 9 bolas sin defecto, carga de 1500 N. y velocidad de giro de 20 Hz

Cuando estamos midiendo un rodamiento nuevo (en ausencia de defecto), lo que vemos en los diagramas es una representación de la señal originada por el rodamiento más la señal derivada del comportamiento del sistema donde se encuentra integrado el rodamiento.

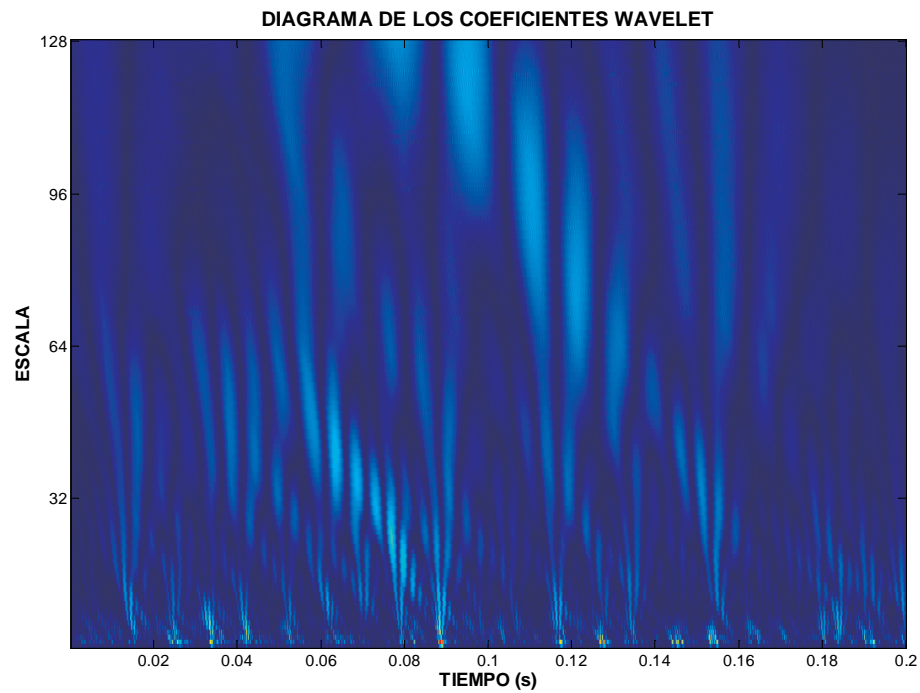


Figura 7.14 Wavelet de la señal temporal representada en la Figura 7.9

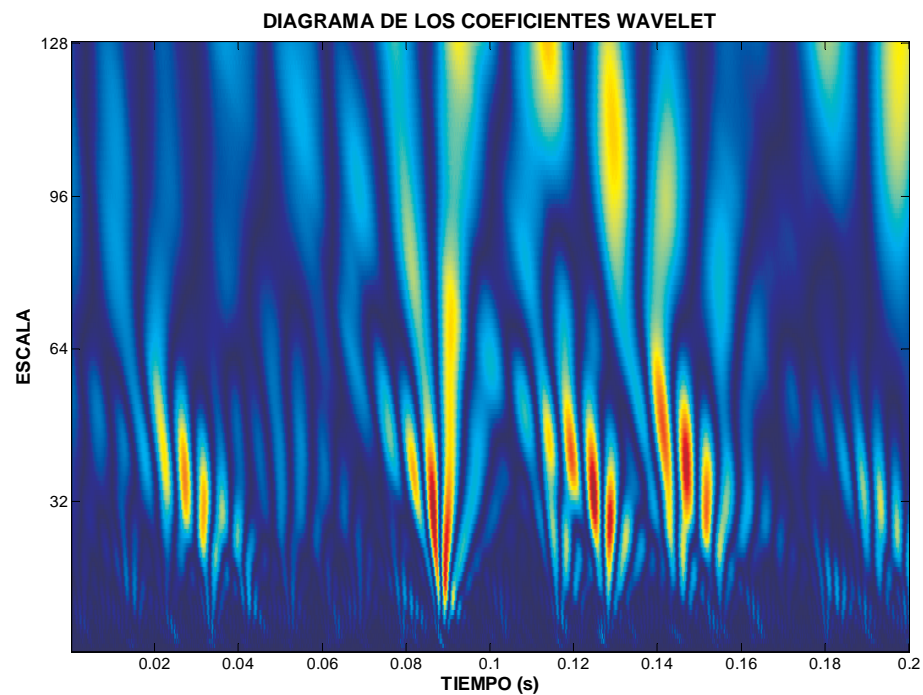


Figura 7.15 Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.9

Las señales pudieran parecer solo ruido Figura 7.16, ya sea en un rodamiento SKF 6206 o en el rodamiento modificado con tres bolas. Sin embargo, su representación espectral, Figura 7.17, varía apareciendo picos a baja frecuencia de mayor intensidad en el rodamiento de 3 bolas. Esto es especialmente significativo en el espectro de la envolvente Figura 7.18 porque

se ve con mucha mas claridad las frecuencias de giro o los armónicos de las frecuencias de giro en el rodamiento de 9 bolas.

Señal temporal de vibración de un rodamiento sin defecto, Carga = 1500 N. y Velocidad de giro = 20 Hz.
3 BOLAS

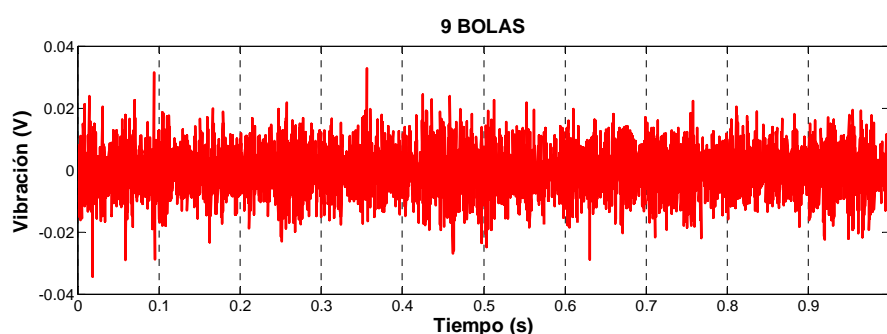
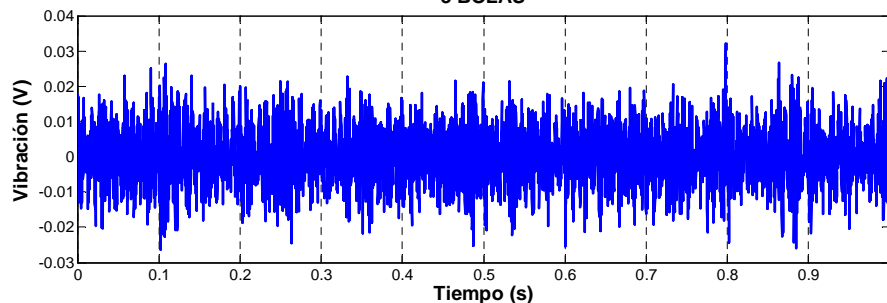


Figura 7.16 Señales temporales correspondientes a rodamientos de tres y nueve bolas

Espectro de la vibración de un rodamiento sin defecto, Carga = 1500 N. y Velocidad de giro = 20 Hz.
3 BOLAS

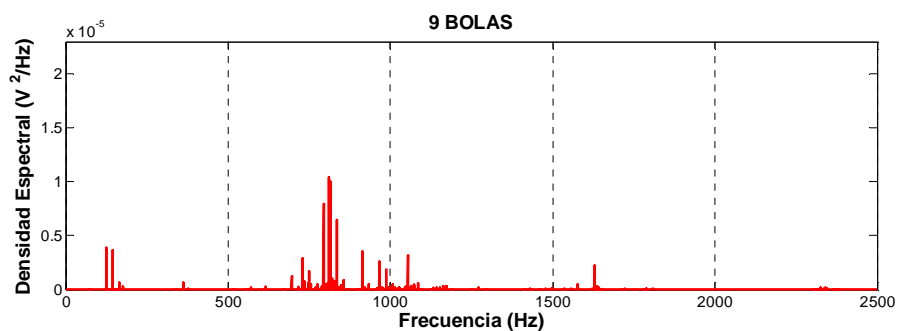
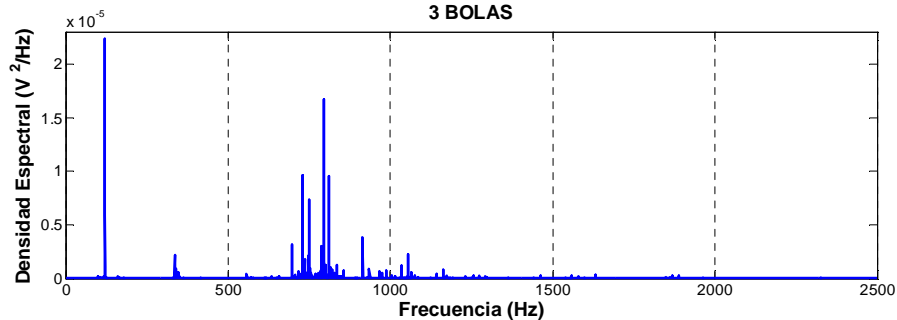
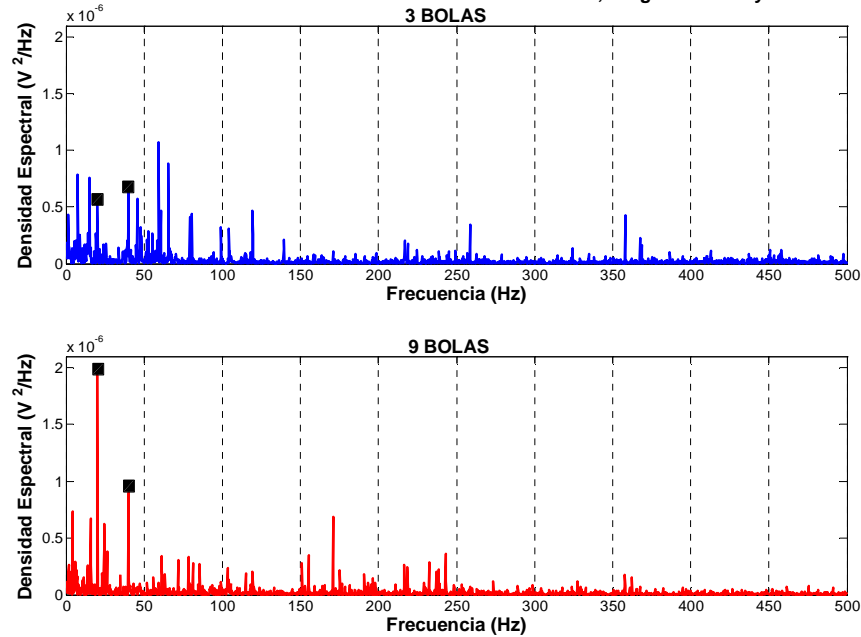
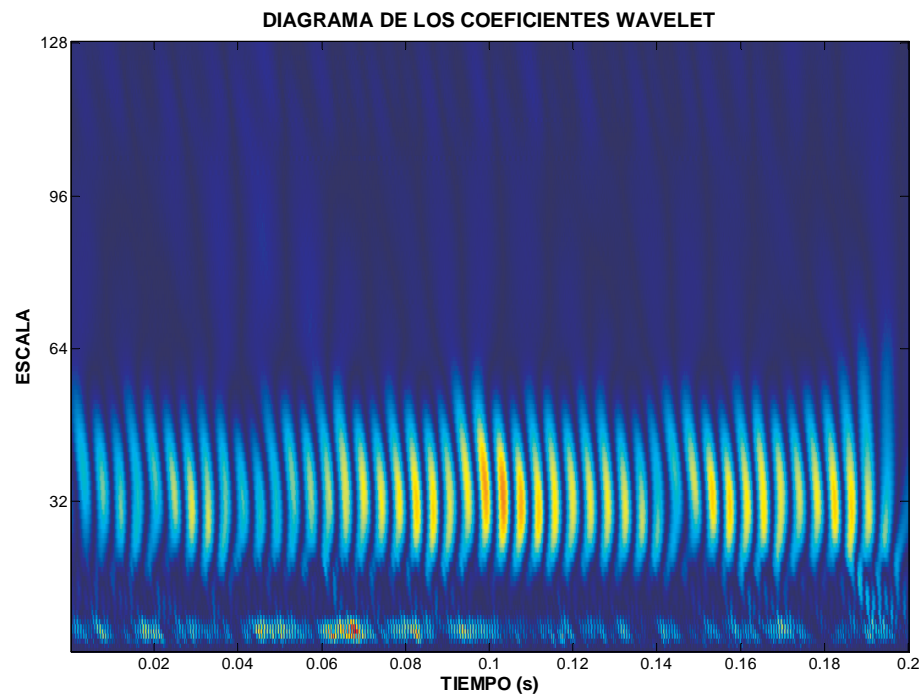


Figura 7.17 Espectros de las señales temporales correspondientes a rodamientos de tres y nueve bolas

Espectro de la envolvente de la vibración de un rodamiento sin defecto, Carga = 1500 N. y Velocidad = 20 Hz.

**Figura 7.18** Espectros de las envolventes de las señales temporales correspondientes a rodamientos de tres y nueve bolas

De las distintas representaciones de los mapas wavelet Figuras 7.19, 7.20, 7.21 y 7.22, solamente mencionar que en el mapa wavelet de la Figura 7.19 que corresponde aun rodamiento de 3 bolas, aparece una frecuencia de resonancia de baja frecuencia prácticamente continua, mientras que en el rodamiento de 9 bolas, Figura 7.21, esto sucede periódicamente

**Figura 7.19** Mapa wavelet de la señal temporal del rodamiento de 3 bolas

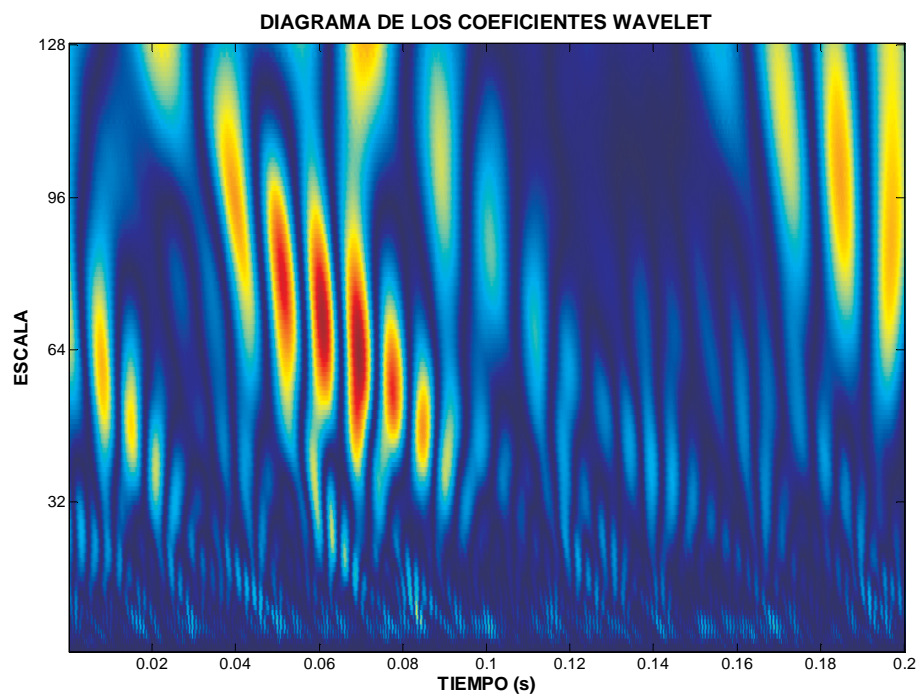


Figura 7.20 Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal del rodamiento de 3 bolas

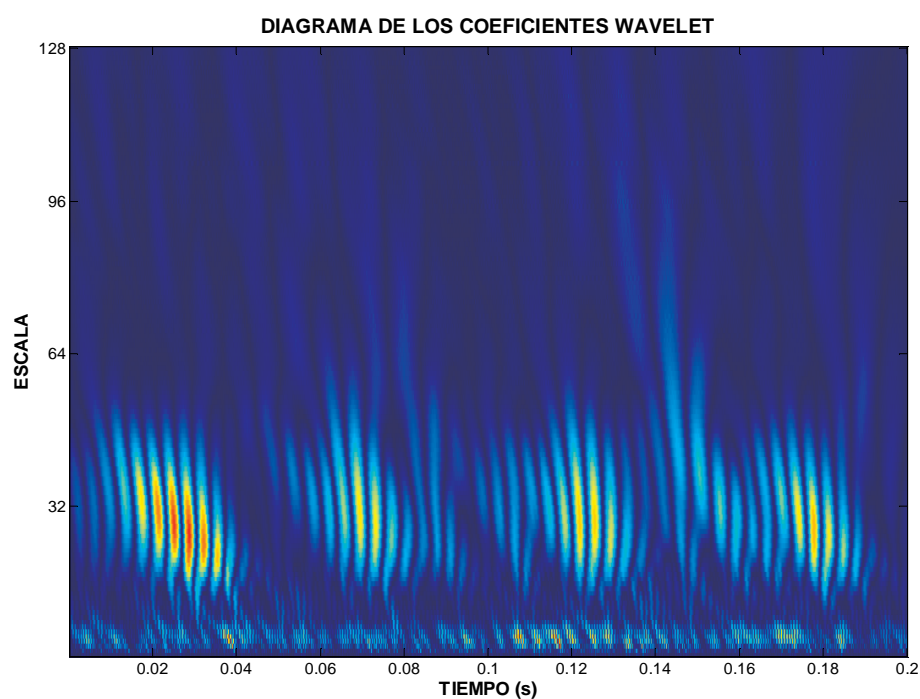


Figura 7.21 Mapa wavelet de la señal temporal del rodamiento de 9 bolas

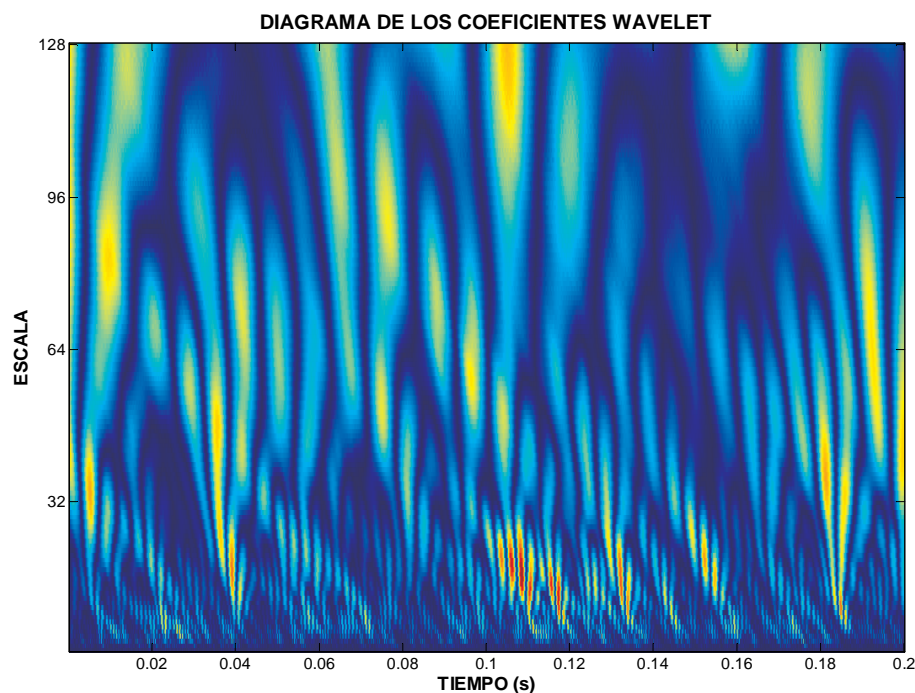


Figura 7.22 Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal del rodamiento de 9 bolas

7.2.4. Análisis comparativo de la aparición de defecto en el rodamiento. Rodamiento de 3 bolas

De la señal temporal Figura 7.23 se observa que cuando aparecen los defectos se aprecian picos de tipo impulsivo. En el caso de defecto en el anillo externo, estos son muy repetitivos tanto en la secuencia de aparición como en la magnitud. En el caso de defecto en el anillo interno, existen ocasiones en que los picos de defecto no aparecen y su amplitud fluctúa de acuerdo con la carga que la bola que pasa por el defecto tenga en ese instante. Los picos correspondientes al defecto en anillo externo tienen mayor amplitud que los picos que corresponden al defecto en anillo interno. Hay que señalar que la posición del defecto en el anillo externo durante los ensayos se colocaba en la zona de máxima carga. Se aprecia además, que en el rodamiento sin defecto, los armónicos principales se encuentran a baja frecuencia y aparecen un conjunto de armónicos alrededor de los 800 Hz de menor magnitud.

En la Figura 7.24 puede apreciarse que cuando existe defecto, este armónico desaparece y cobran más relevancia el resto de armónicos de componentes resonantes, especialmente en la zona alrededor de los 800 Hz

Estos armónicos alrededor de los 800 Hz tienen mayor amplitud cuando el rodamiento presenta defecto en el anillo interno. Lo verdaderamente significativo para analizar es el espectro de la envolvente Figura 7.25 donde se muestran representaciones frecuenciales típicas que describe la literatura técnica sobre el tema. En el caso de rodamiento con defecto en el anillo externo, se observan claramente los 5 primeros armónicos de la frecuencia de defecto en aro exterior. En el caso de defecto en anillo interno, aparecen también los 5-6 primeros armónicos, presentando además los dos primeros sus correspondientes bandas laterales a una distancia de la frecuencia de giro.

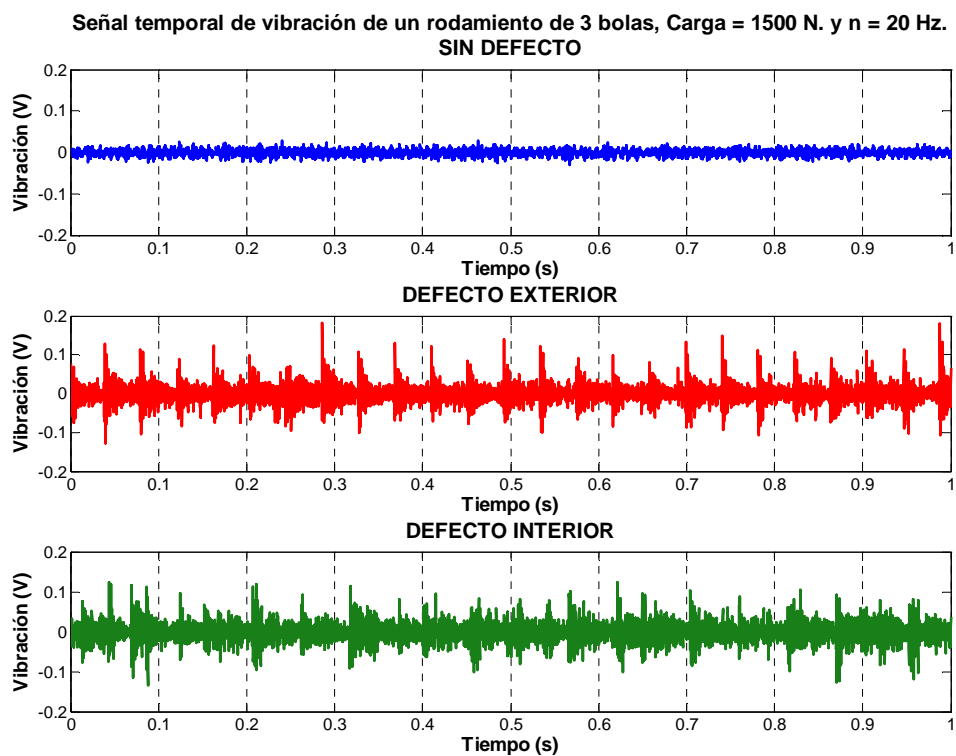


Figura 7.23 Señales temporales correspondientes a rodamientos con distintos defectos

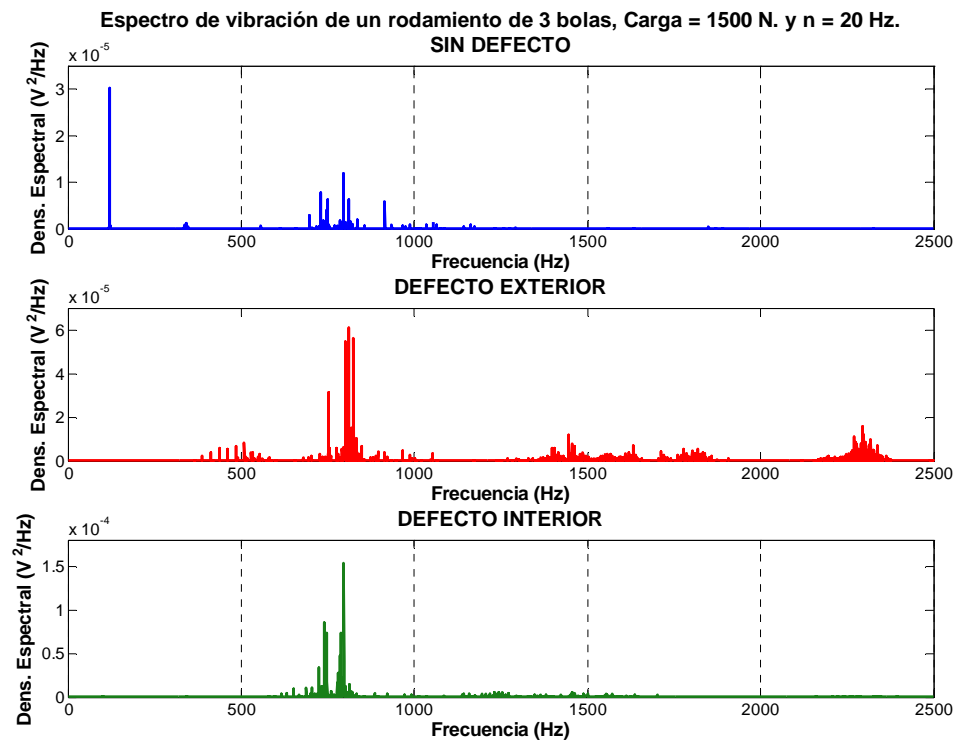


Figura 7.24 Espectros de las señales temporales representadas en la Figura 7.23

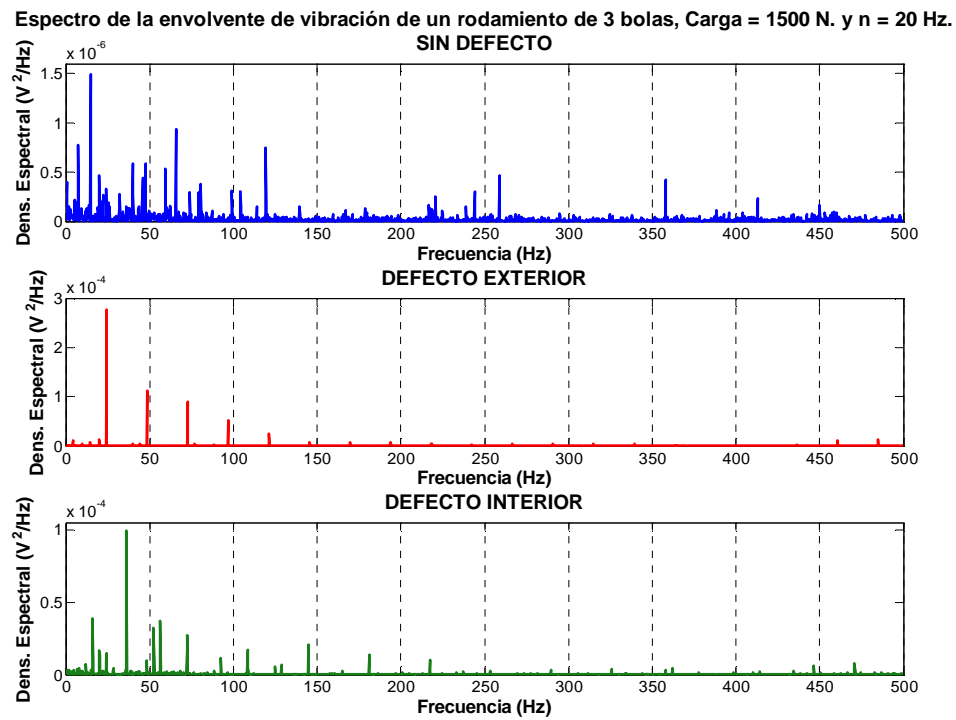


Figura 7.25 Espectros de las envolventes de las señales temporales representadas en la Figura 7.23

En cuanto al análisis de los mapas wavelet, Figuras 7.26 a 7.28 cumplen los puntos descritos en el apartado anterior.

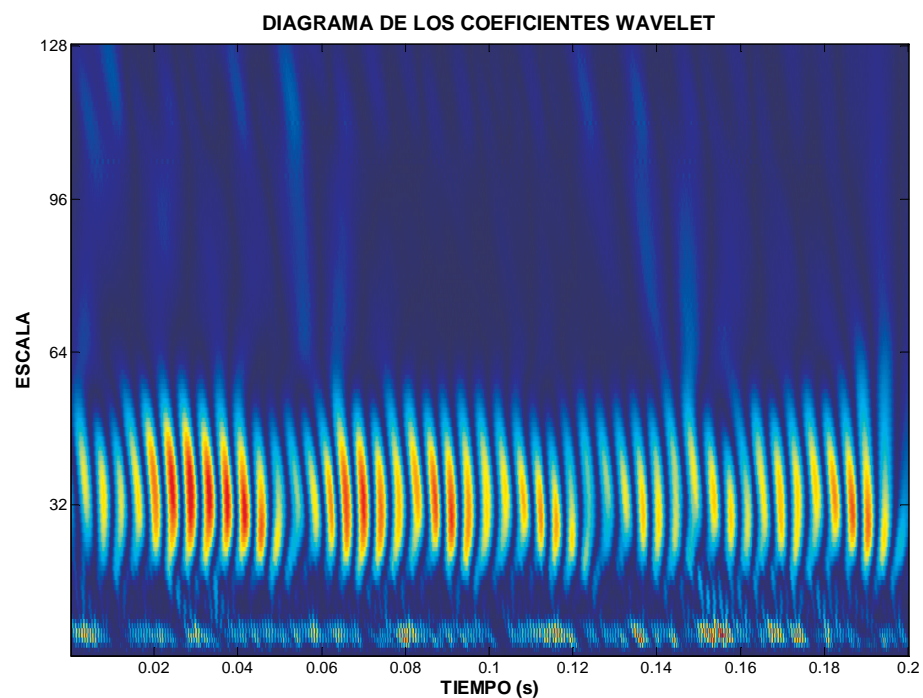


Figura 7.26 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.23 (Sin defecto)

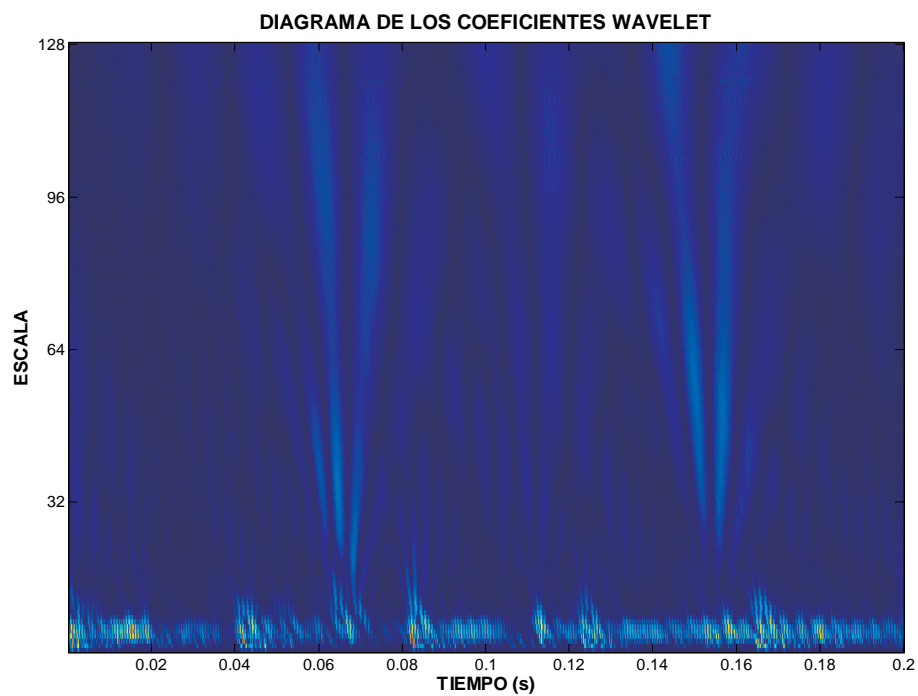


Figura 7.27 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.23 (Defecto en pista externa)

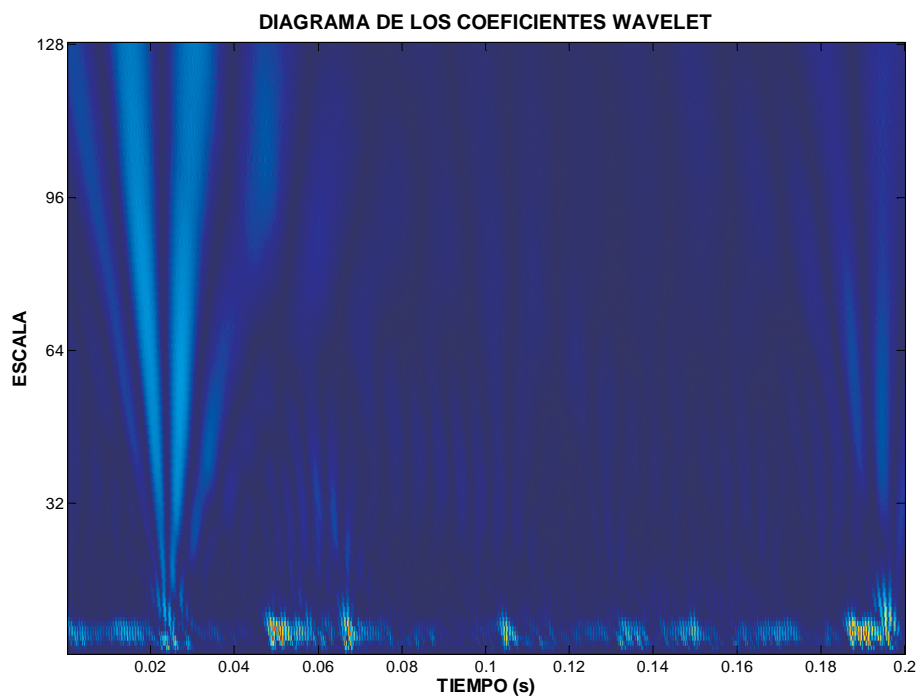


Figura 7.28 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.23 (Defecto en pista interna)

7.2.5. Análisis comparativo de la aparición de defecto en el rodamiento. Rodamiento de 9 bolas

En el caso de 9 bolas, cuya señal temporal muestra la Figura 7.29 lo dicho es válido e igual al de 3 bolas pero se aprecia con mayor claridad el defecto en el anillo externo.

Esto también es apreciable en el espectro de la Figura 7.30 donde el valor del pico alrededor de los 800 Hz es mayor ahora en el caso de defecto en el anillo externo.

Respecto al espectro de la envolvente, Figura 7.31, es especialmente significativo la señal sin defecto donde se aprecian con claridad el primer y segundo armónico de la frecuencia de giro, cosa que antes era inapreciable.

También en esta representación, en el fallo de defecto en el anillo interno se aprecian el armónico principal de la frecuencia de giro así como los cuatro primeros armónicos de la frecuencia de defecto característica del anillo interno con sus bandas laterales asociadas.

Respecto a los mapas wavelet que representan señales con defecto Figuras 7.32 a 7.34 cumplen con las descripciones echas anteriormente sin embargo, el mapa wavelet que corresponde al rodamiento sin defecto Figura 7.32 podría ofrecer dudas de ser un defecto a alta velocidad de giro.

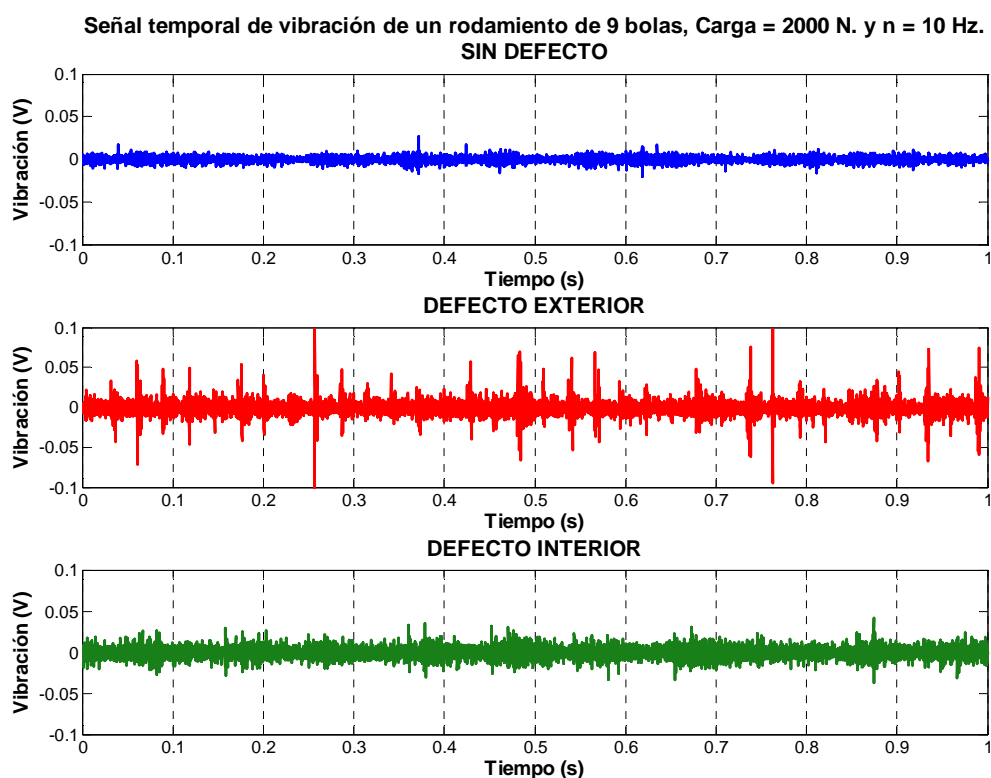


Figura 7.29 Señales temporales correspondientes a rodamientos con distintos defectos

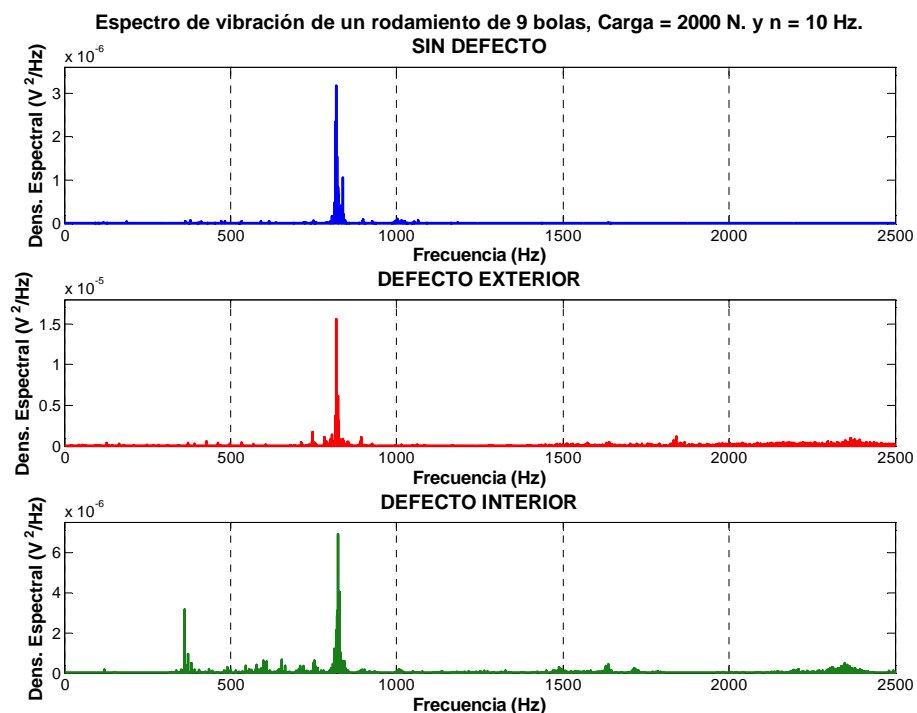


Figura 7.30 Espectros de las señales temporales representadas en la Figura 7.29

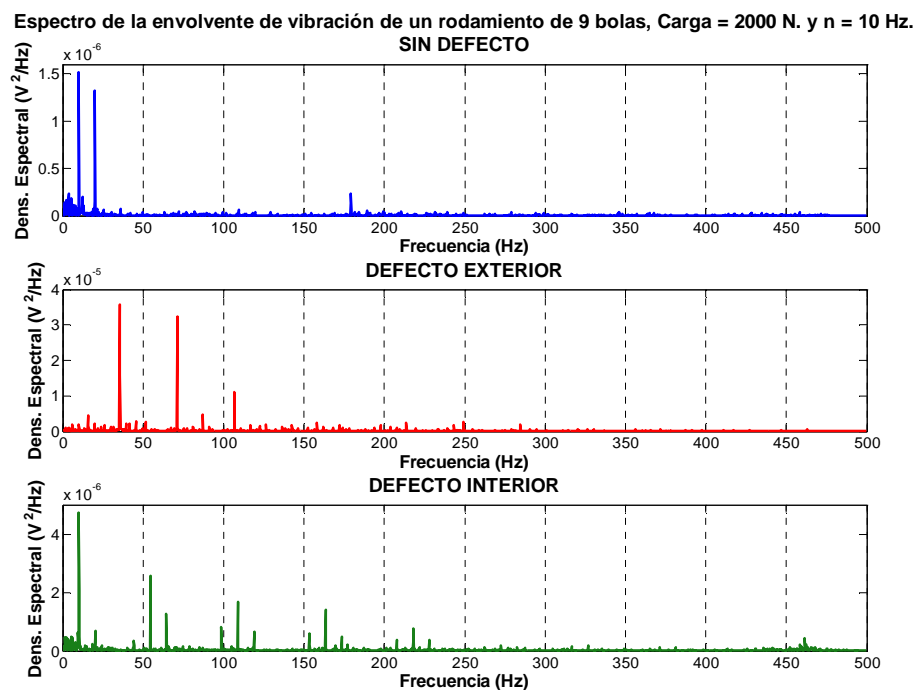


Figura 7.31 Espectros de las envolventes de las señales temporales representada en la Figura 7.29

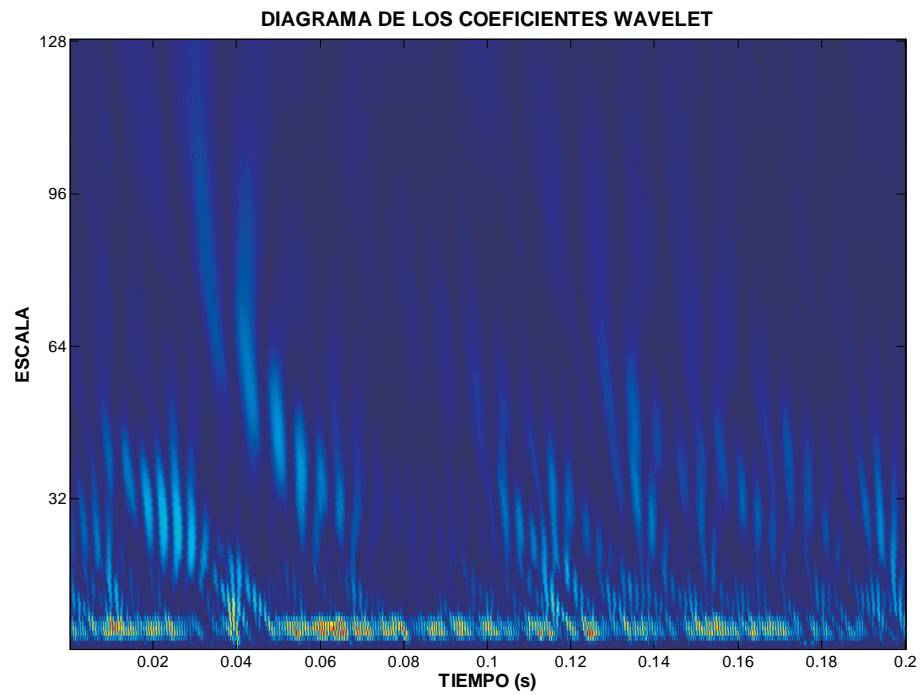


Figura 7.32 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.29 (Sin defecto)

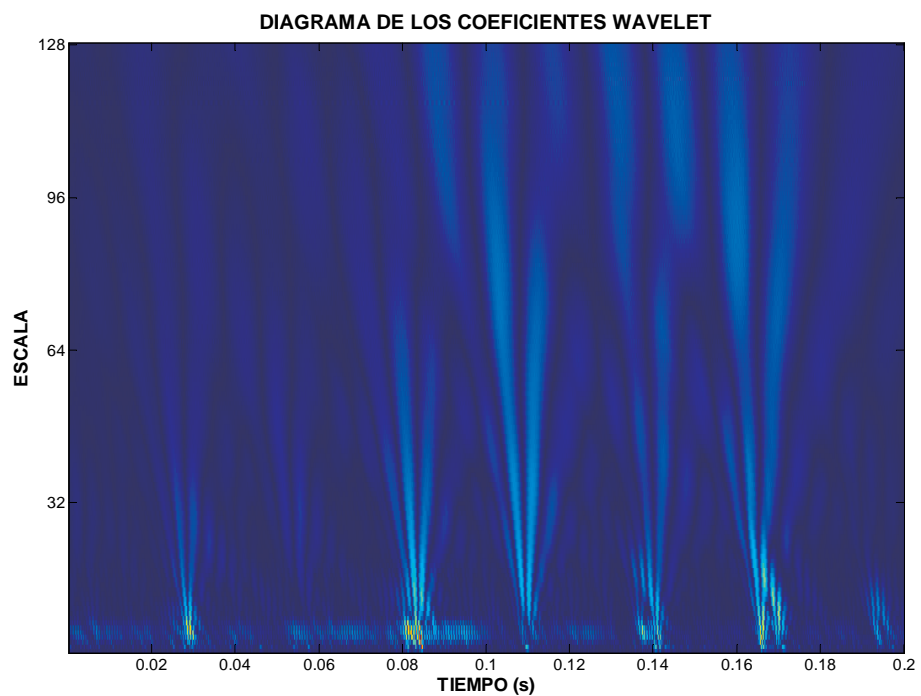


Figura 7.33 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.29 (Defecto en pista externa)

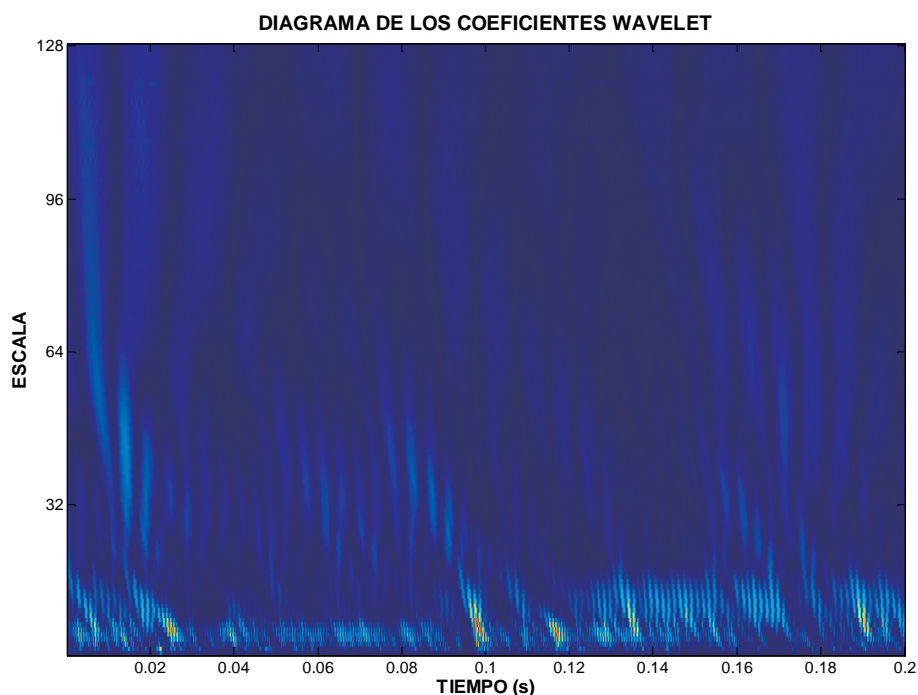


Figura 7.34 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.29 (Defecto en pista interna)

7.2.6. Influencia de la carga y velocidad en la señal

La carga influye muy poco en los parámetros de la señal, en algunos casos es prácticamente constante y en otros aumenta ligeramente. Respecto a la velocidad de giro, si que influye claramente en la señal.

Si tomamos como por ejemplo como evoluciona la señal temporal en un rodamiento de 3 bolas, con defecto en el anillo interno, cargado con 3000 N., Figura 7.35, observamos como a medida que aumenta la velocidad de giro, aumenta la frecuencia de aparición de picos de tipo impulsivo y también aumenta la magnitud de los mismos.

Respecto a la evolución del espectro de potencia Figura 7.36, se observa como al tiempo que aumenta la velocidad de giro cada vez adquiere mayor valor los armónicos de mayor frecuencia.

Respecto a los espectros de la envolvente Figura 7.37, según aumenta la velocidad de giro, aumenta el valor de la amplitud del armónico principal de la frecuencia de fallo.

Respecto al análisis de los mapas wavelet Figuras 7.38 a ??, solo se aprecia que a medida que aumenta la velocidad angular, mayor es el número de picos en la parte baja de la escala (alta frecuencia).

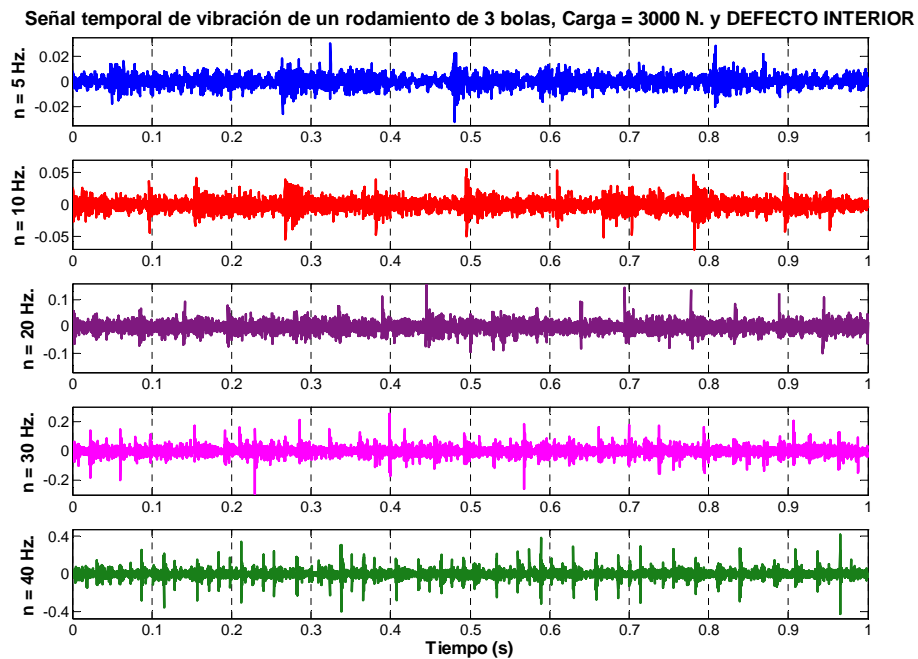


Figura 7.35 Señales temporales de un rodamiento de tres bolas, con defecto en la pista interna, girando a distintas velocidades

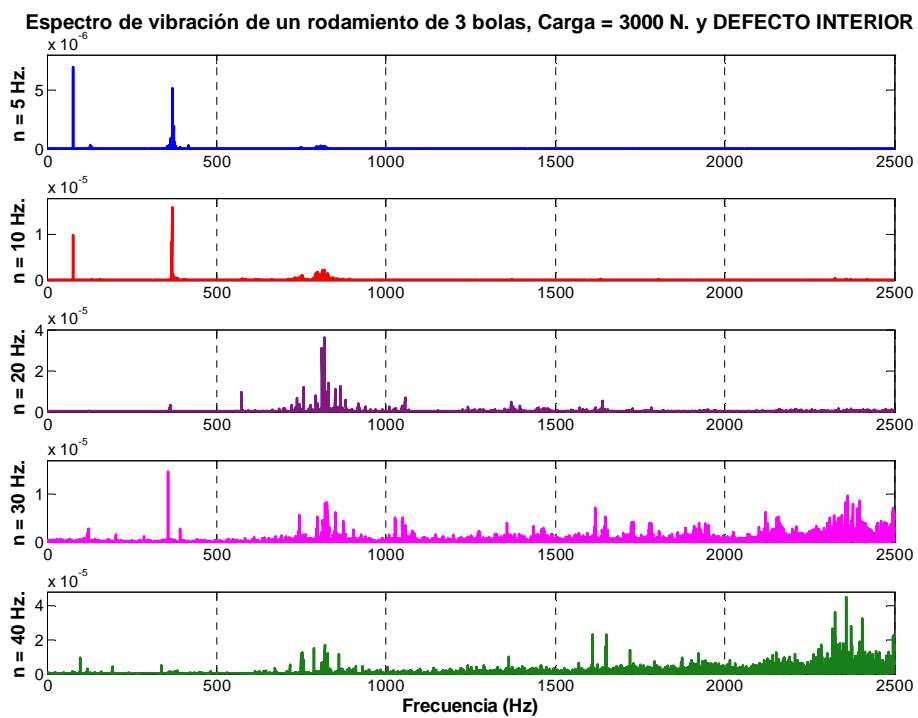
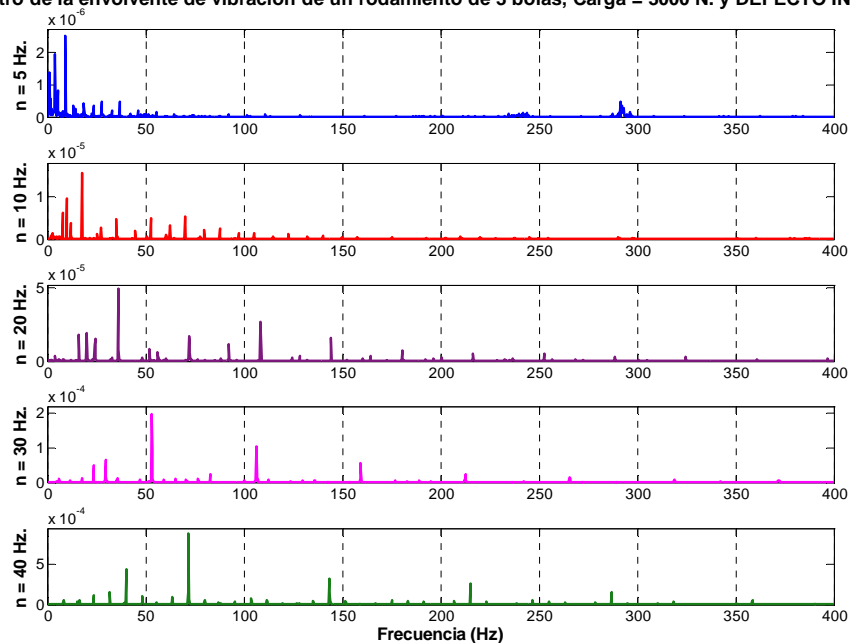
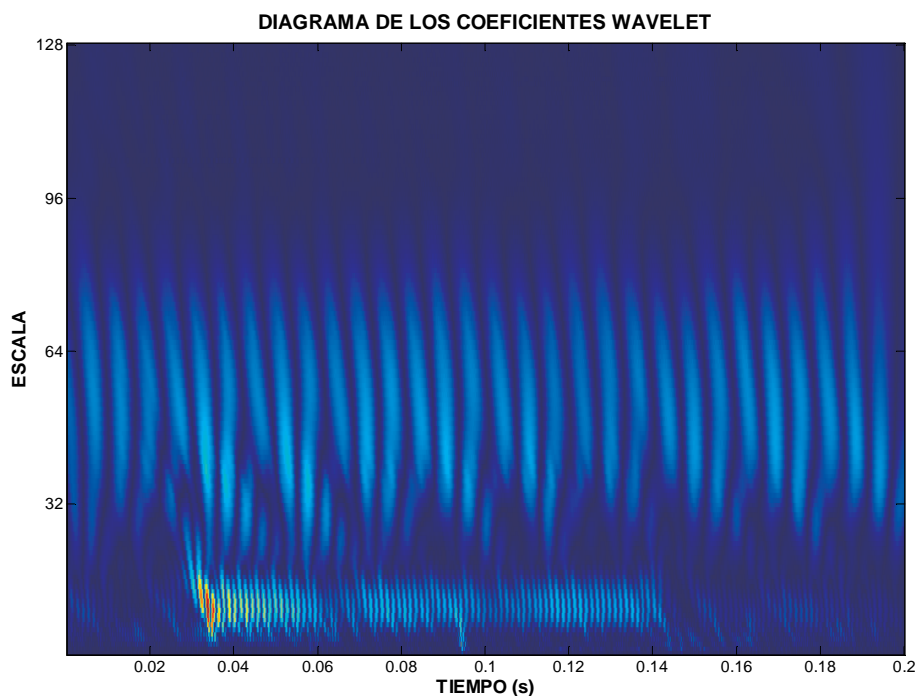


Figura 7.36 Espectros de las señales temporales representadas en la Figura 7.35

Espectro de la envolvente de vibración de un rodamiento de 3 bolas, Carga = 3000 N. y DEFECTO INTERIOR

**Figura 7.37** Espectros de las envolventes de las señales temporales representadas en la Figura 7.35**Figura 7.38** Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.35 (300 r.p.m.) girando a 300 r.p.m.

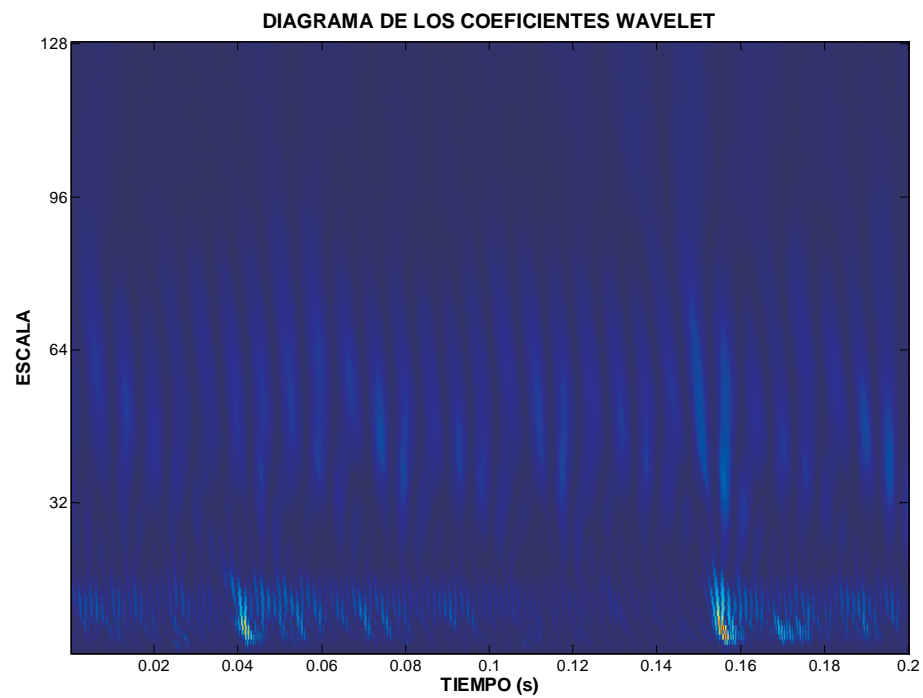


Figura 7.39 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.35 (600 r.p.m.)

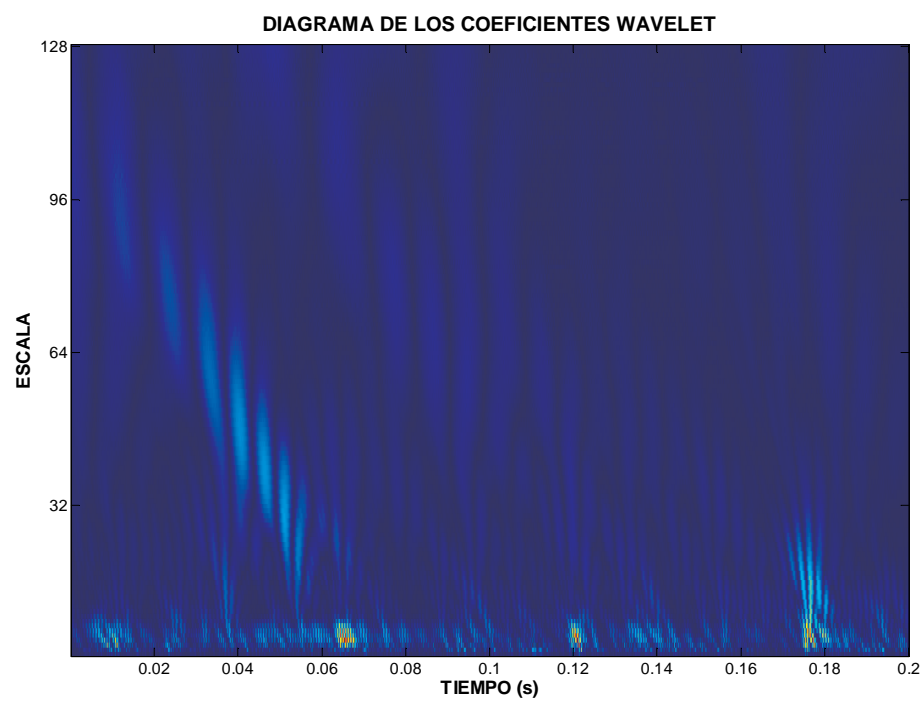


Figura 7.40 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.35 (1200 r.p.m.)

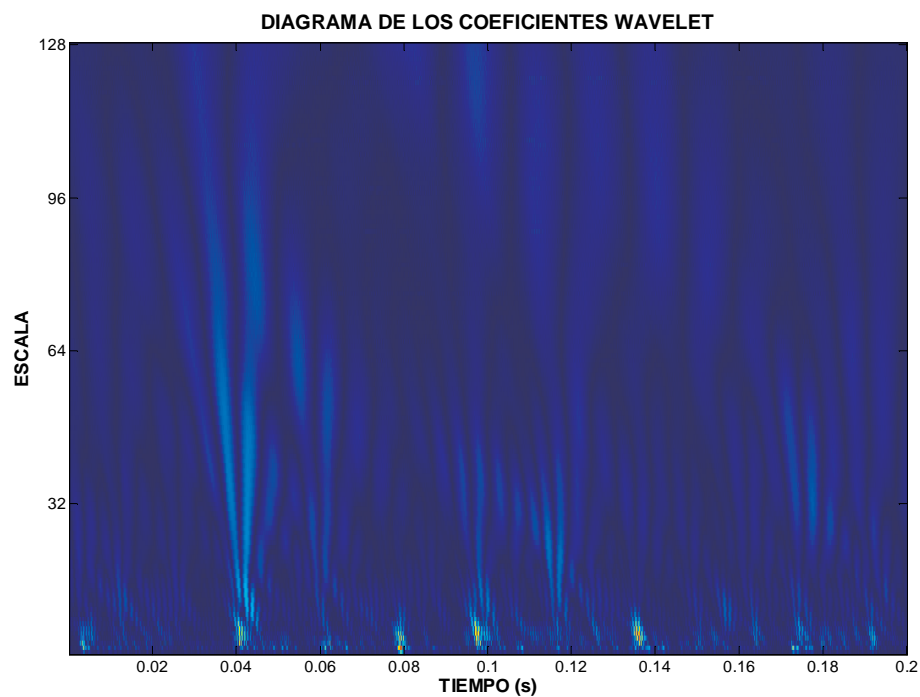


Figura 7.41 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.35 (1800 r.p.m.)

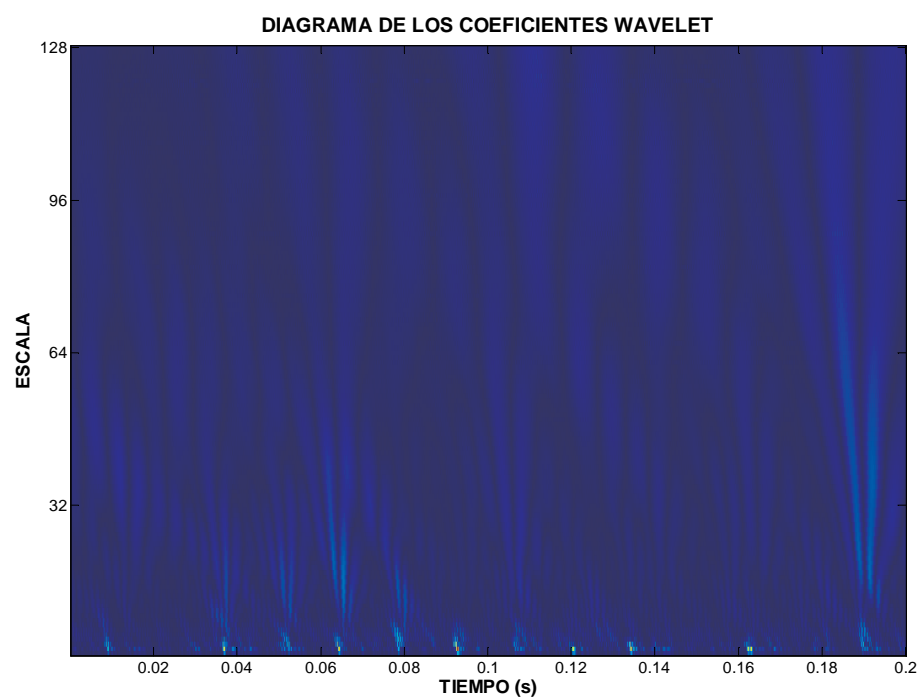


Figura 7.42 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.35 (2400 r.p.m.)

7.3. SEÑALES SIMULADAS

En esta sección se presentan varios ejemplos de señales obtenidas por simulación de los distintos modelos dinámicos para comprobar la coherencia de resultados.

7.3.1. Modelo de 5 GDL (Rodamiento de 3 bolas) con defecto en el anillo interno, carga de 1500 N. y velocidad de giro de 20 Hz

En las Figuras 7.43 y 7.44 se muestran la señal temporal y la envolvente de la señal rectificada respectivamente. Se observa en primer lugar que esta señal simulada es mucho más limpia que la señal experimental. Esto es debido a la influencia vibratoria de los distintos componentes del sistema mecánico donde está integrado el rodamiento en la señal experimental. La señal simulada deriva únicamente del comportamiento dinámico del rodamiento y sus parámetros característicos del sistema masa-muelle-amortiguamiento. Además, puede observarse en la señal simulada Figura 7.43 los picos de paso por defecto donde se aprecia la modulación de los mismos característico de un defecto en anillo interno. En la Figura 7.45 se muestra el espectro de potencia de la señal temporal de la Figura 7.43, pero de la observación de la misma, no podemos cualificar ni cuantificar defecto alguno. Sin embargo, el espectro de la envolvente Figura 7.46 sí que muestra una representación donde se puede apreciar las frecuencias características de defecto.

En las Figuras 7.48 y 7.49 se muestra el mapa wavelet de la señal temporal. Se aprecia que es un defecto típico de aro interior, pues se aprecia en alta frecuencia (parte inferior de la escala con marcas rojas-amarillas) con rastros hacia baja frecuencia (parte alta de la escala en azul claro). El mapa wavelet de la envolvente, se observa igualmente los picos a alta frecuencia (parte baja de la escala) pero se observa claramente los picos a baja y media frecuencia correspondientes a paso por el fallo (rastros rojos)

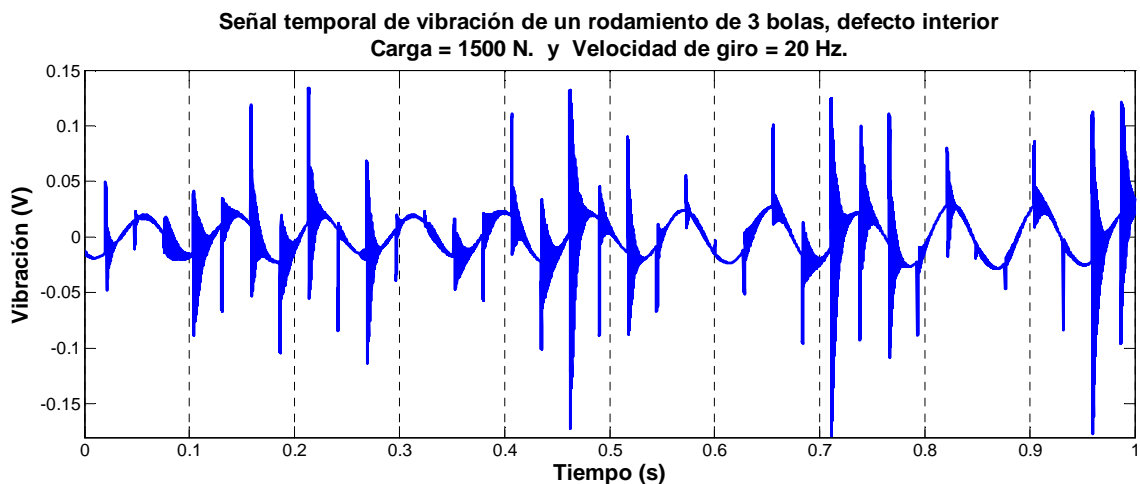


Figura 7.43 Señal temporal de un modelo de rodamiento con defecto en la pista interna, con 3 bolas.

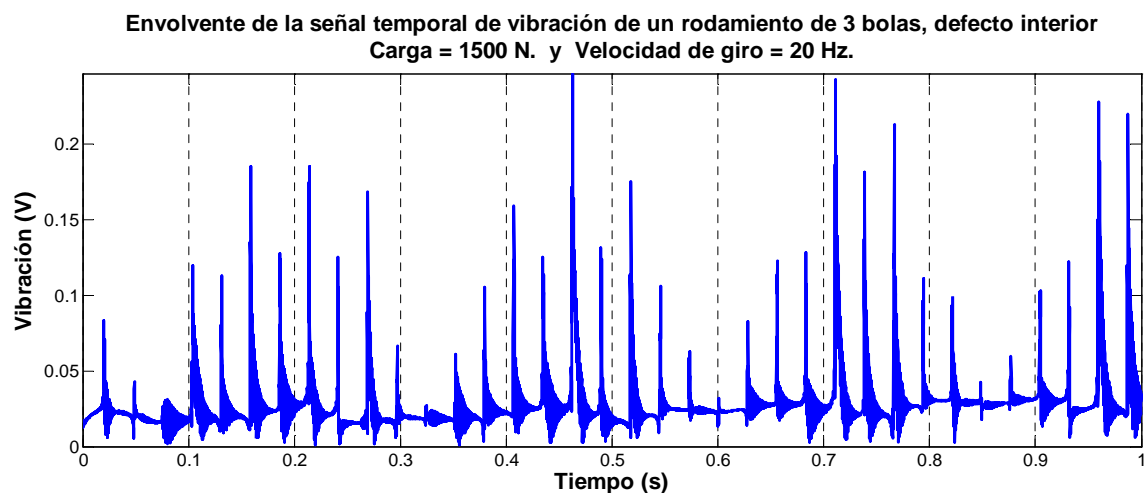


Figura 7.44 Envoltura de la señal temporal de un modelo de rodamiento con defecto en la pista interna, con 3 bolas.

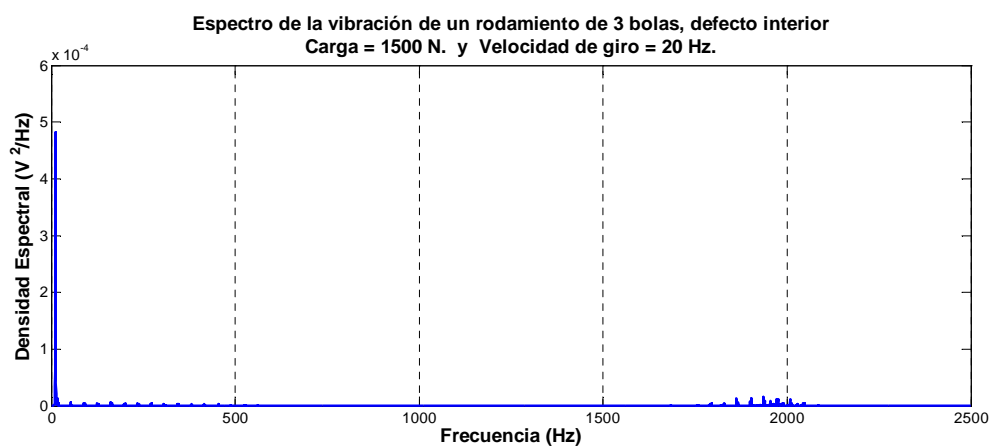


Figura 7.45 Espectro de la señal temporal representada en la Figura 7.43

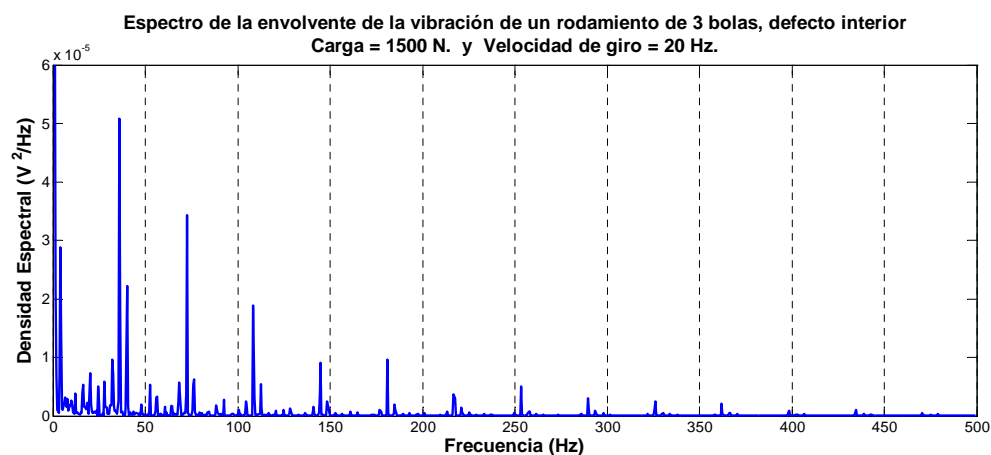


Figura 7.46 Espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.44

La Figura 7.47 muestra el espectro de la envolvente de la señal temporal donde se encuentran unas marcas que corresponden a las frecuencias características que describimos seguidamente.

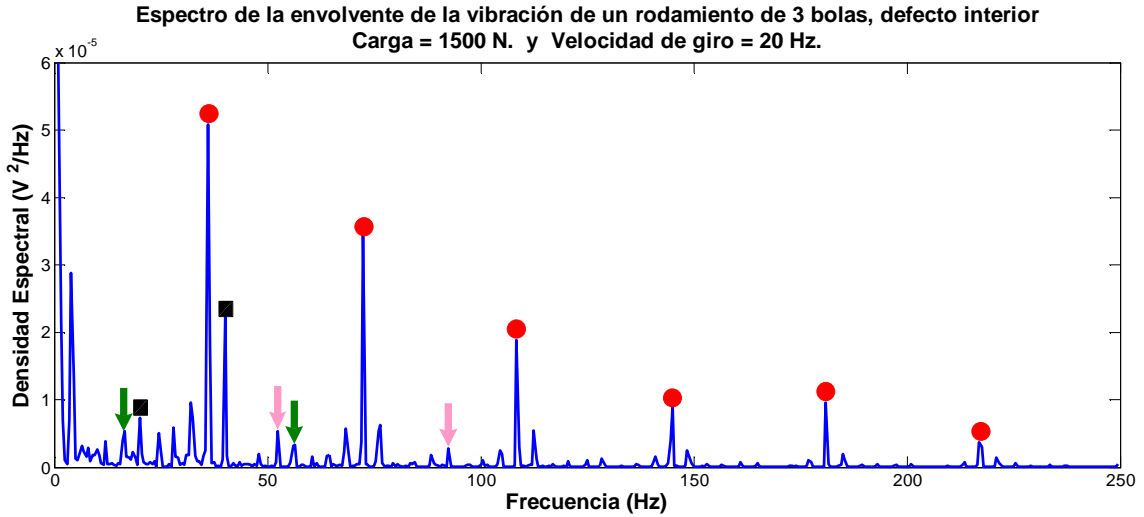


Figura 7.47 Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.44

- Los picos finalizado en un cuadrado negro son el primer y el segundo armónico de la frecuencia de giro:

$$n = 20 \text{ Hz}$$

$$2 \cdot n = 40 \text{ Hz}$$

- Los picos finalizados con un punto rojo son los armónicos correspondientes a la frecuencia de fallo en anillo interior

$$BPFI = 36'2 \text{ Hz}$$

- Los dos picos coronados por flechas verdes son las bandas laterales que aparecen a cada lado del primer armónico de la frecuencia de fallo en anillo interior:

$$BPFI - n = 16'2 \text{ Hz}$$

$$BPFI + n = 56'2 \text{ Hz}$$

- Los dos picos coronados por flechas rosas son las bandas laterales que aparecen a cada lado del segundo armónico de la frecuencia de fallo en anillo interior:

$$2 \cdot BPFI - n = 52'4 \text{ Hz}$$

$$2 \cdot BPFI + n = 92'4 \text{ Hz}$$

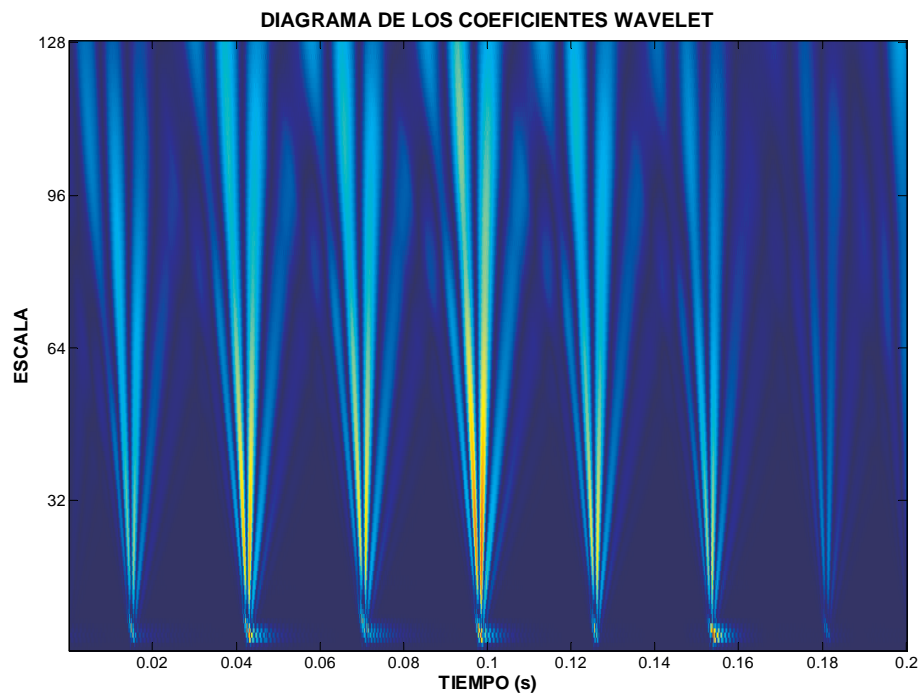


Figura 7.48 Mapa wavelet de la señal temporal representada en la Figura 7.43

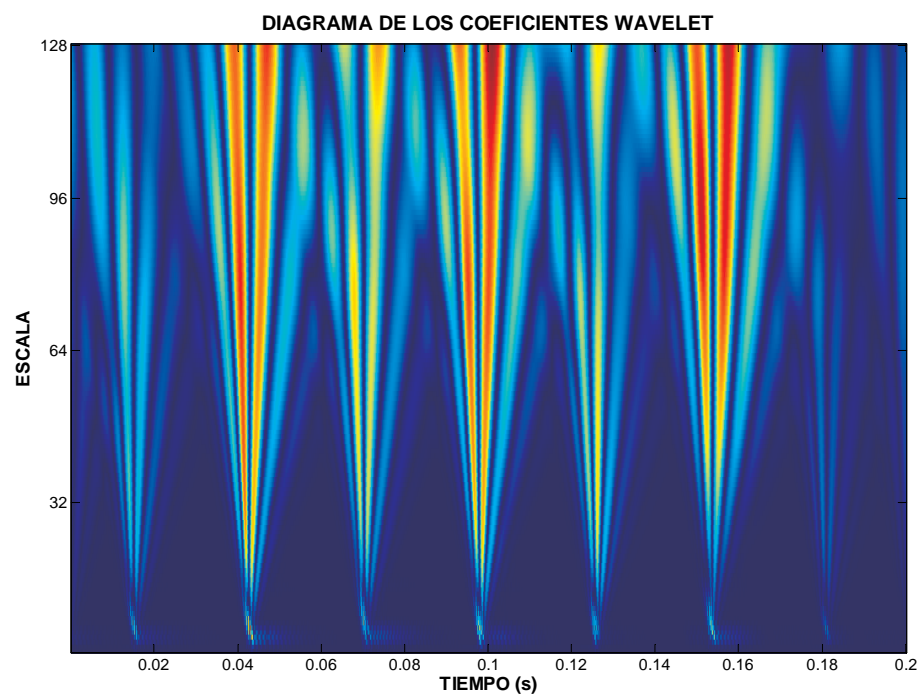


Figura 7.49 Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.44

7.3.2. Modelo de 11 GDL (Rodamiento de 9 bolas) con defecto en el anillo interno, carga de 1500 N. y velocidad de giro de 20 Hz

En las Figuras 7.50 y 7.51 se muestran la señal temporal y la envolvente de la señal rectificada respectivamente de un modelo de 11 GDL (rodamiento de 9 bolas) en las mismas condiciones de funcionamiento que el caso anterior. Se observa en la señal simulada Figura 7.50 los picos de paso por defecto, apareciendo estos con mayor frecuencia que en el caso del modelo de 5 GDL., se aprecia la modulación de los mismos característico de un defecto en anillo interno. En la Figura 7.52 se muestra el espectro de potencia de la señal temporal de la Figura 7.50, donde cabe destacar los picos que aparecen a las frecuencias alrededor de los 2 kHz, correspondientes a frecuencias naturales del sistema complejo masa-muelle-amortiguamiento del modelo. En el espectro de la envolvente Figura 7.53 se muestra una representación donde se puede apreciar las frecuencias características de defecto, donde además las frecuencias del primer y segundo armónico de las frecuencias de defecto muestran sus respectivas bandas laterales.

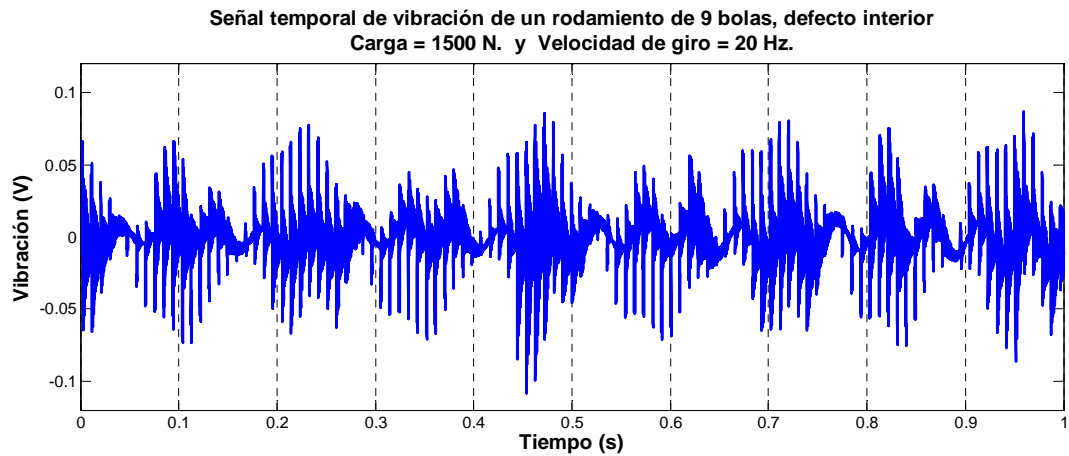


Figura 7.50 Señal temporal de un modelo de rodamiento con defecto en la pista interna, con 9 bolas.

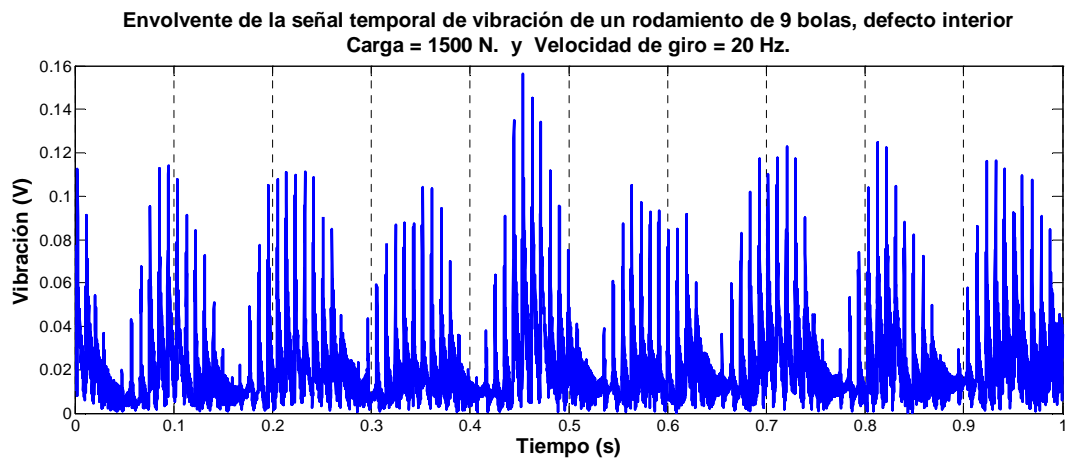


Figura 7.51 Envolvente de la señal temporal de un modelo de rodamiento con defecto en la pista interna, con 9 bolas.

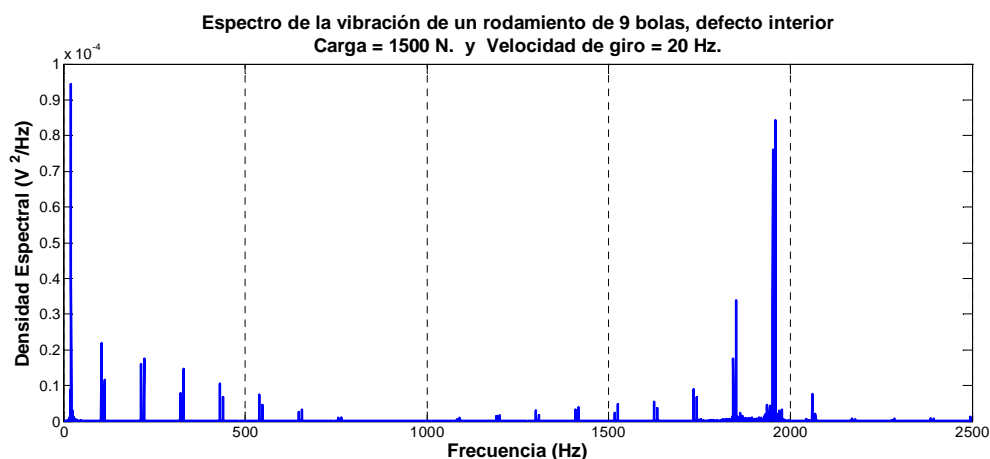


Figura 7.52 Espectro de la señal temporal representada en la Figura 7.50

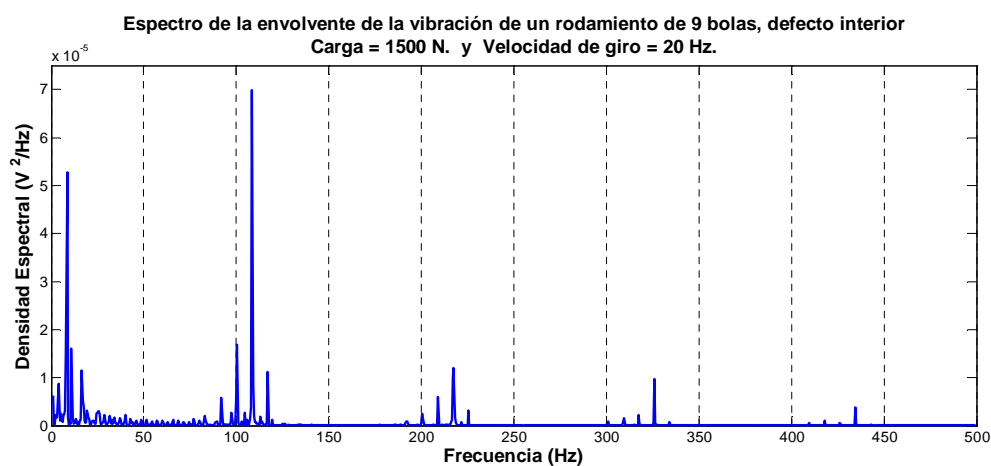


Figura 7.53 Espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.51

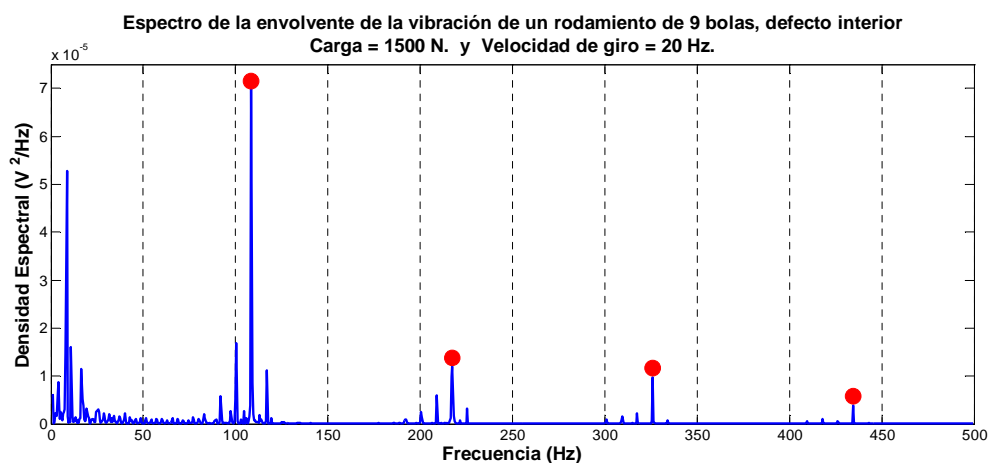


Figura 7.54 Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.51. Los picos finalizados con puntos rojos son los armónicos de la frecuencia de fallo BPF_I = 108'6 Hz

En las Figuras 7.55 y 7.56 se muestra el mapa wavelet de la señal temporal. Se aprecian los picos en alta frecuencia (parte inferior de la escala) a una frecuencia de aparición mayor que en el caso de 5 GDL. El mapa wavelet de la envolvente, se observa igualmente los picos a alta frecuencia (parte baja de la escala) pero se ven claramente los picos a baja y media frecuencia correspondientes a paso por el fallo (rastros rojos-amarillos).

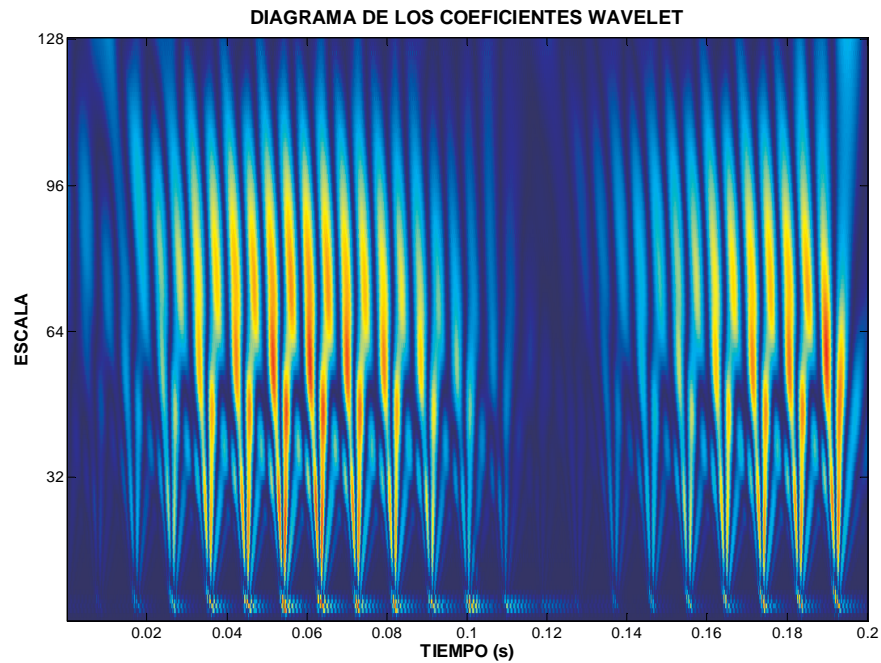


Figura 7.55 Mapa wavelet de la señal temporal representada en la Figura 7.50

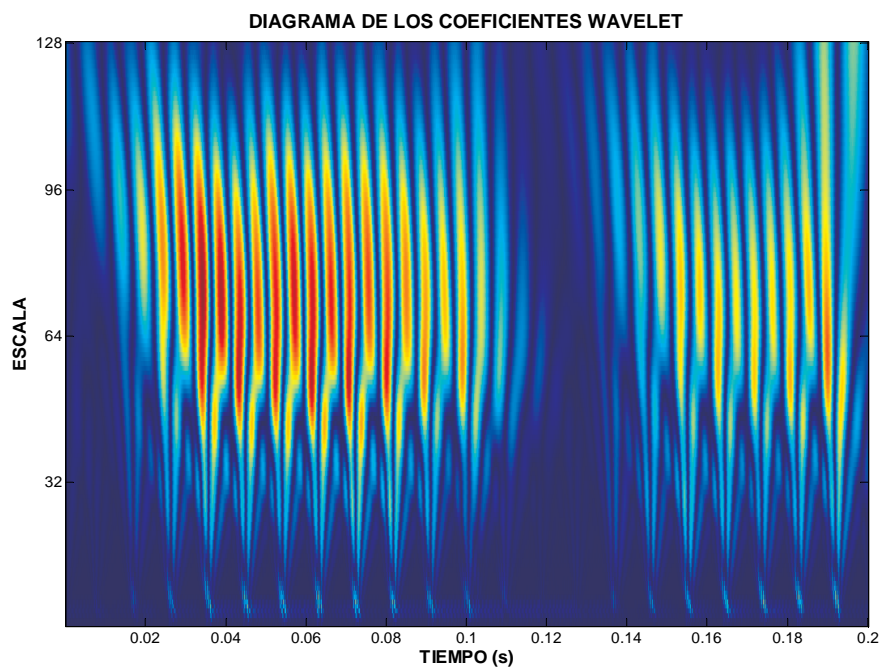


Figura 7.56 Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.51

7.3.3. Modelo 5 GDL (Rodamiento de 3 bolas) con defecto en el anillo externo, carga de 1000 N. y velocidad de giro de 30 Hz

En las Figuras 7.57 y 7.58 se muestran la señal temporal y la envolvente de la señal rectificada respectivamente. Se observa los picos de paso por defecto que aparecen de forma muy regular a lo largo del tiempo. En la Figura 7.59 se muestra el espectro de potencia de la señal temporal de la Figura 7.57. Se aprecia también en esta ocasión una frecuencia de resonancia alrededor de los 2 kHz., pero de la observación de la figura, tampoco podemos cualificar ni cuantificar defecto alguno. Sin embargo, el espectro de la envolvente Figuras 7.60 y 7.61 si que muestra una representación donde se puede apreciar las frecuencias características de defecto de anillo externo, apareciendo los 6 primeros armónicos.

En la Figura 7.62 se muestra el mapa wavelet de la señal temporal. En esta ocasión, prácticamente son inapreciables los picos en alta frecuencia (parte inferior de la escala) aunque si aparecen los rastros hacia baja frecuencia (parte alta de la escala en azul claro).

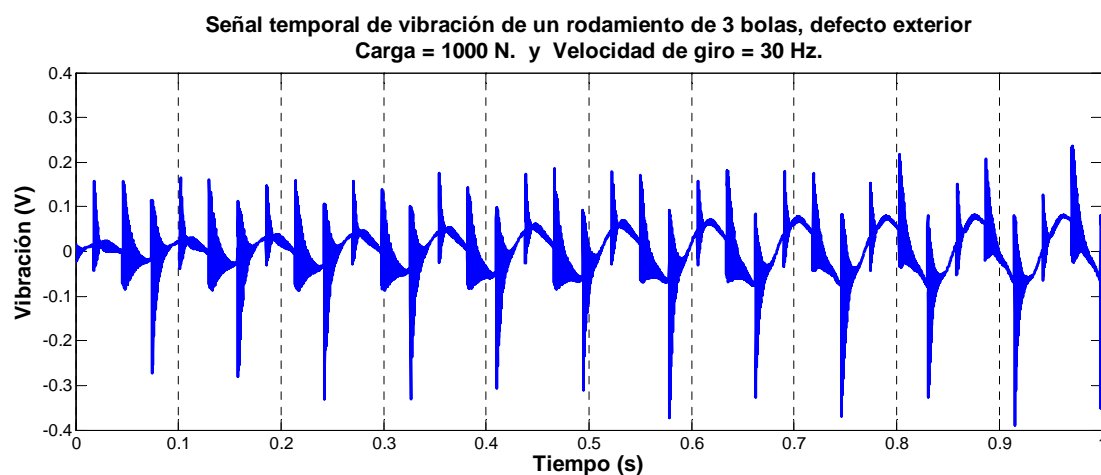


Figura 7.57 Señal temporal de un modelo de rodamiento con defecto en la pista externa, con 3 bolas.

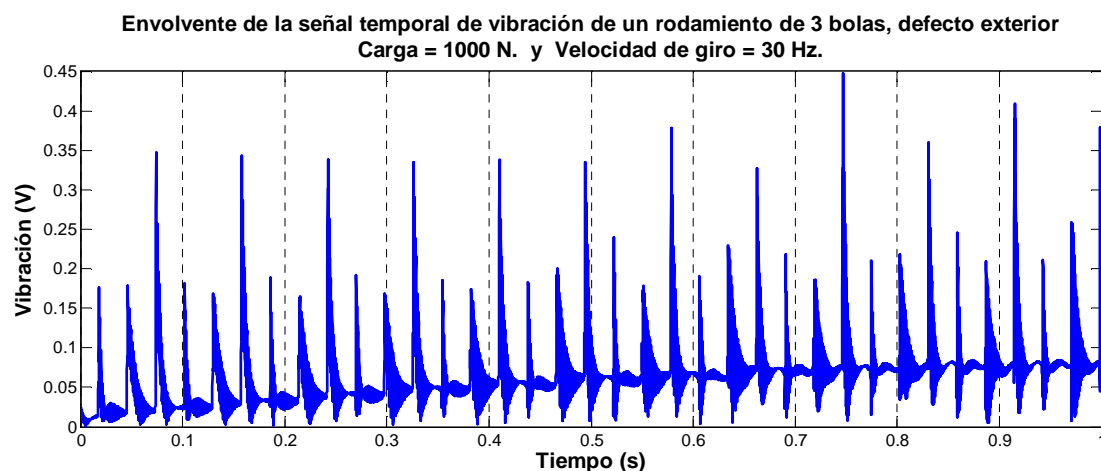


Figura 7.58 Envolvente de la señal temporal de un modelo de rodamiento con defecto en la pista externa, con 3 bolas.

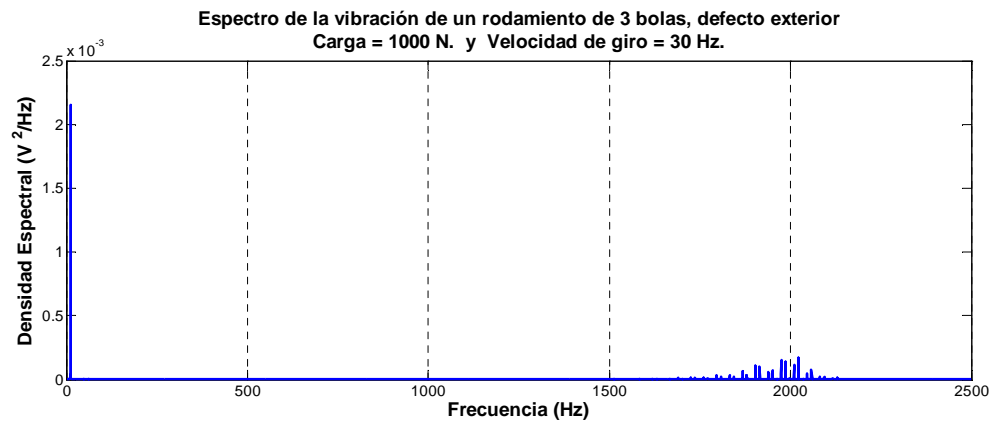


Figura 7.59 Espectro de la señal temporal representada en la Figura 7.57

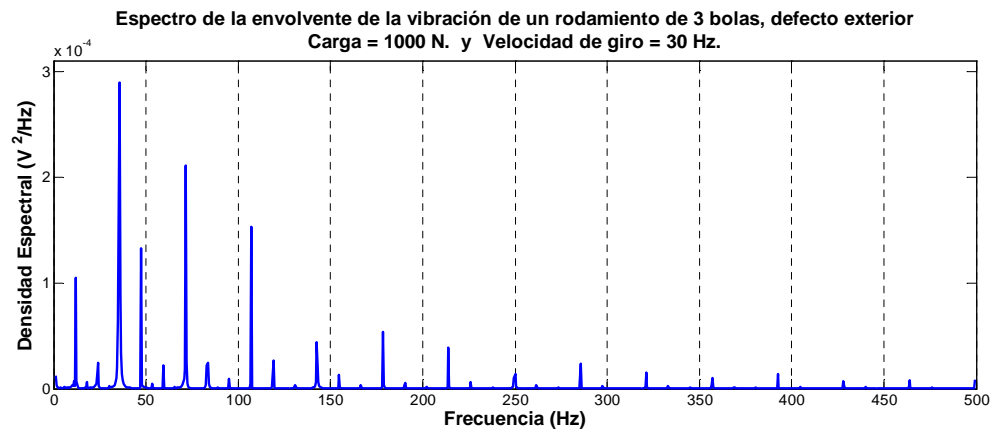


Figura 7.60 Espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.58

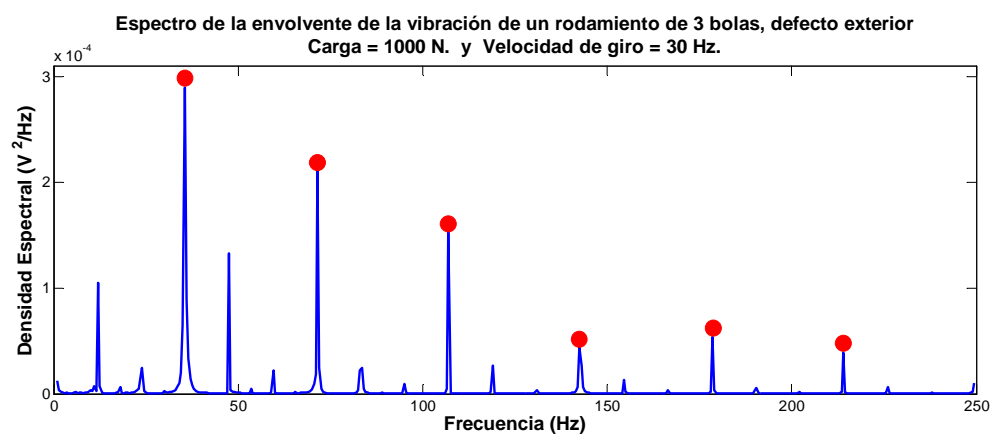


Figura 7.61 Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.58. Los picos finalizados con puntos rojos son los armónicos de la frecuencia de fallo $BPFE = 35.7$ Hz

En el mapa wavelet de la envolvente, Figura 7.63 tampoco se aprecian los picos a alta frecuencia (parte baja de la escala) pero se observa claramente los picos a baja y media frecuencia correspondientes a paso por el fallo (rastros rojos), más espaciados que en el caso del modelo de 11 GDL (rodamiento de 9 bolas).

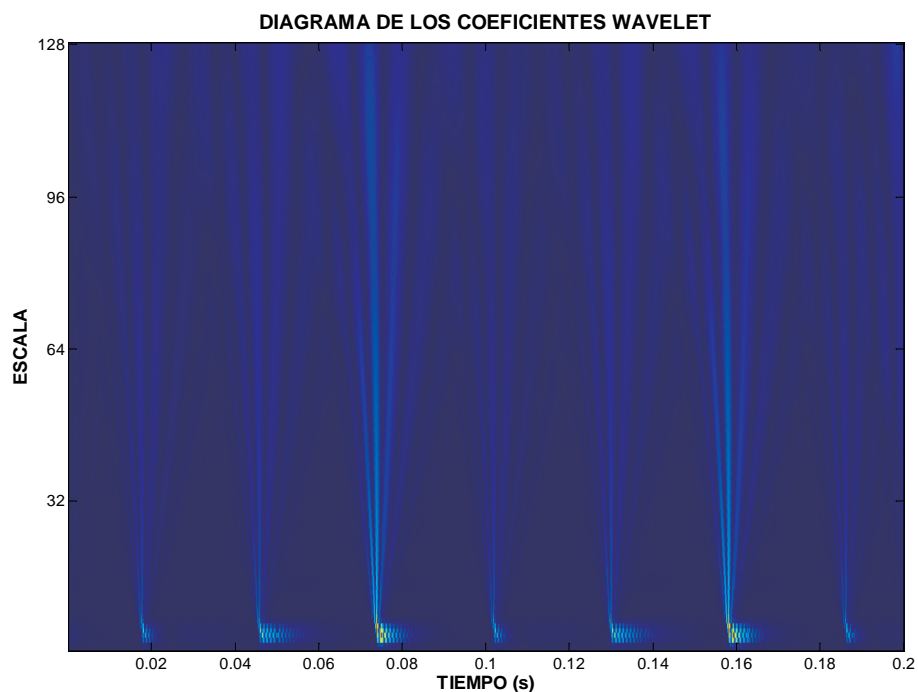


Figura 7.62 Mapa wavelet de la señal temporal representada en la Figura 7.57

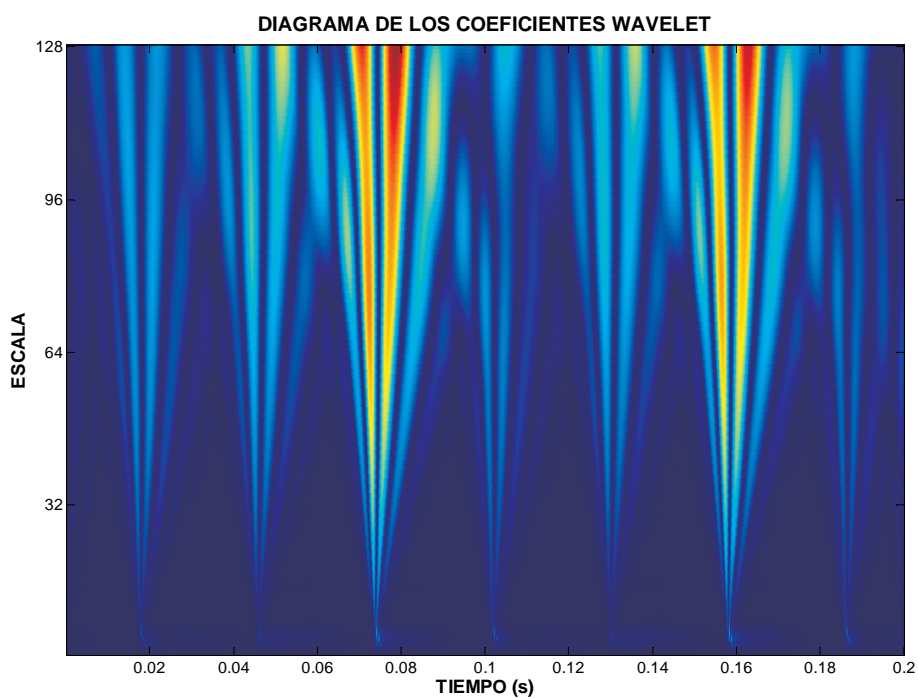


Figura 7.63 Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.58

7.3.4. Modelo 11 GDL (rodamiento de 9 bolas) con defecto en el anillo externo, carga de 1000 N. y velocidad de giro de 30 Hz

En las Figuras 7.64 y 7.65 se muestran la señal temporal y la envolvente de la señal rectificada respectivamente. Se observa los picos de paso por defecto que aparecen de forma mucho más regular y a mayor frecuencia que en el caso anterior. En la Figura 7.66 se muestra el espectro de potencia de la señal temporal de la Figura 7.64. Se aprecia también en esta ocasión una frecuencia de resonancia alrededor de los 2 kHz., pero de la observación de la figura, tampoco podemos cualificar ni cuantificar defecto alguno. Sin embargo, el espectro de la envolvente Figuras 7.67 y 7.68 si que muestra una representación donde se puede apreciar claramente las frecuencias características de defecto de anillo externo, apareciendo los 4 primeros armónicos.

En la Figura 7.69 se muestra el mapa wavelet de la señal temporal. Se aprecia las marcas en alta frecuencia (parte inferior de la escala con marcas rojas-amarillas) muy regulares con rastros hacia baja frecuencia (parte alta de la escala en azul claro).

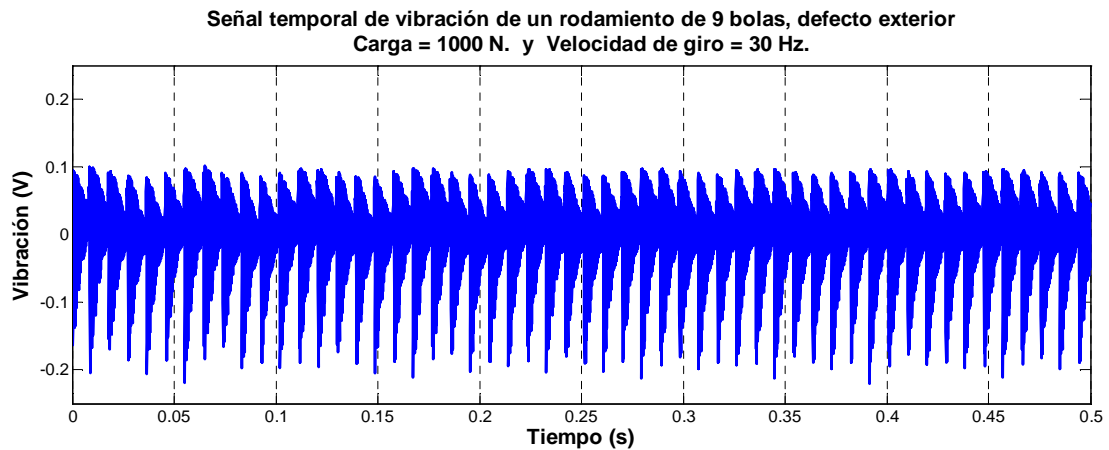


Figura 7.64 Señal temporal de un modelo de rodamiento con defecto en la pista externa, con 9 bolas.

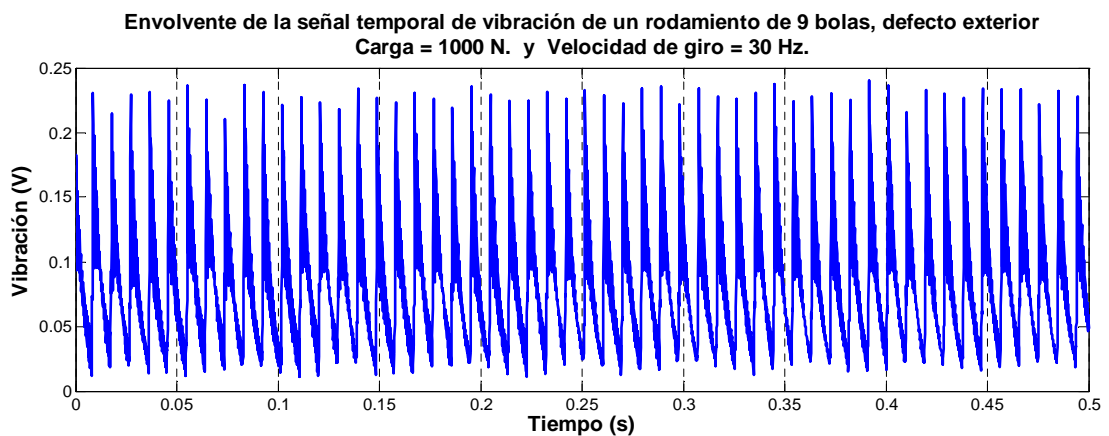


Figura 7.65 Envolvente de la señal temporal de un modelo de rodamiento con defecto en la pista externa, con 9 bolas.

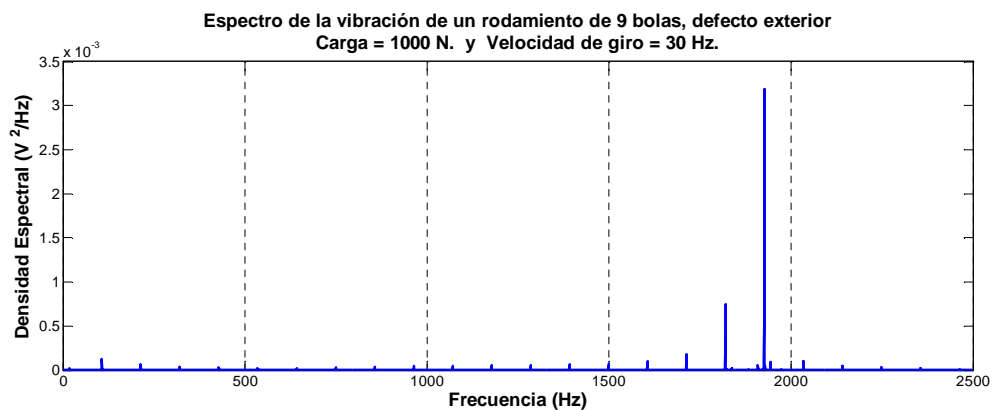


Figura 7.66 Espectro de la señal temporal representada en la Figura 7.64

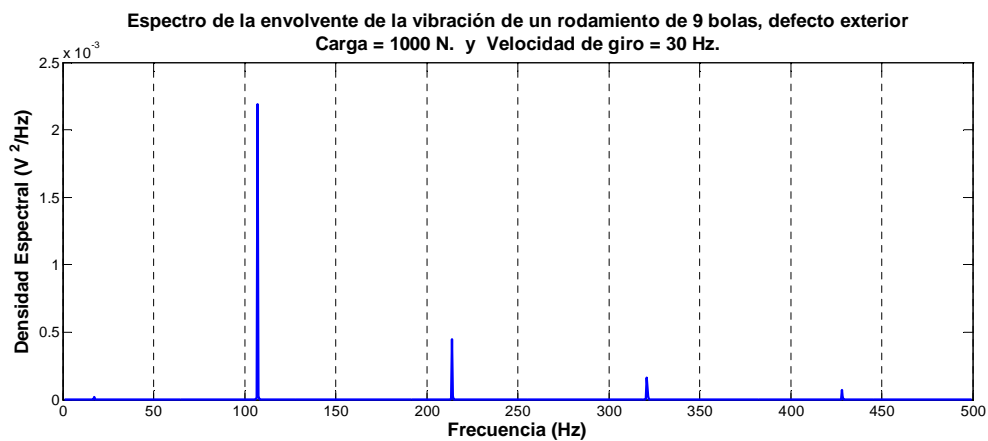


Figura 7.67 Espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.65

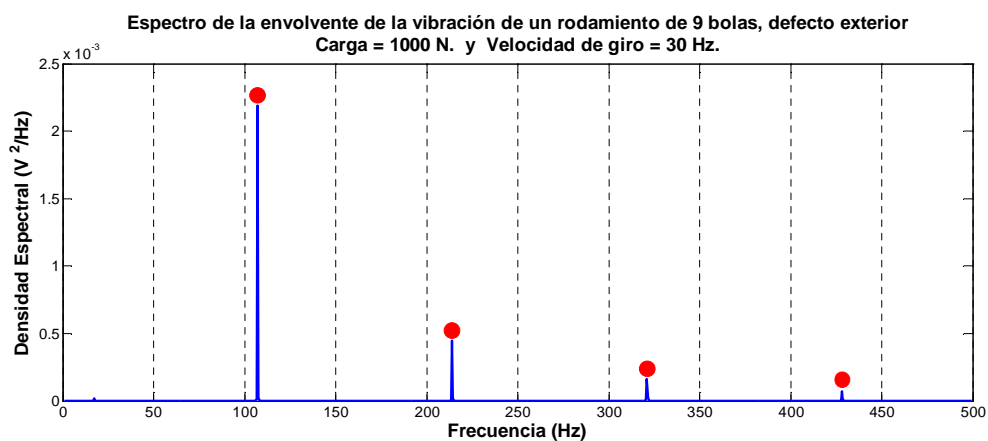


Figura 7.68 Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.65. Los picos finalizados con puntos rojos son los armónicos de la frecuencia de fallo BPFE = 107.1 Hz

En el mapa wavelet de la envolvente, Figura 7.70 tampoco se aprecian los picos a alta frecuencia (parte baja de la escala) pero se observa claramente los picos a baja y media frecuencia correspondientes a paso por el fallo (rastros rojos), menos espaciados que en el caso del modelo de 5 GDL (rodamiento de 3 bolas).

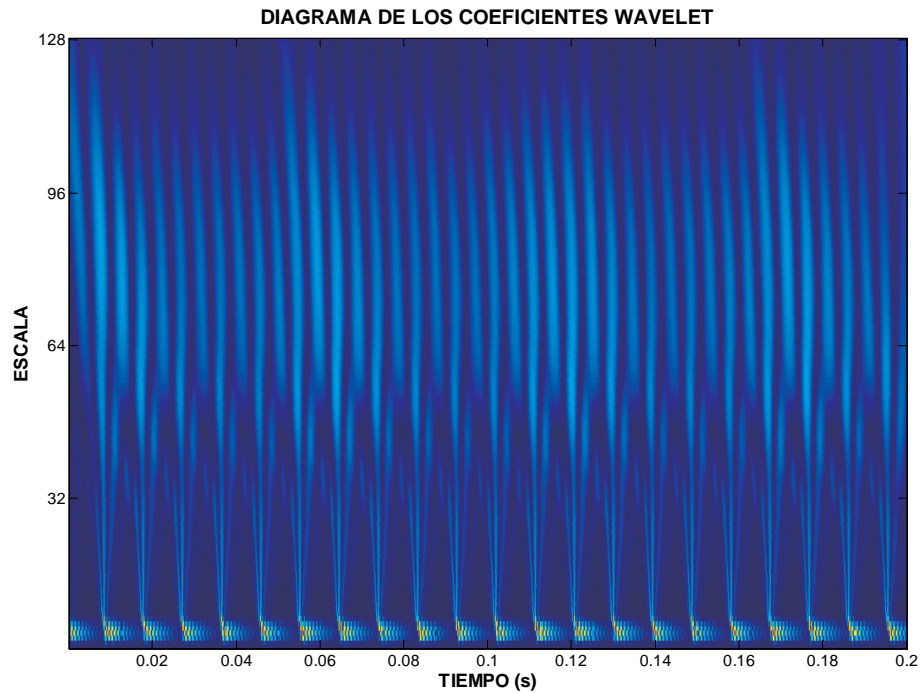


Figura 7.69 Mapa wavelet de la señal temporal representada en la Figura 7.64

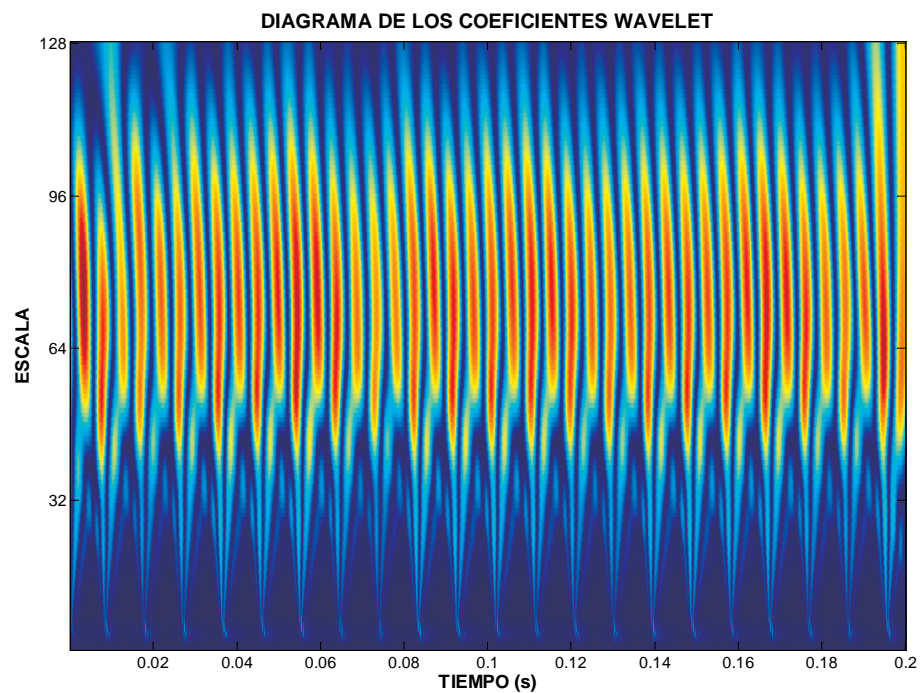


Figura 7.70 Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.65

7.3.5. Análisis comparativo de modelo 5 GDL (rodamiento de 3 bolas) con modelo de 11 GDL (rodamiento de 9 bolas) sin defecto

En ausencia de vibraciones causadas por elementos externos al rodamiento y ruidos aleatorios, lo que vemos en la Figura 7.71 son señales periódicas correspondientes al comportamiento de un sistema equivalente masa-muelle-amortiguamiento.

Señal temporal de vibración de un rodamiento sin defecto, Carga = 1500 N. y Velocidad de giro = 20 Hz.

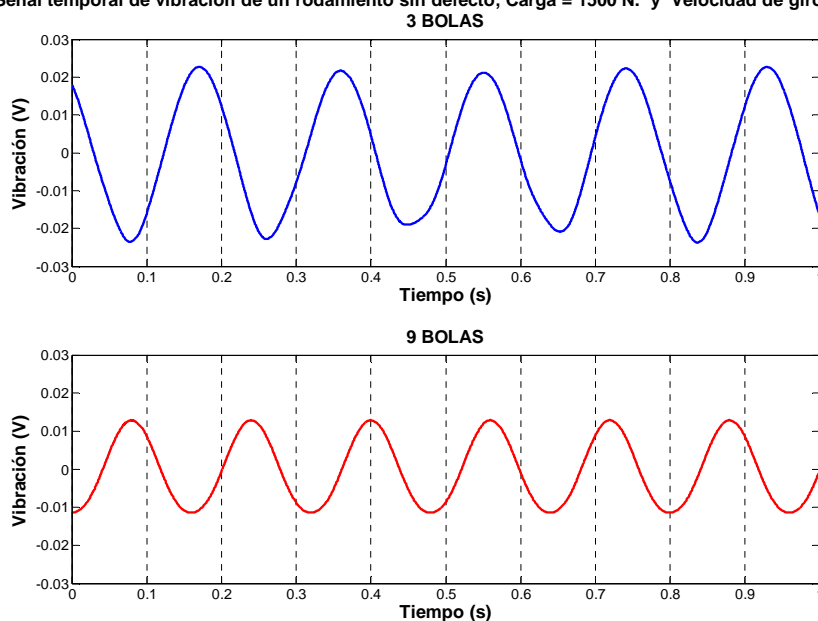


Figura 7.71 Señales temporales correspondientes a modelos de rodamientos de tres y nueve bolas

Espectro de la vibración de un rodamiento sin defecto, Carga = 1500 N. y Velocidad de giro = 20 Hz.

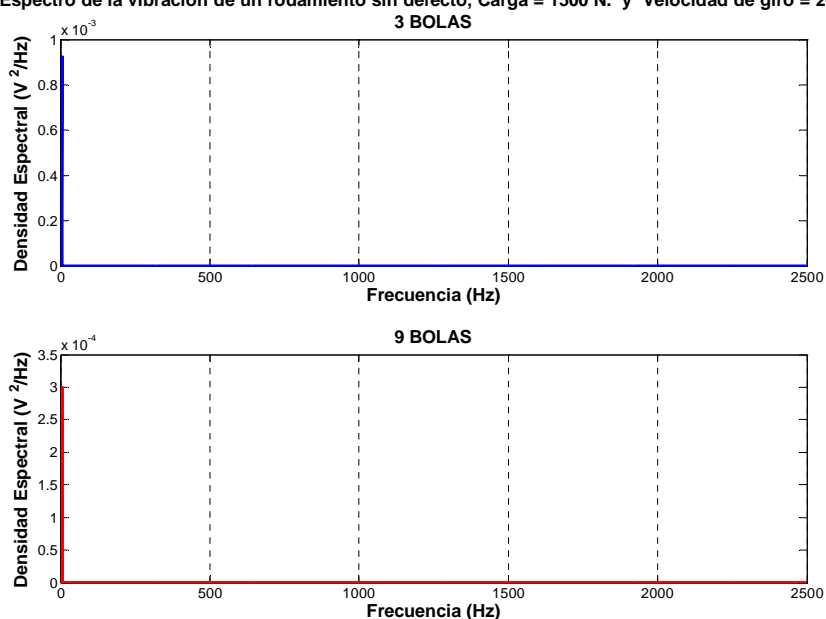


Figura 7.72 Espectros de las señales temporales correspondientes a modelos rodamientos de tres y nueve bolas

En las Figuras 7.72 y Figura 7.73 se muestra el espectro de potencia de la señal temporal de la Figura ?? y el espectro de la envolvente respectivamente. De estas representaciones no es posible obtener información de la frecuencia de giro, aunque claramente se observa que no existe ningún pico correspondiente a defecto, tratándose en ambos casos de un rodamiento en buen estado.

Espectro de la envolvente de la vibración de un rodamiento sin defecto, Carga = 1500 N. y Velocidad = 20 Hz

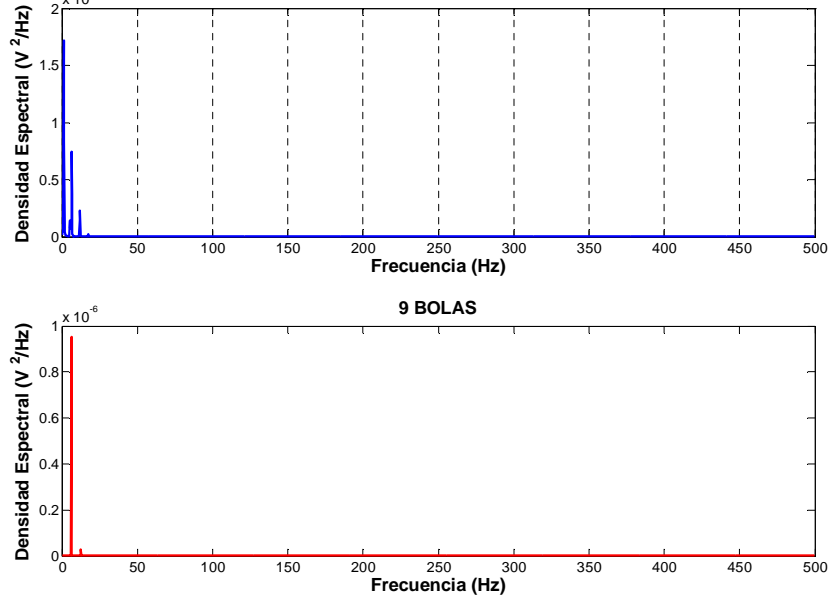


Figura 7.73 Espectros de las envolventes de las señales temporales representadas en la Figura 7.71

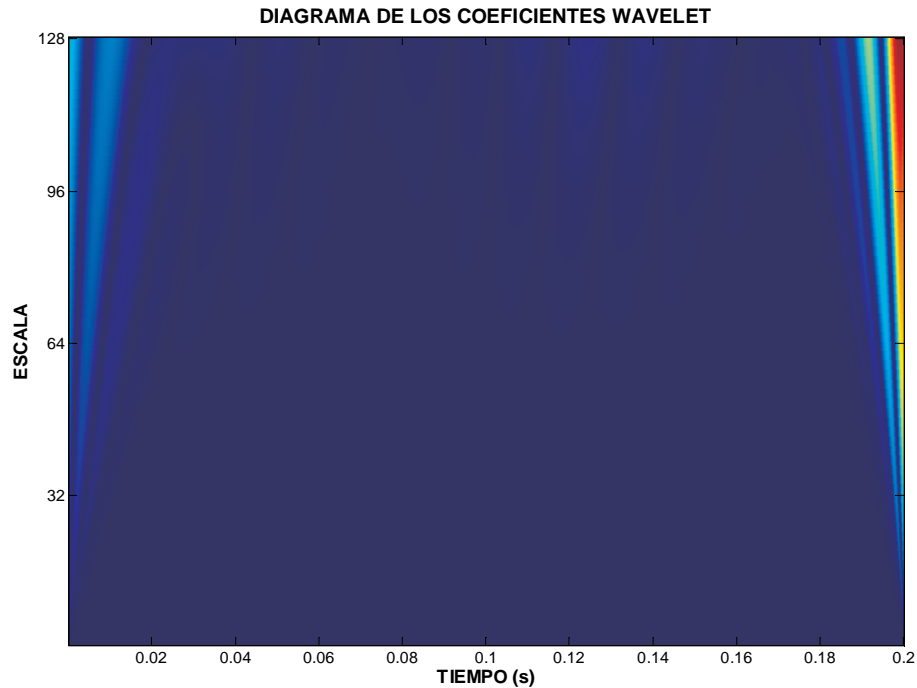


Figura 7.74 Mapa wavelet de la señal temporal representada en la Figura 7.71 (Rodamiento de 3 bolas)

De las distintas representaciones de los mapas wavelet Figuras ?? a ??, solamente mencionar que se observan patrones característicos de señales senoidales puras.

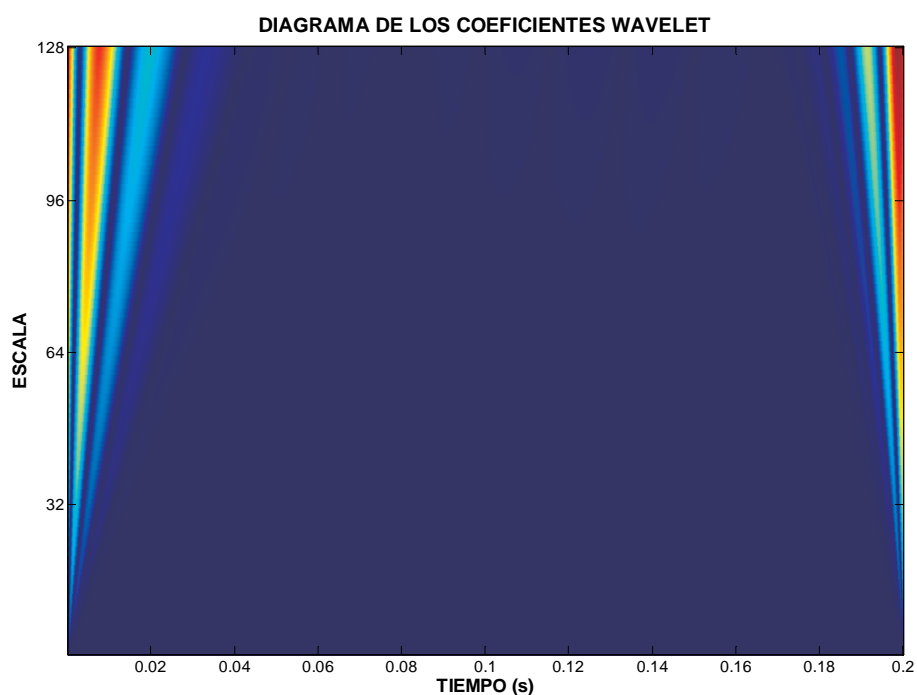


Figura 7.75 Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.71 (Rodamiento de 3 bolas)

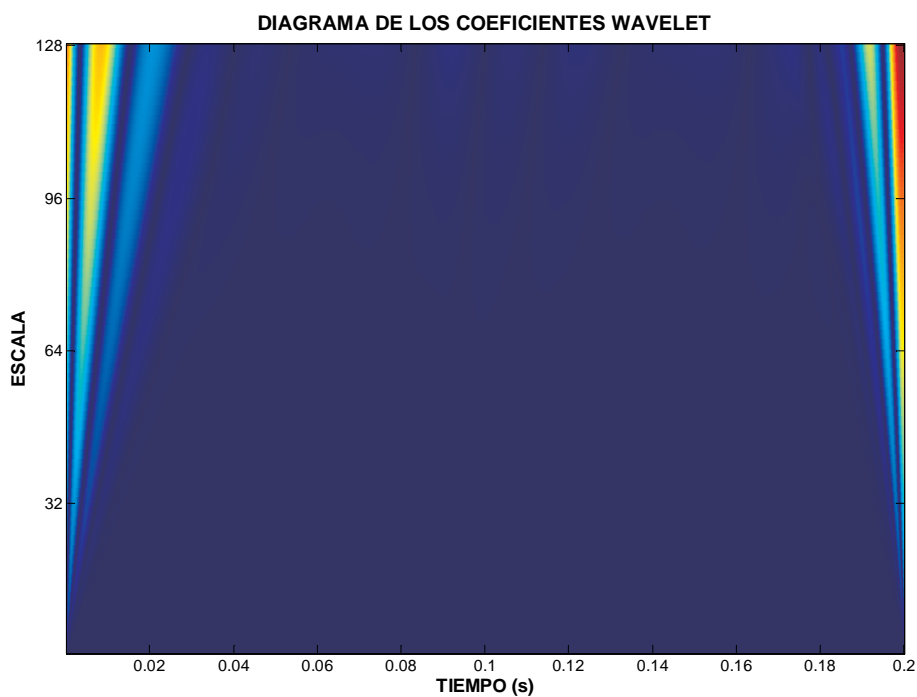


Figura 7.76 Mapa wavelet de la señal temporal representada en la Figura 7.71 (Rodamiento de 9 bolas)

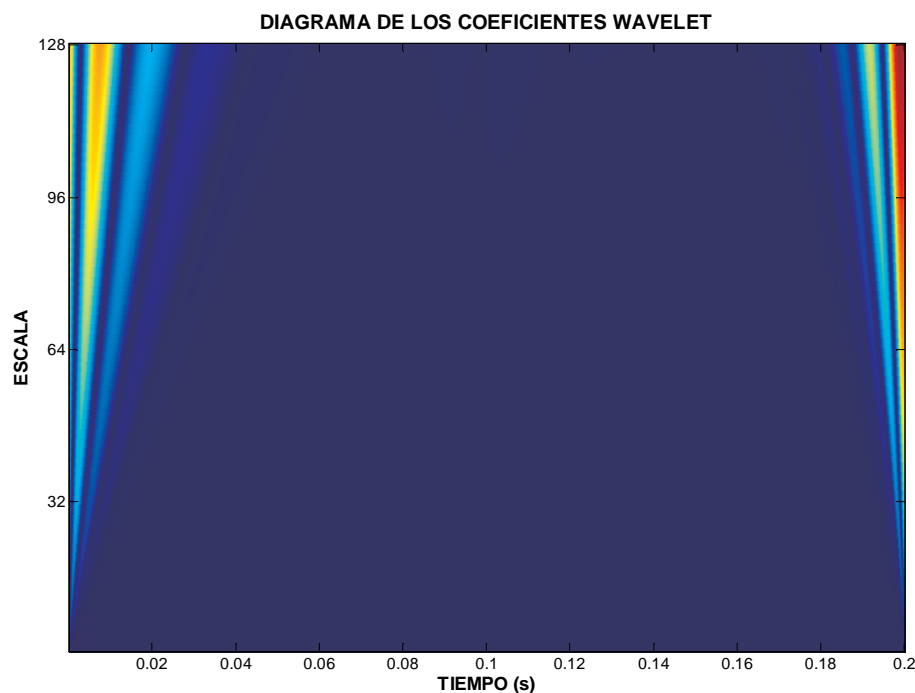


Figura 7.77 Mapa wavelet de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.71 (Rodamiento de 9 bolas)

7.3.6. Análisis comparativo de la aparición de defecto en el rodamiento. Modelo de 5 GDL

De la señal temporal Figura 7.78, se observa que cuando aparecen los defectos se aprecian picos de tipo impulsivo, con una mayor frecuencia de aparición en el modelo de 5 GDL. En el caso de defecto en el anillo externo, estos son muy repetitivos tanto en la secuencia de aparición como en la magnitud. En el caso de defecto en el anillo interno, la amplitud de los picos de defecto fluctúa de acuerdo con la carga que la bola que pasa por el defecto tenga en ese instante. Los picos correspondientes al defecto en anillo externo tienen, en este caso, menor amplitud o similar que los picos que corresponden al defecto en anillo interno. Hay que señalar que la posición del defecto en el anillo externo durante las simulaciones se encontraba, en todos los casos, en la zona de máxima carga. Se aprecia además el comportamiento senoidal de la señal correspondiente a rodamiento sin defecto, de menor amplitud que en el caso de defecto.

En la Figura 7.80 se muestran el espectro de potencia de la señal temporal de la Figura 7.78. Se aprecia también en esta ocasión que aparece una frecuencia de resonancia alrededor de los 2 kHz. cuando existe defecto, tanto en anillo interno como en anillo externo, pero de la observación de la figura, no podemos cualificar ni cuantificar defecto alguno. Sin embargo, el espectro de la envolvente Figura 7.79, si que muestra una representación donde se puede apreciar claramente las frecuencias características de defecto tanto en anillo externo como en anillo interno y varios armónicos.

En cuanto al análisis de los mapas wavelet, Figuras 7.81 a 7.83 cumplen los puntos descritos en el apartado anterior.

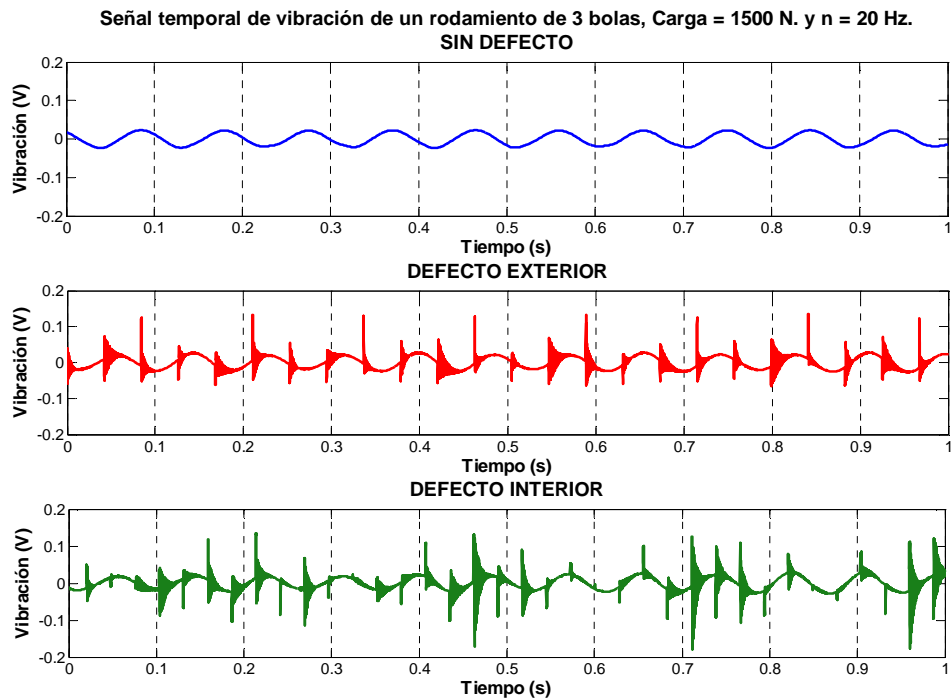


Figura 7.78 Señales temporales correspondientes a modelos de rodamientos con distintos defectos

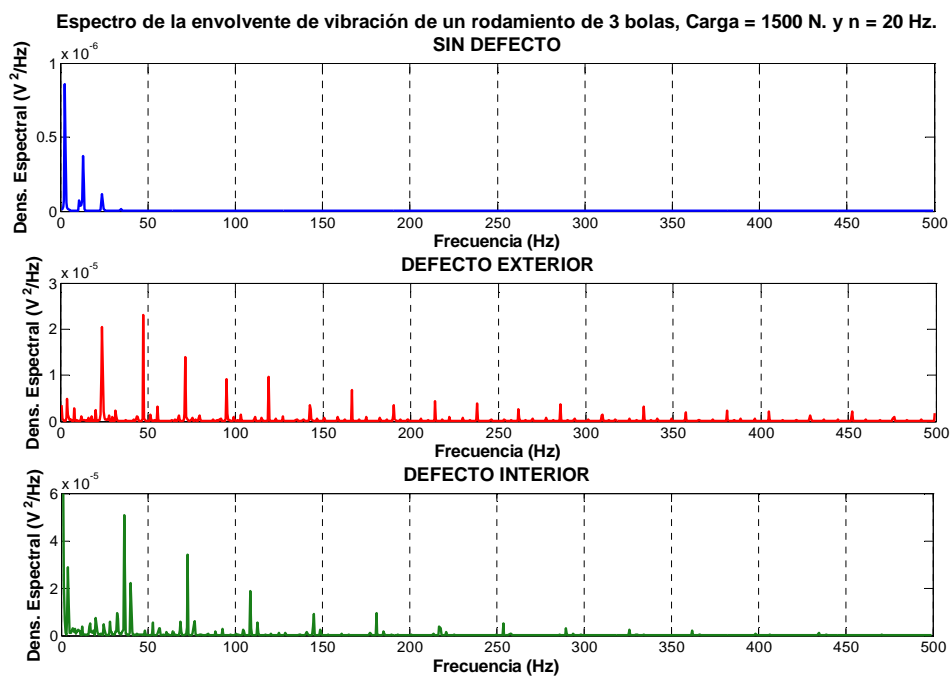


Figura 7.79 Espectros de las señales temporales representadas en la Figura 7.78

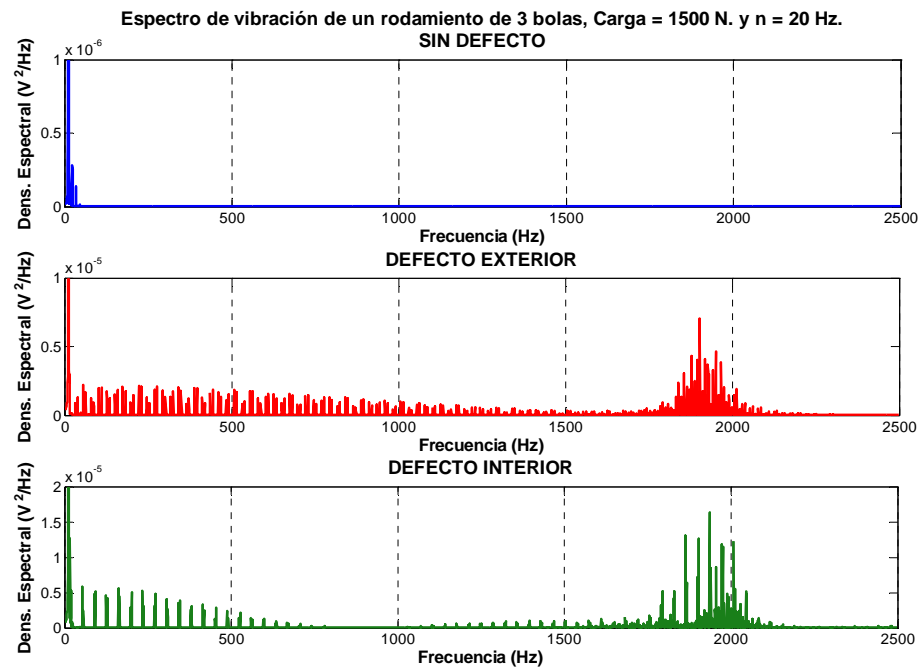


Figura 7.80 Espectros de las envolventes de las señales temporales representadas en la Figura 7.78

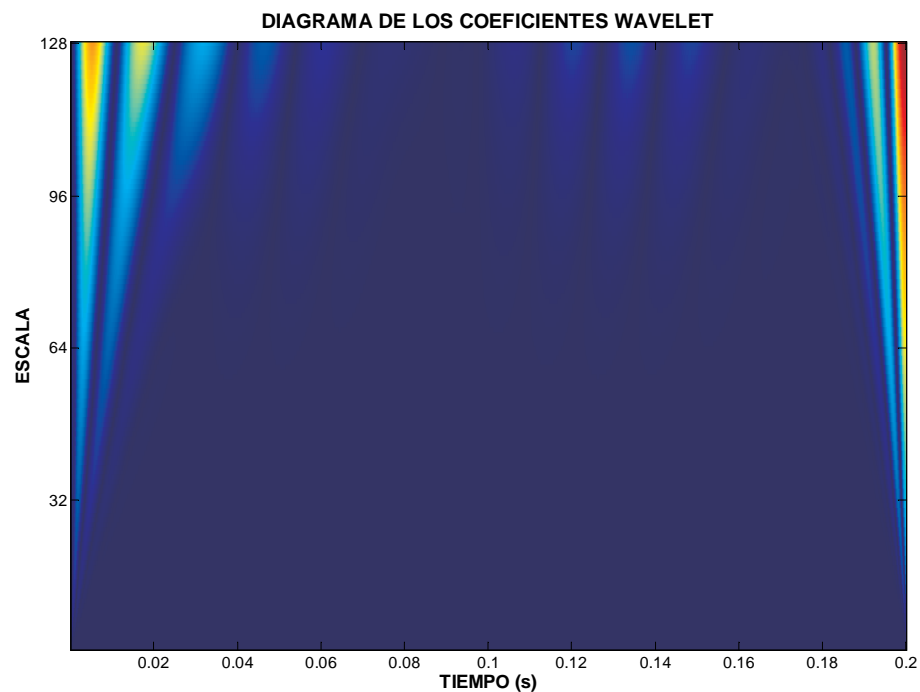


Figura 7.81 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.78 (Sin defecto)

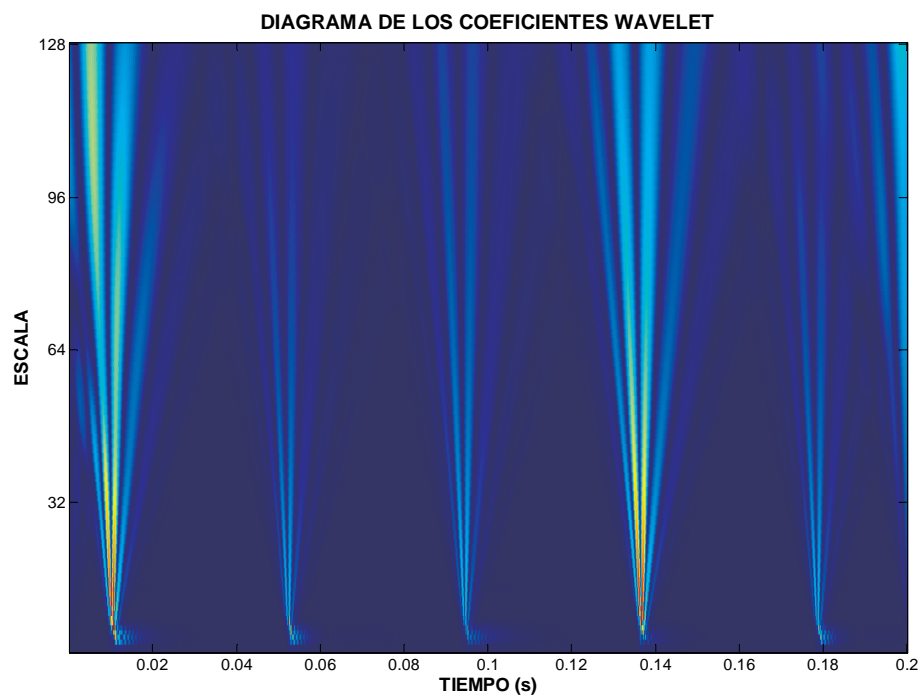


Figura 7.82 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.78 (Defecto en pista externa)

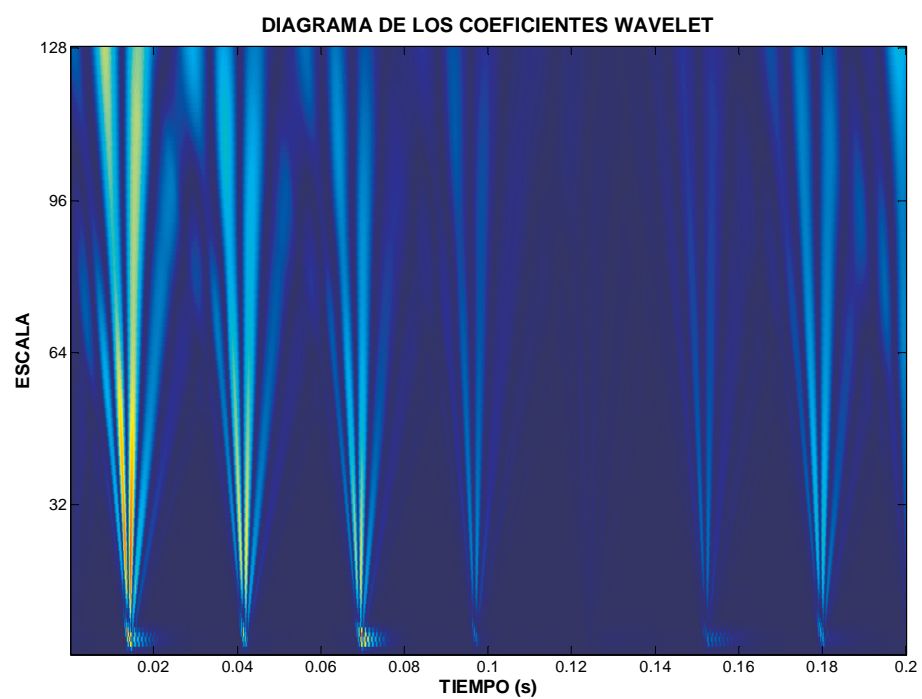


Figura 7.83 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.78 (Defecto en pista interna)

7.3.7. Análisis comparativo de la aparición de defecto en el rodamiento. Modelo de 11 GDL.

De la señal temporal Figura 7.84, se observa que cuando aparecen los defectos se aprecian picos de tipo impulsivo, al igual que ocurría en el modelo de 5 GDL, pero con una mayor frecuencia. En el caso de defecto en el anillo externo, estos son también muy repetitivos tanto en la secuencia de aparición como en la magnitud. En el caso de defecto en el anillo interno, la amplitud de los picos de defecto fluctúa de acuerdo con la carga presentando la modulación de amplitud que caracteriza al defecto en anillo interno. Hay que señalar que la posición del defecto en el anillo externo durante las simulaciones se encontraba, en todos los casos, en la zona de máxima carga.

En la Figura 7.85 se muestran el espectro de potencia de la señal temporal de la Figura 7.84. Se aprecia también en esta ocasión que aparece una frecuencia de resonancia alrededor de los 2 kHz. cuando existe defecto, tanto en anillo interno como en anillo externo, pero de la observación de la figura, no podemos cualificar ni cuantificar defecto alguno. Sin embargo, el espectro de la envolvente Figura 7.79, sí que muestra una representación donde se puede apreciar claramente las frecuencias características de defecto tanto en anillo externo como en anillo interno y varios armónicos.

En cuanto al análisis de los mapas wavelet, Figuras 7.87 a 7.89 cumplen los puntos descritos en el apartado anterior.

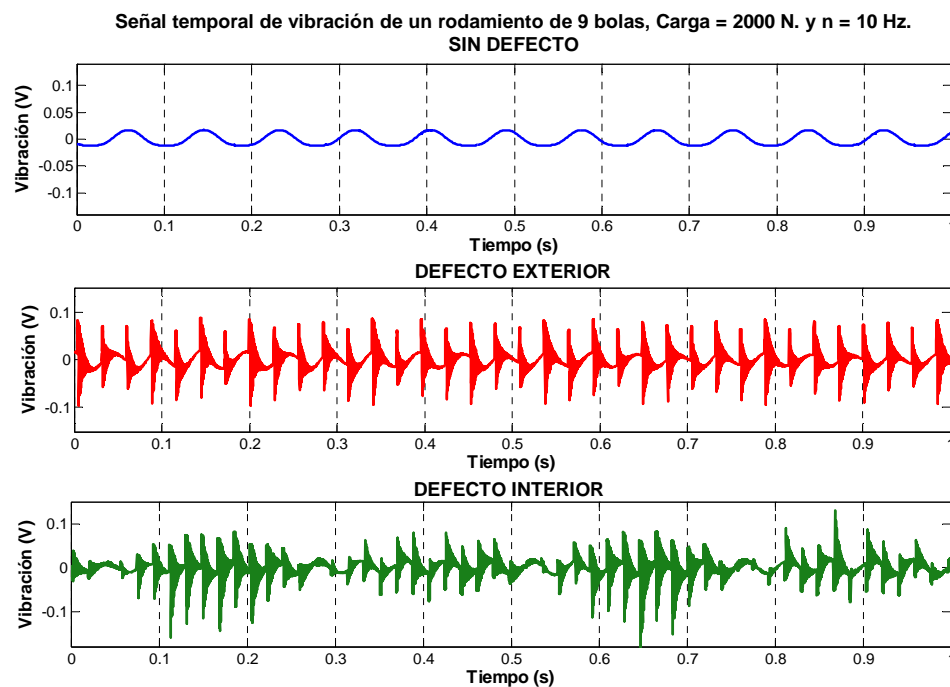


Figura 7.84 Señales temporales correspondientes a modelos de rodamientos con distintos defectos

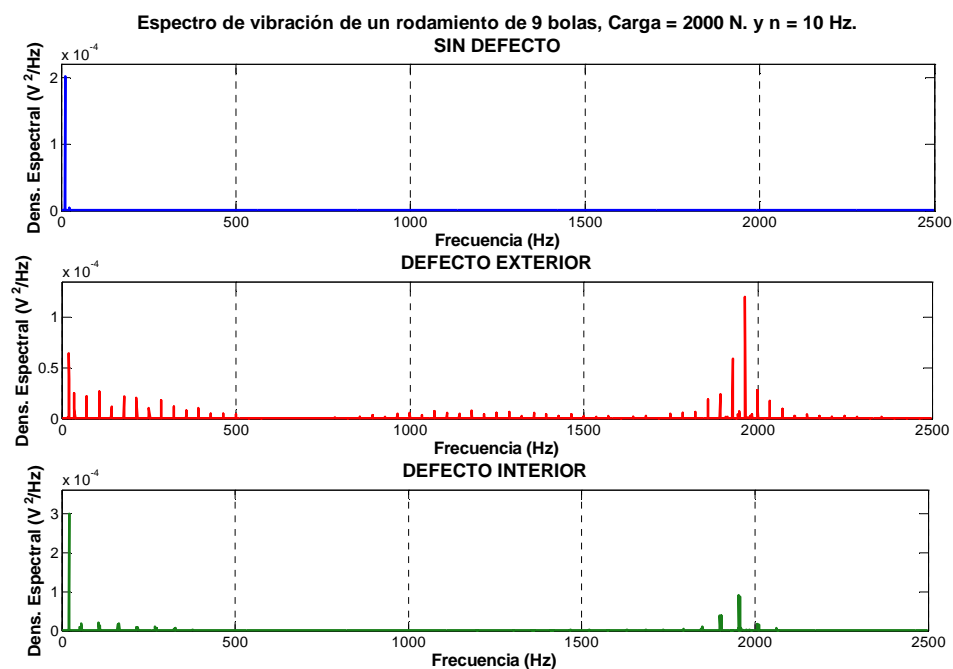


Figura 7.85 Espectros de las señales temporales representadas en la Figura 7.84

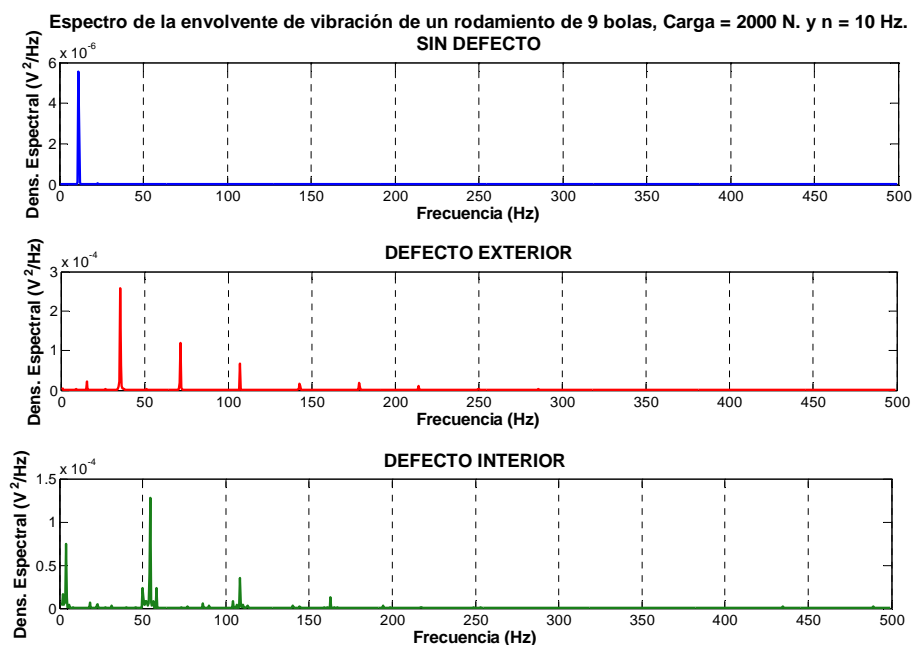


Figura 7.86 Espectros de las envolventes de las señales temporales representadas en la Figura 7.84

Respecto al análisis de los mapas wavelet solamente se aprecia que a medida que aumenta la velocidad angular, mayor es el número de picos en la parte baja de la escala (alta frecuencia).

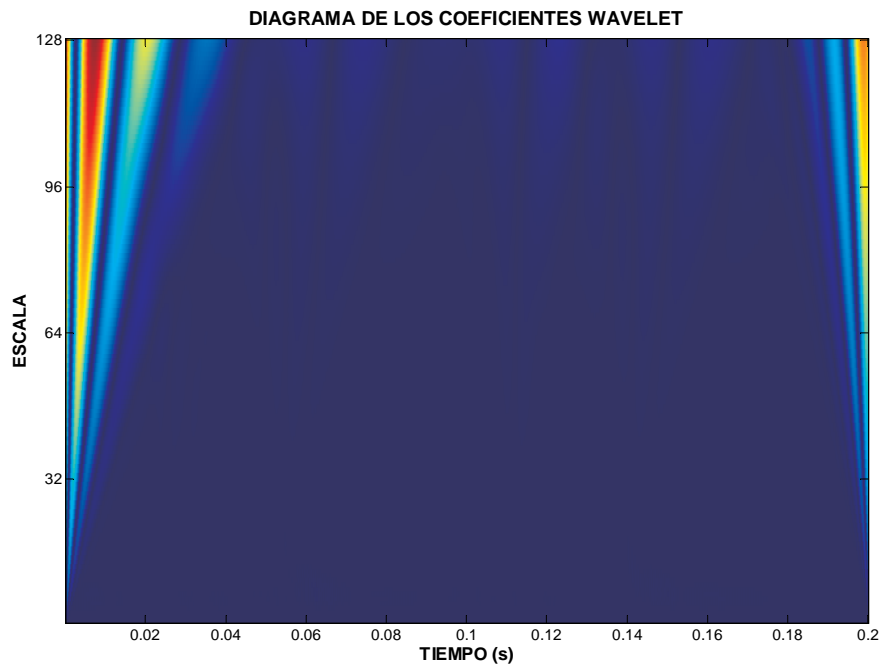


Figura 7.87 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.84 (Sin defecto)

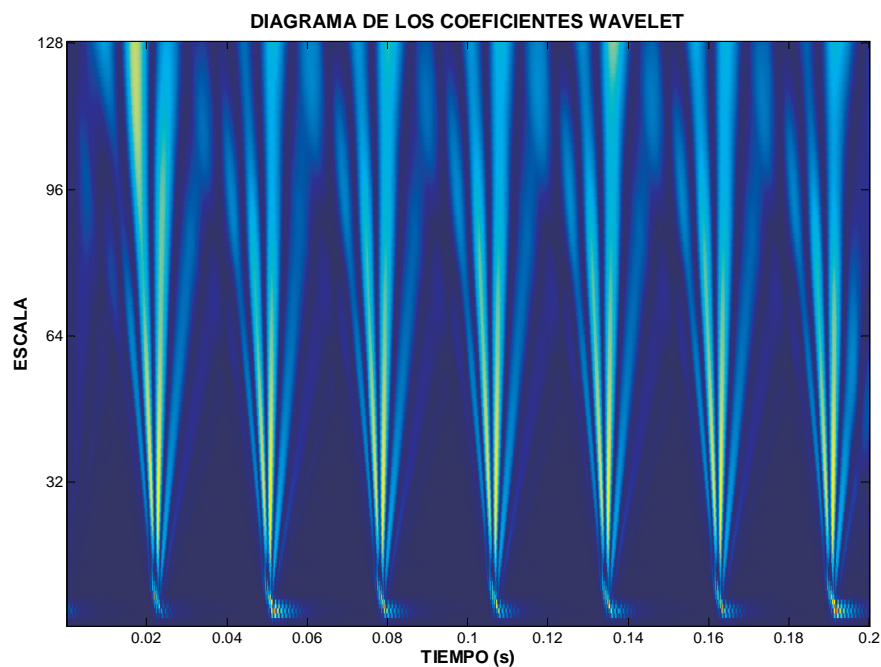


Figura 7.88 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.84 (Defecto en pista externa)

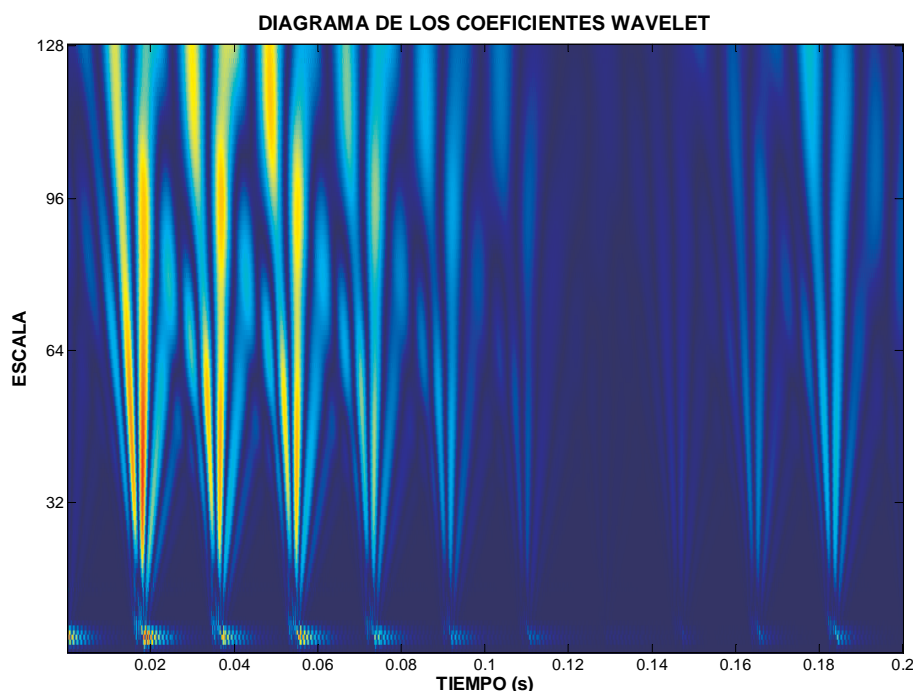


Figura 7.89 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.84 (Defecto en pista interna)

7.3.8. Modelo de rodamiento de 3 bolas con presencia de defecto en la pista interior y la pista exterior para varias velocidades

En presencia de defecto, la carga influye muy poco en los parámetros de la señal. Respecto a la velocidad de giro, si que influye claramente en la señal. Si tomamos como por ejemplo como evoluciona la señal temporal en un modelo de 5 GDL, con defecto en el anillo interno, cargado con 3000 N., Figura 7.90, observamos como a medida que aumenta la velocidad de giro, aumenta la frecuencia de aparición de picos de tipo impulsivo y también aumenta la magnitud de los mismos.

Respecto a la evolución del espectro de potencia Figura 7.91 de las señales temporales mostradas en la Figura 7.90, puede apreciarse que según aumenta la velocidad de giro, cada vez adquiere mayor valor los armónicos de mayor frecuencia en los casos de 30 y 40 Hz.

Respecto a los espectros de la envolvente, Figura 7.92, de la señal temporal Figura 7.90, según aumenta la velocidad de giro, aumenta el valor de la amplitud del armónico principal de la frecuencia de fallo. Fenómenos similares ocurren en el modelo de rodamiento de 9 bolas, donde cabe mencionar únicamente que la frecuencia de aparición de los picos de defecto aumenta.

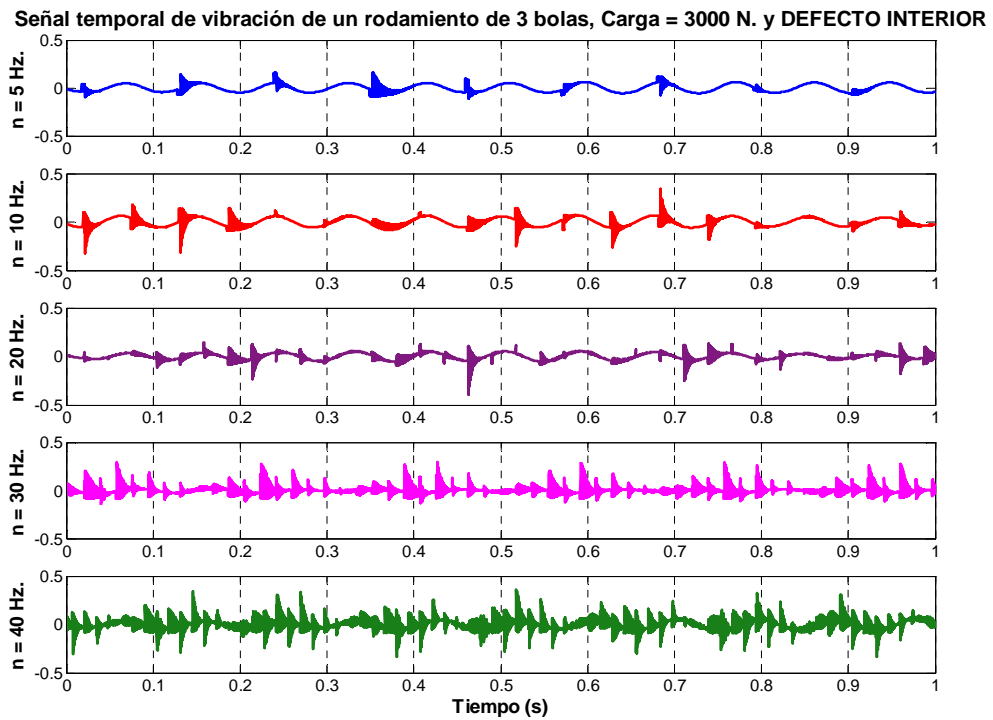


Figura 7.90 Señales temporales de un modelo de rodamiento de tres bolas.

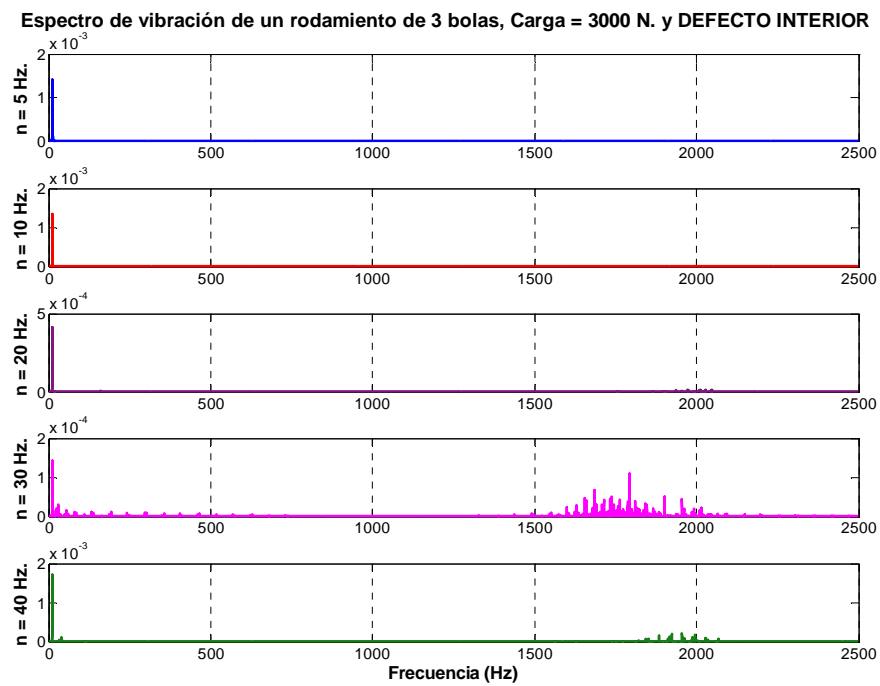
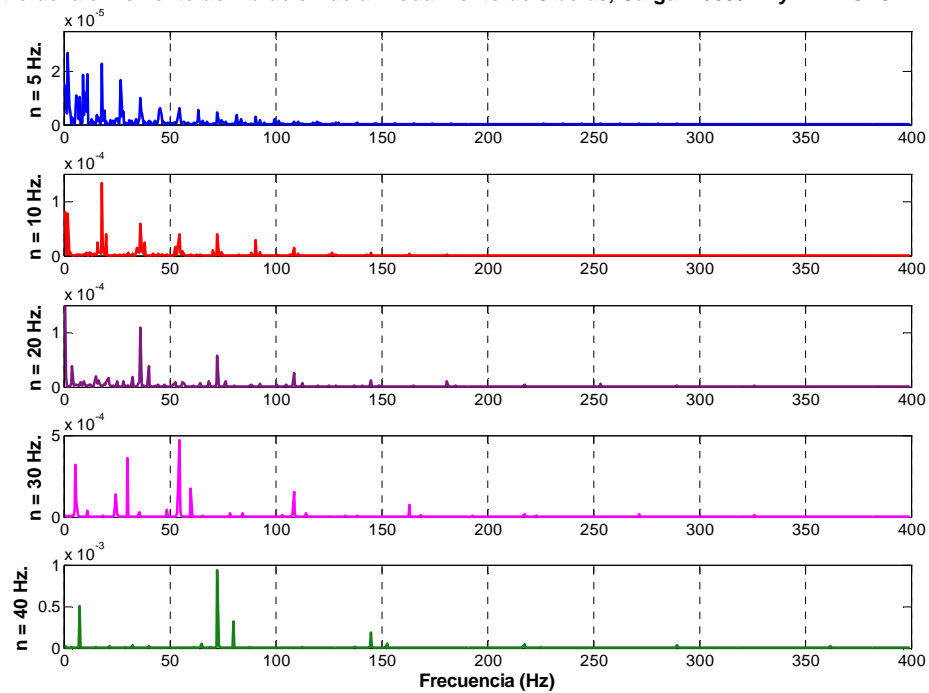
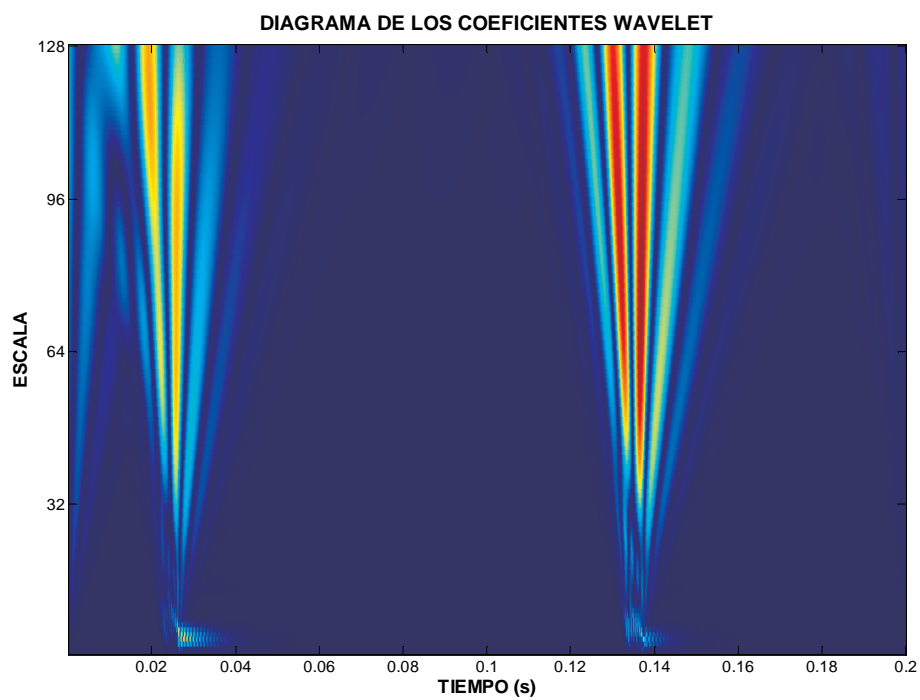


Figura 7.91 Espectros de las señales temporales representadas en la Figura 7.90

Espectro de la envolvente de vibración de un rodamiento de 3 bolas, Carga = 3000 N. y DEFECTO INTERIOR**Figura 7.92** Espectros de las envolventes de las señales temporales representadas en la Figura 7.90**Figura 7.93** Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.90 (300 r.p.m.)

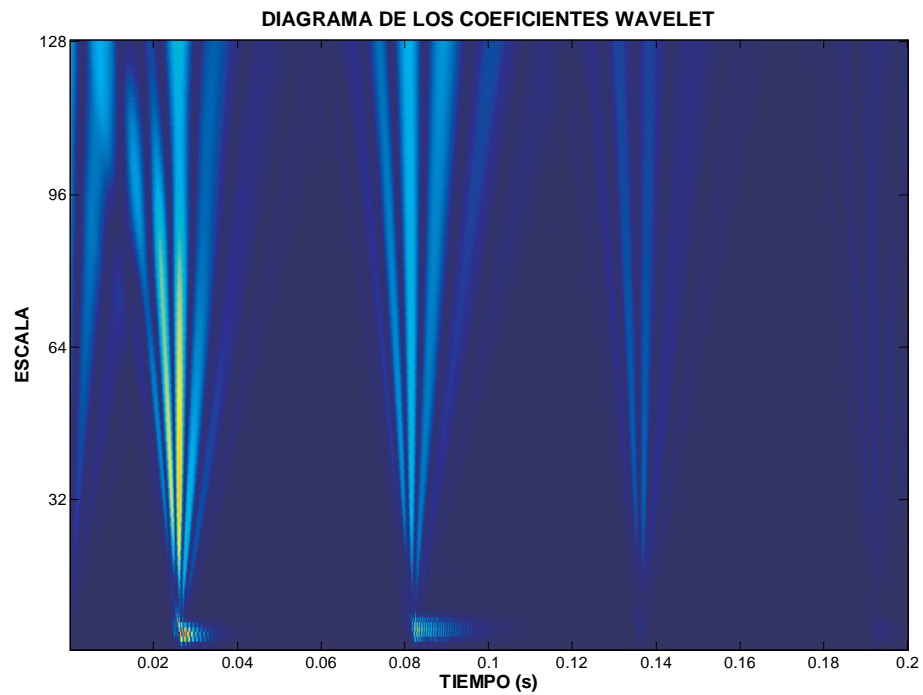


Figura 7.94 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.90 (600 r.p.m.)

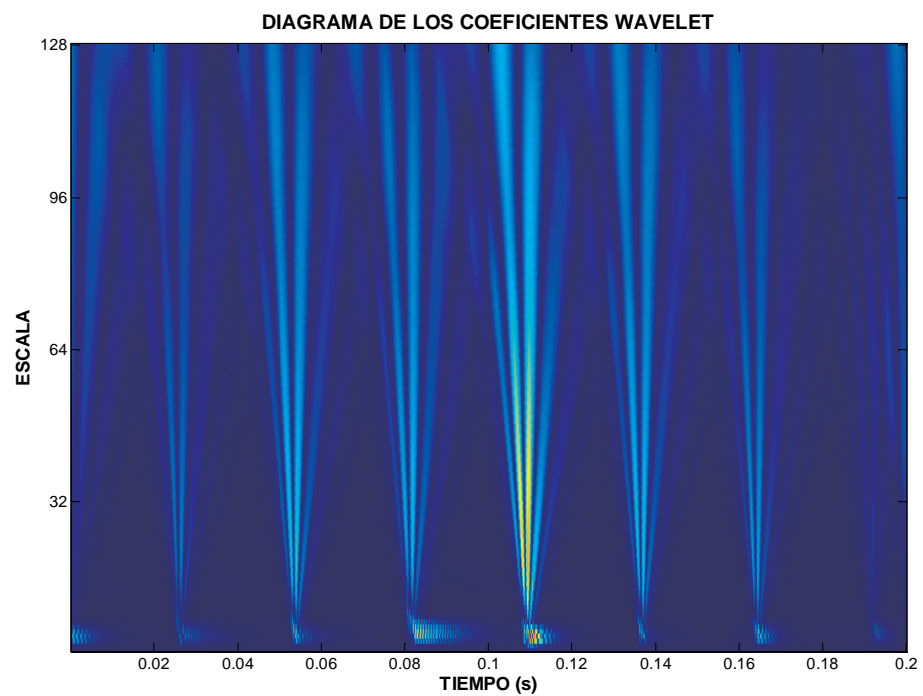


Figura 7.95 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.90 (1200 r.p.m.)

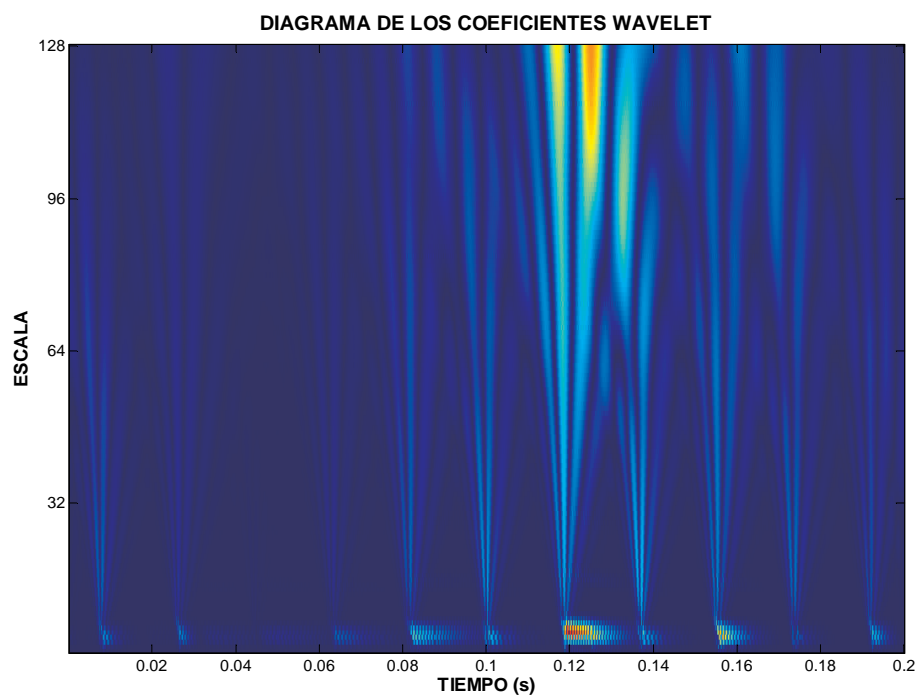


Figura 7.96 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.90 (1800 r.p.m.)

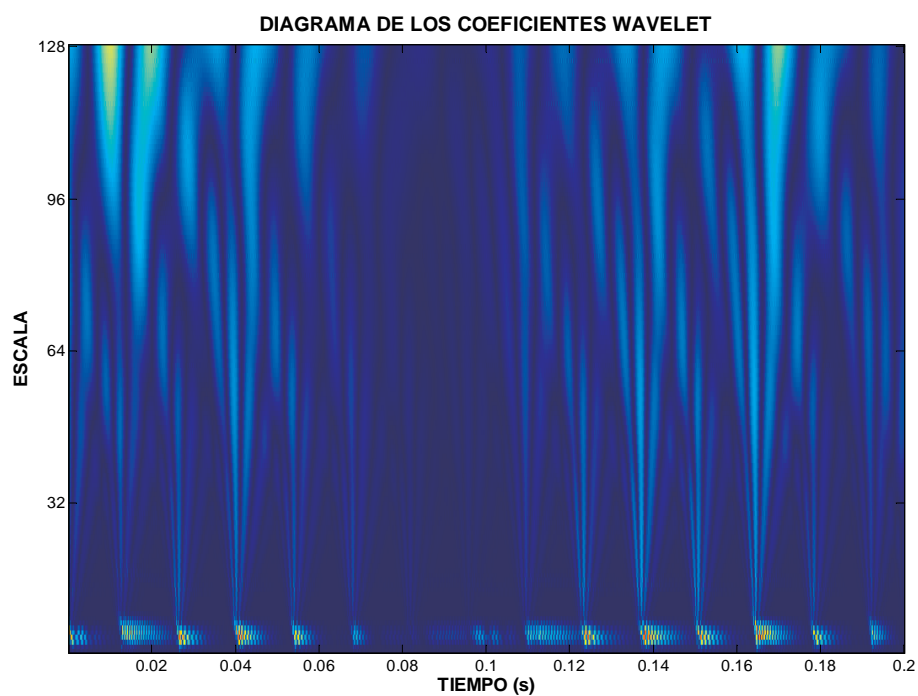


Figura 7.97 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.90 (2400 r.p.m.)

Señal temporal de vibración de un rodamiento de 3 bolas, Carga = 3000 N. y DEFECTO EXTERIOR

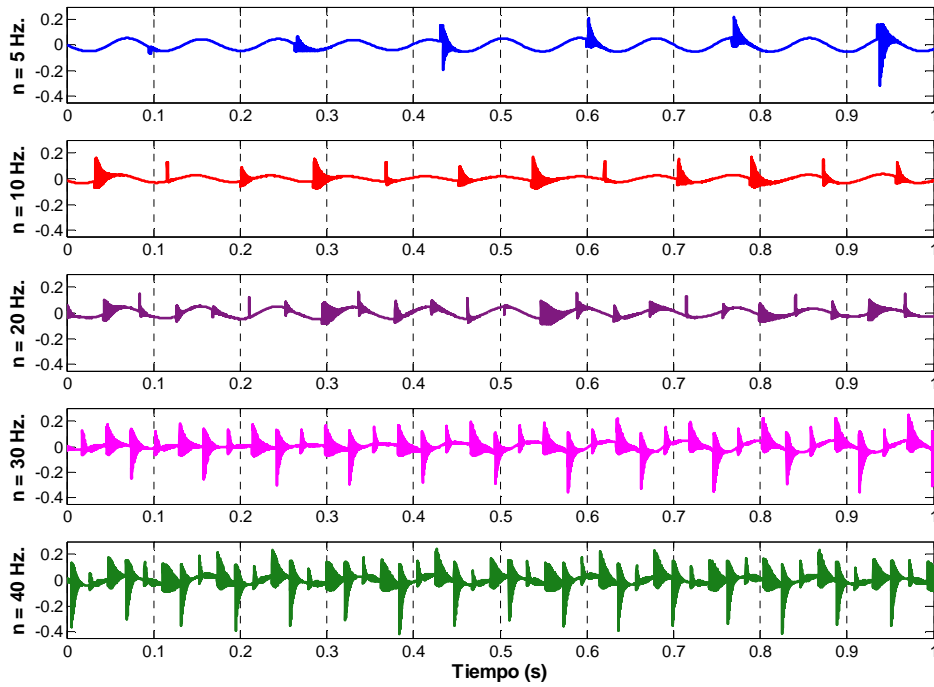


Figura 7.98 Señales temporales de un modelo de rodamiento de tres bolas, con defecto en la pista externa, girando a distintas velocidades

Espectro de vibración de un rodamiento de 3 bolas, Carga = 3000 N. y DEFECTO EXTERIOR

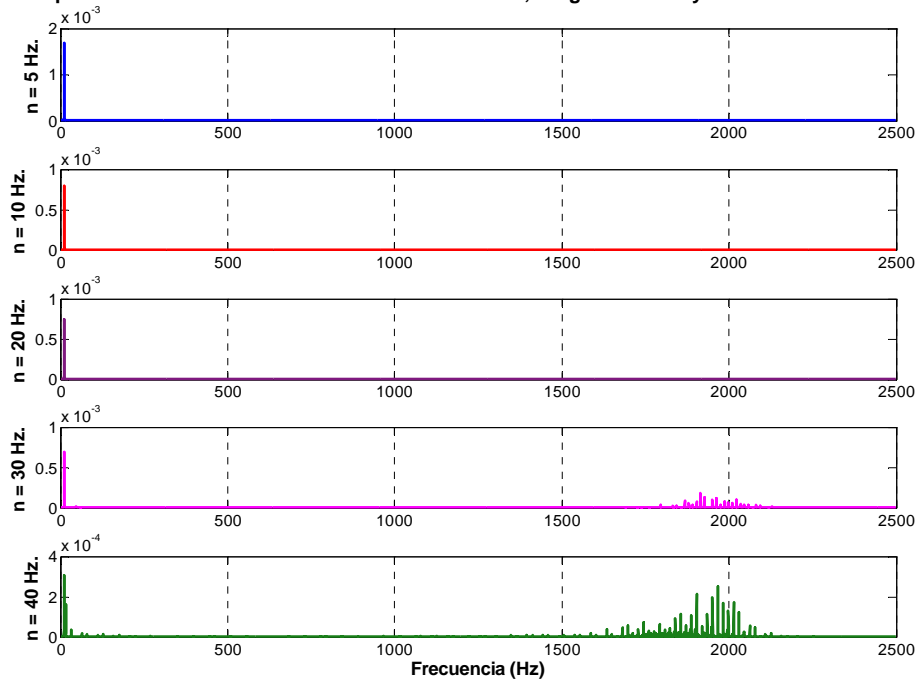
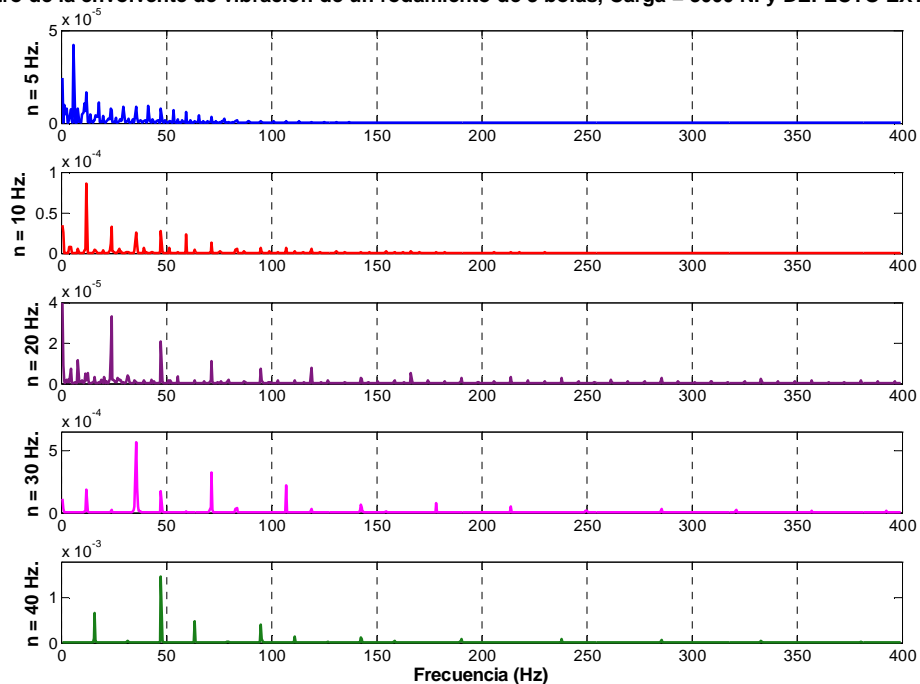
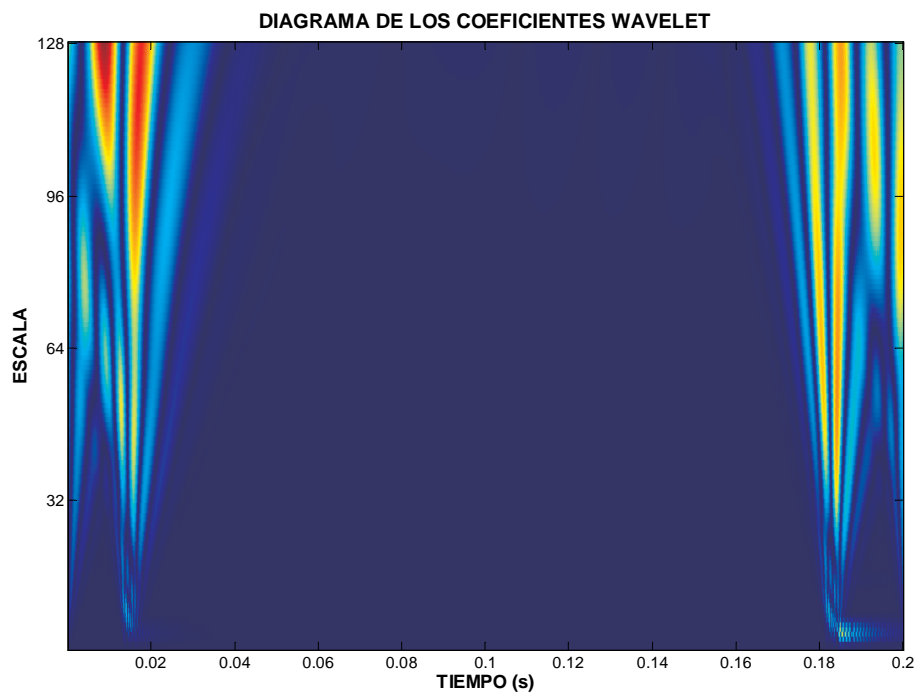


Figura 7.99 Espectros de las señales temporales representadas en la Figura 7.98

Espectro de la envolvente de vibración de un rodamiento de 3 bolas, Carga = 3000 N. y DEFECTO EXTERIOR

**Figura 7.100** Espectros de las envolventes de las señales temporales representadas en la Figura 7.98**Figura 7.101** Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.98 (300 r.p.m.)

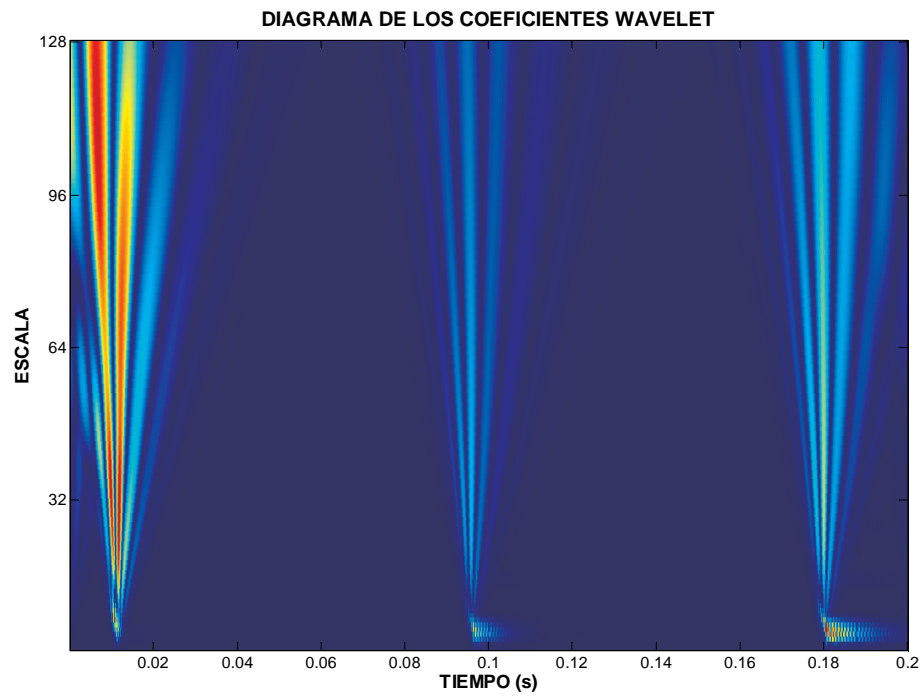


Figura 7.102 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.98 (600 r.p.m.)

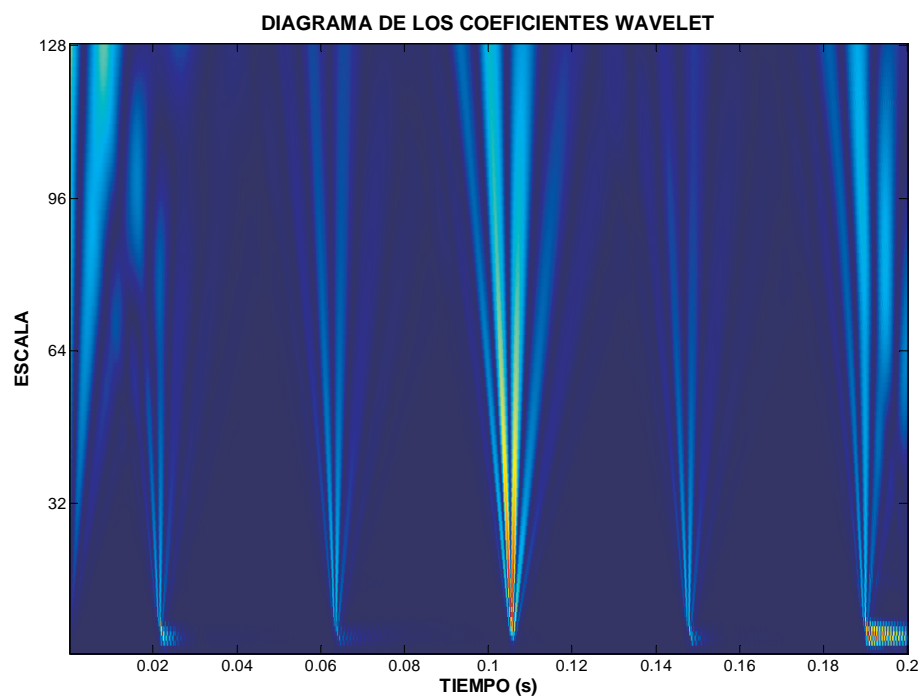


Figura 7.103 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.98 (1200 r.p.m.)

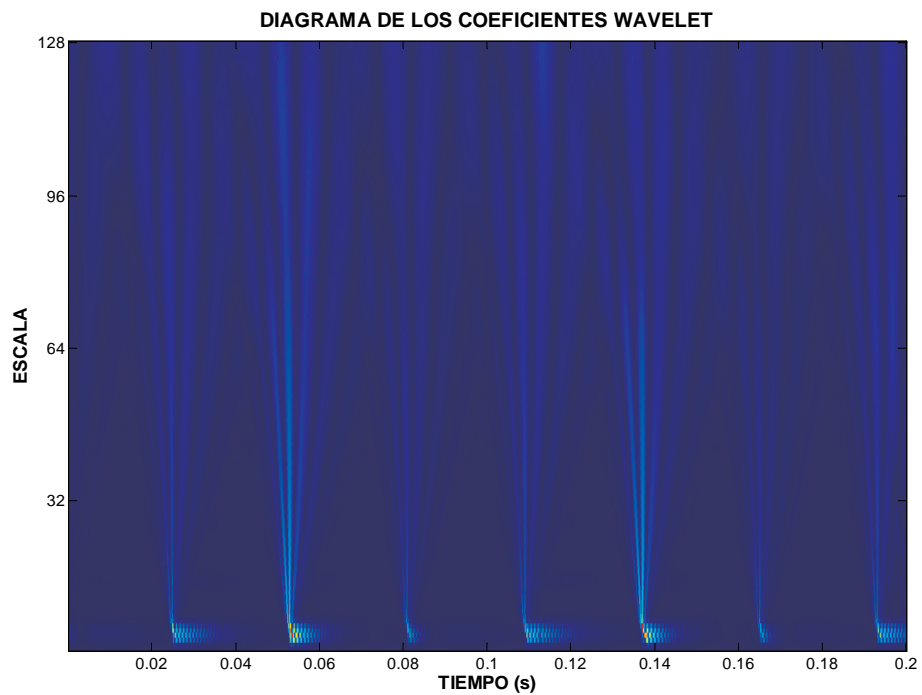


Figura 7.104 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.98 (1800 r.p.m.)

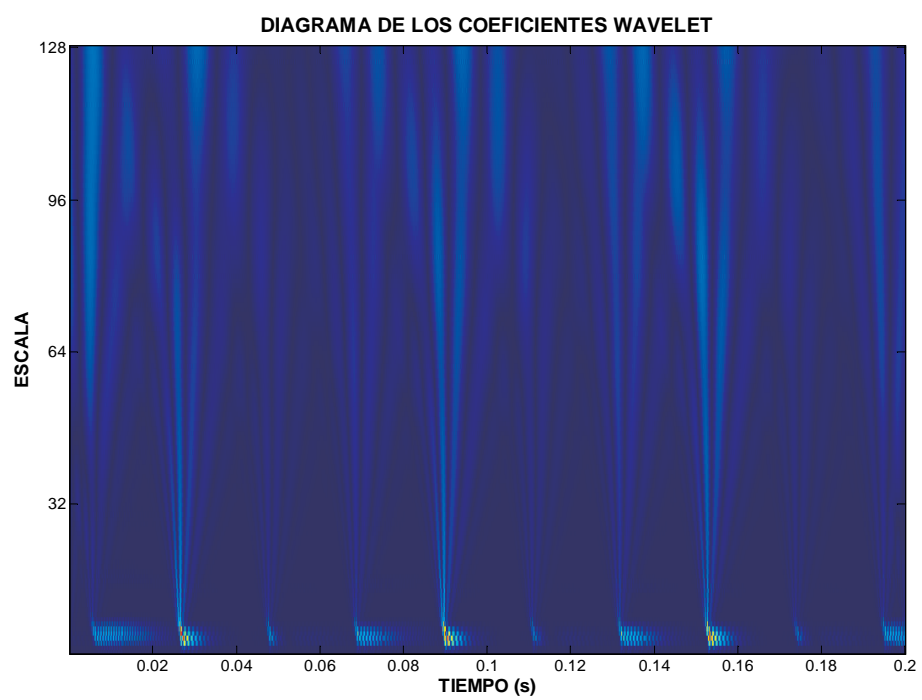


Figura 7.105 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.98 (2400 r.p.m.)

7.3.9. Modelo de rodamiento de 9 bolas con presencia de defecto en la pista interior y la pista exterior, para varias velocidades

Señal temporal de vibración de un rodamiento de 9 bolas, Carga = 3000 N. y DEFECTO INTERIOR

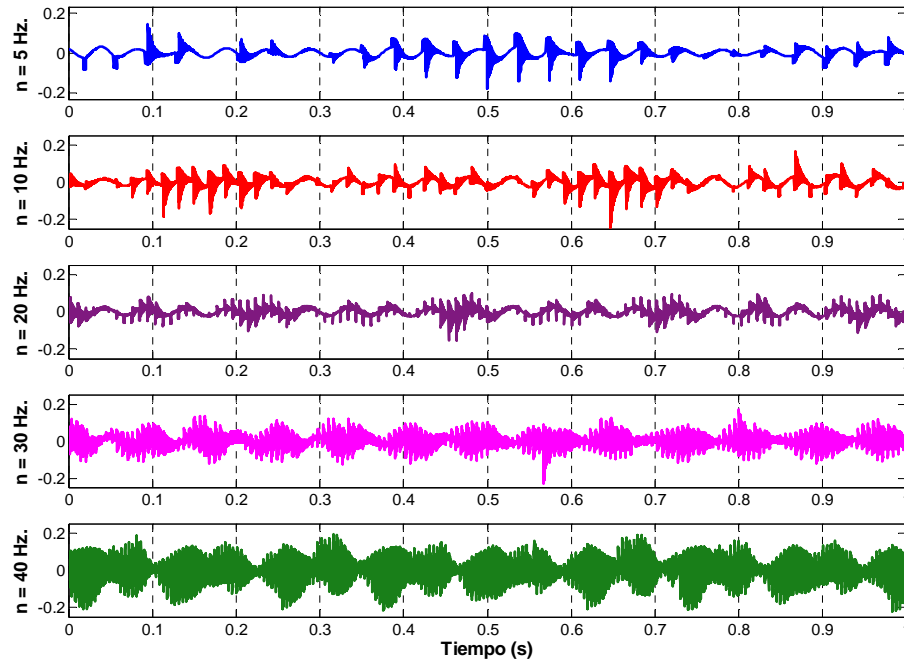


Figura 7.106 Señales temporales de un modelo de rodamiento de nueve bolas

Espectro de vibración de un rodamiento de 9 bolas, Carga = 3000 N. y DEFECTO INTERIOR

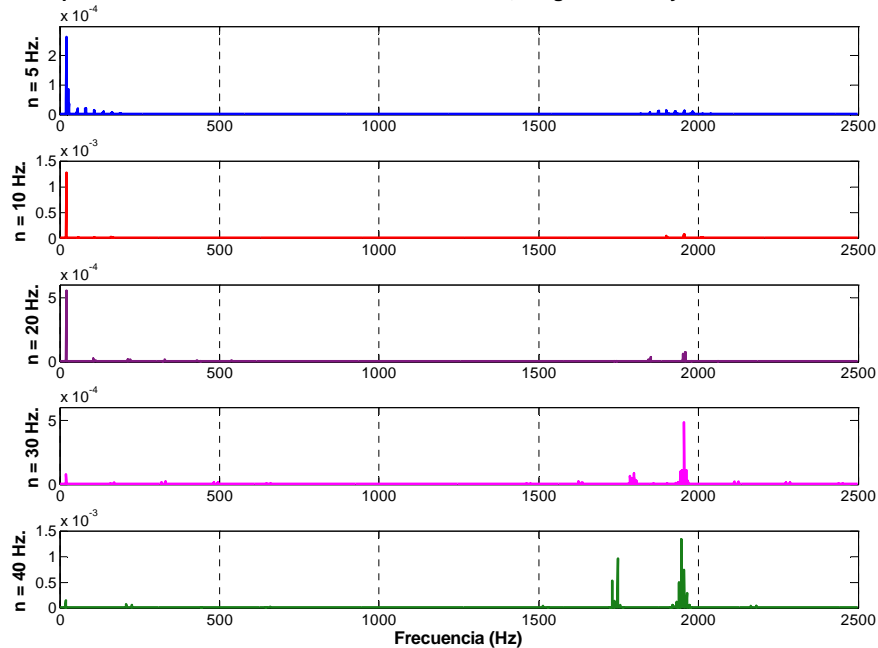
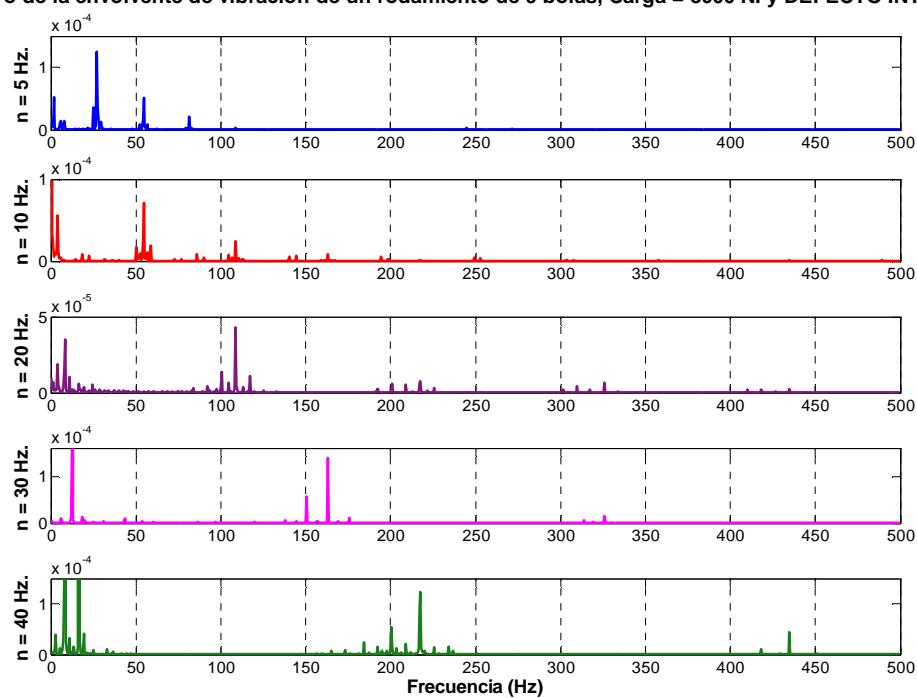
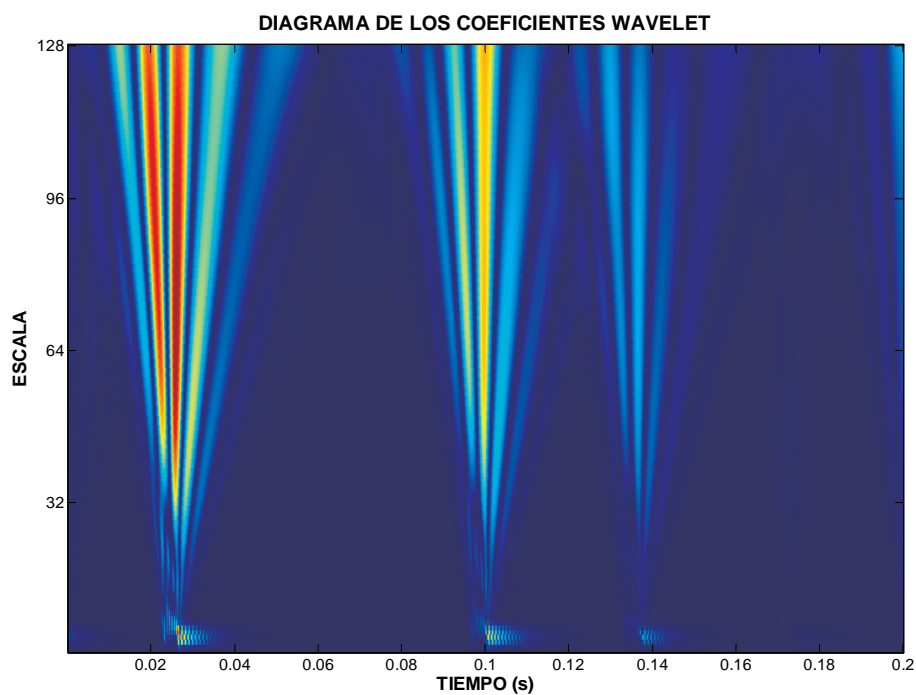


Figura 7.107 Espectros de las señales temporales representada en la Figura 7.106

Espectro de la envolvente de vibración de un rodamiento de 9 bolas, Carga = 3000 N. y DEFECTO INTERIOR**Figura 7.108** Espectros de las envolventes de las señales temporales Espectros de las señales temporales representada en la Figura 7.106**Figura 7.109** Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.106 (300 r.p.m.)

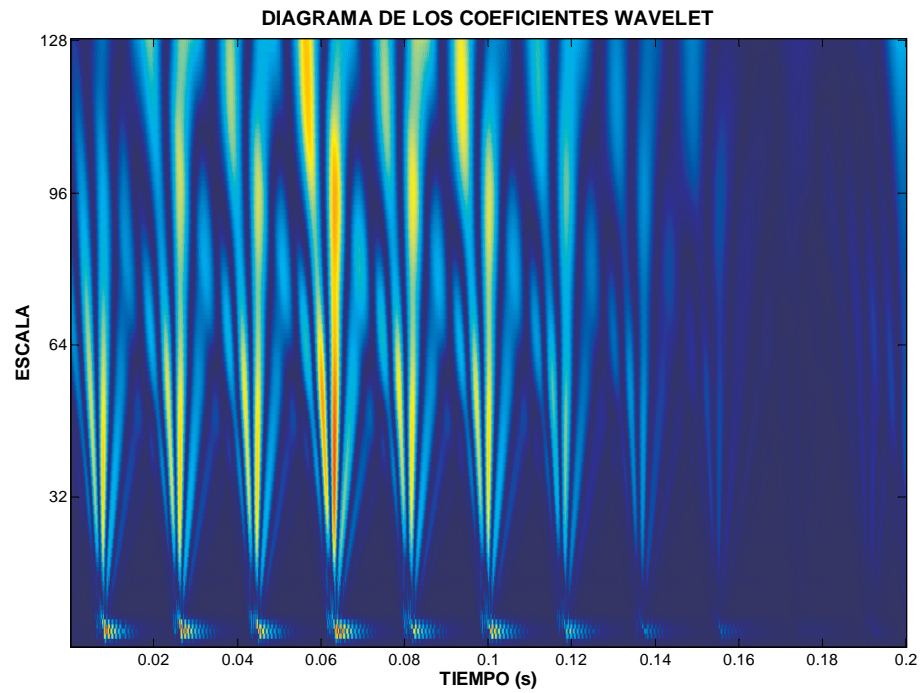


Figura 7.110 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.106 (600 r.p.m.)

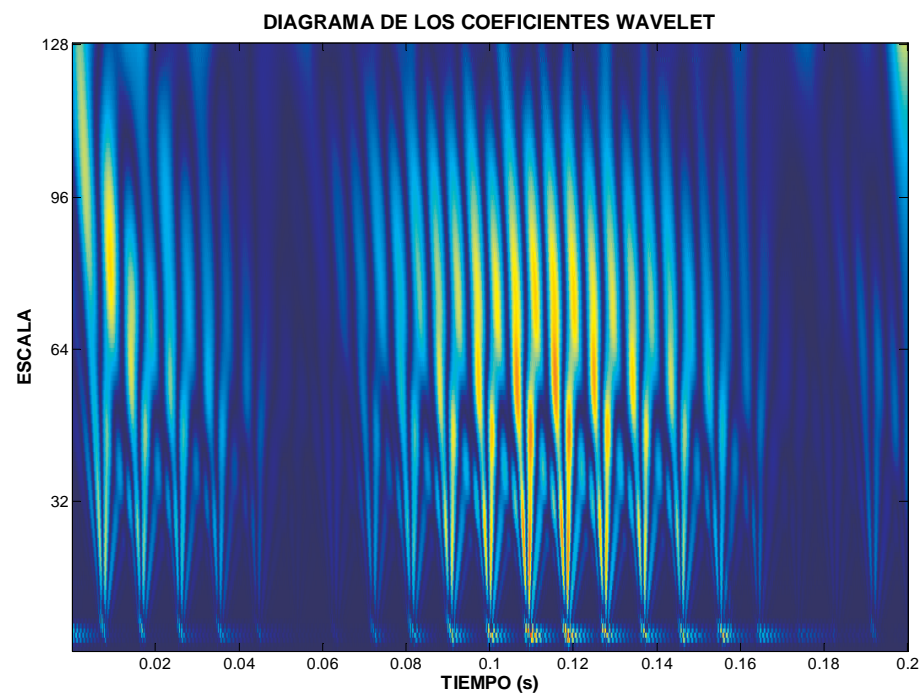


Figura 7.111 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.106 (1200 r.p.m.)

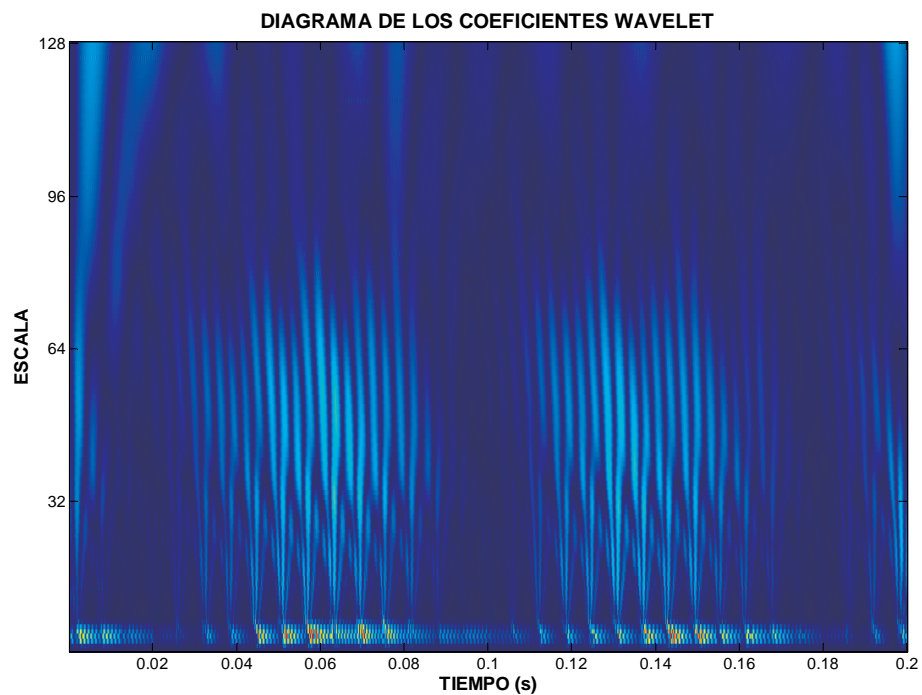


Figura 7.112 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.106 (1800 r.p.m.)

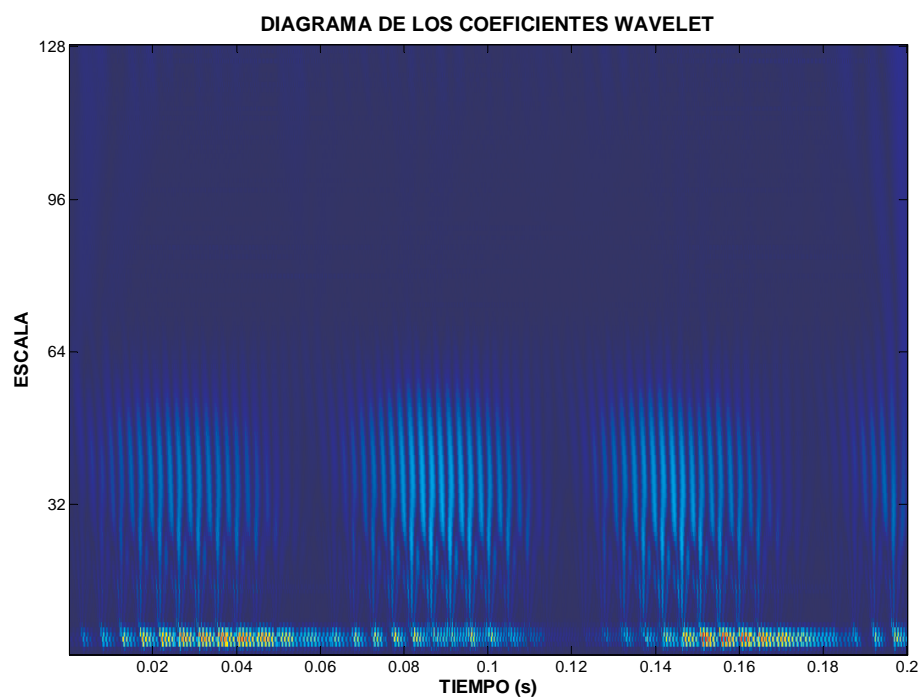


Figura 7.113 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.106 (2400 r.p.m.)

Señal temporal de vibración de un rodamiento de 9 bolas, Carga = 3000 N. y DEFECTO EXTERIOR

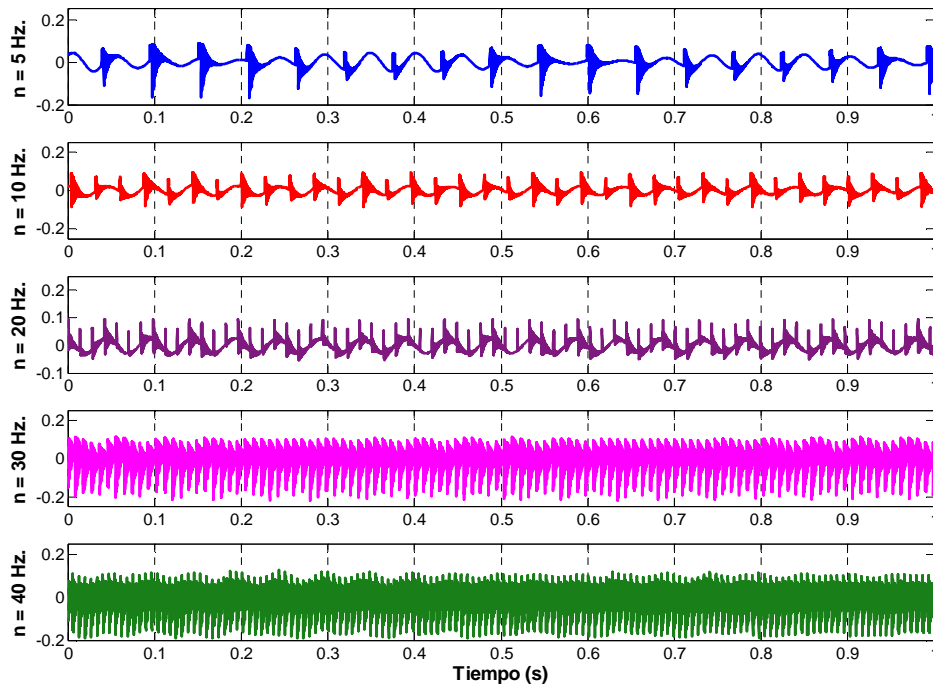


Figura 7.114 Señales temporales de un modelo de rodamiento de nueve bolas, con defecto en la pista externa, girando a distintas velocidades

Espectro de vibración de un rodamiento de 9 bolas, Carga = 3000 N. y DEFECTO EXTERIOR

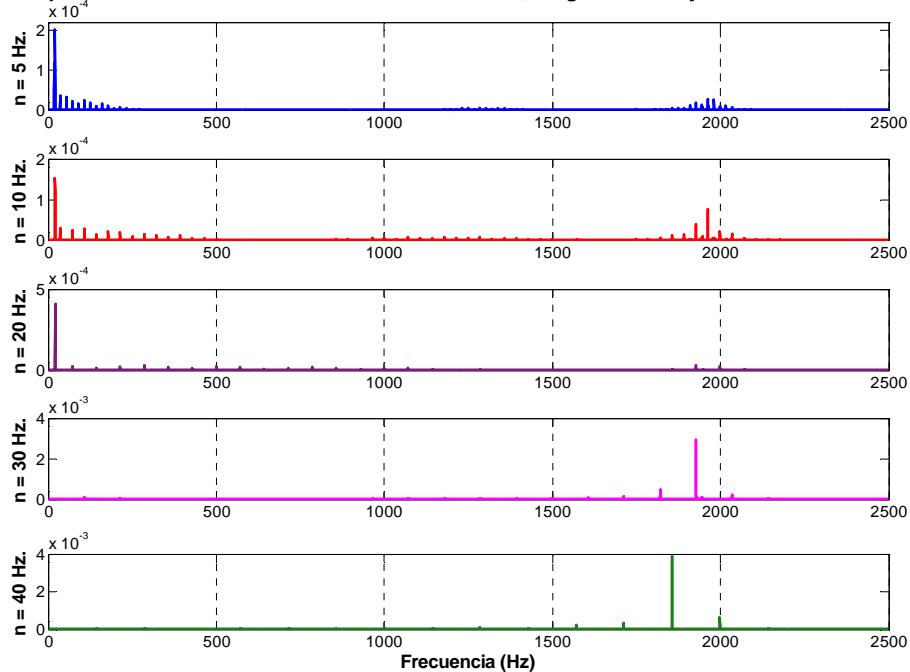
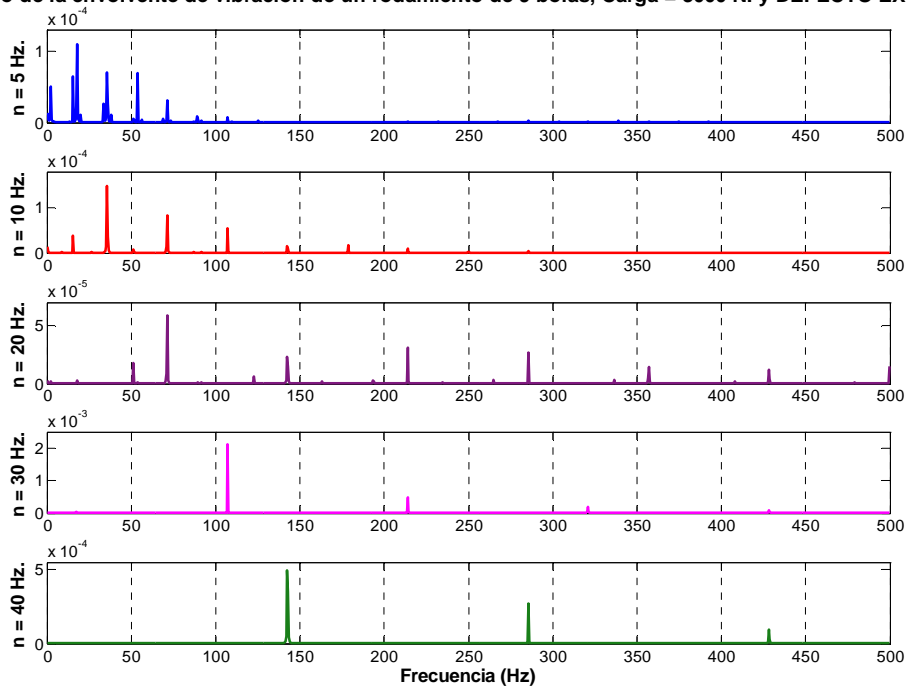
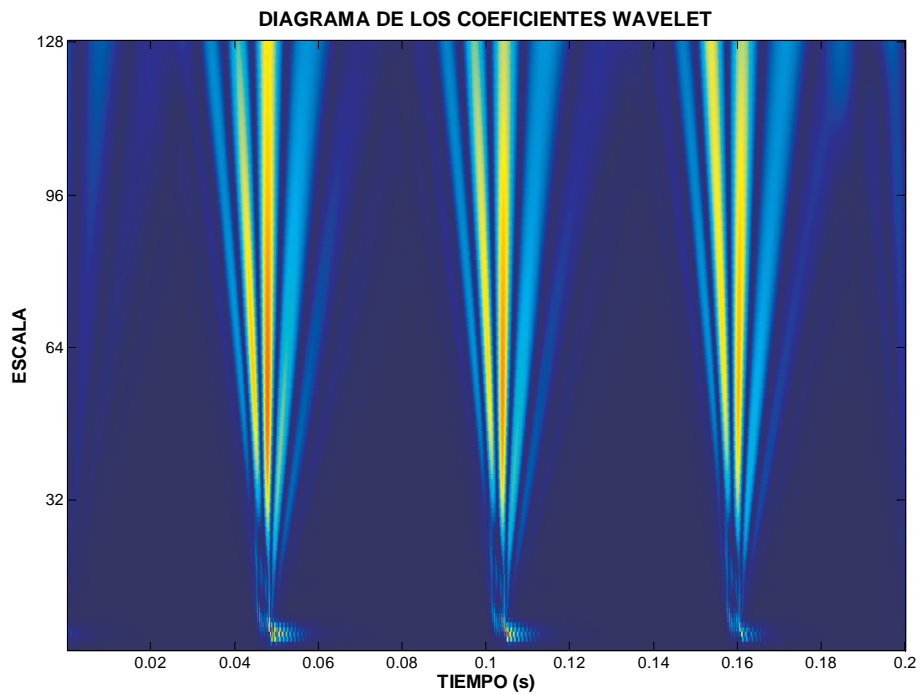


Figura 7.115 Espectros de las señales temporales representadas en la Figura 7.114

Espectro de la envolvente de vibración de un rodamiento de 9 bolas, Carga = 3000 N. y DEFECTO EXTERIOR

**Figura 7.116** Espectros de las envolventes de las señales temporales representadas en la Figura 7.114**Figura 7.117** Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.114 (300 r.p.m.)

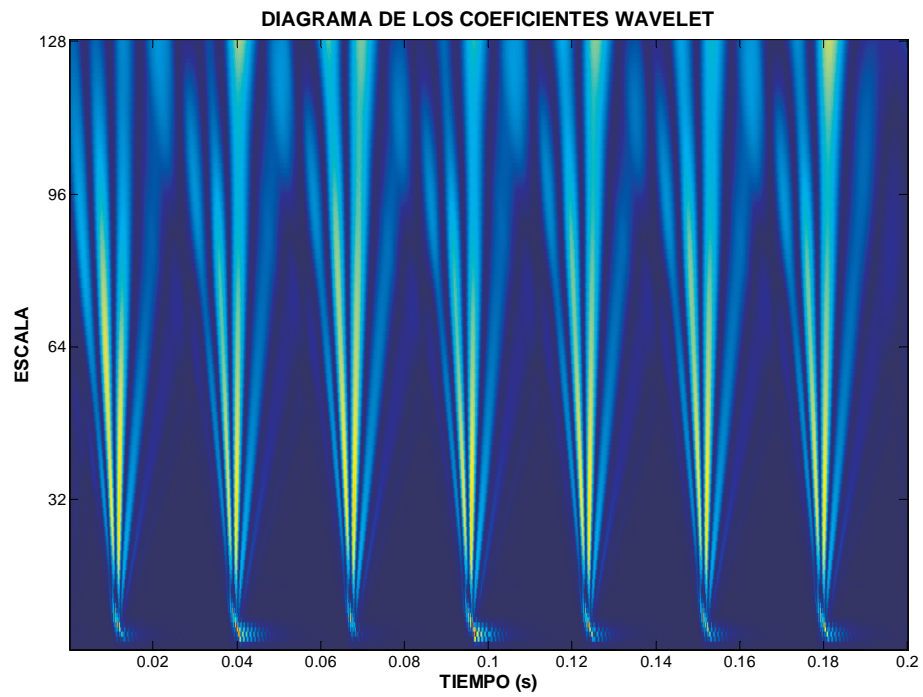


Figura 7.118 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.114 (600 r.p.m.)

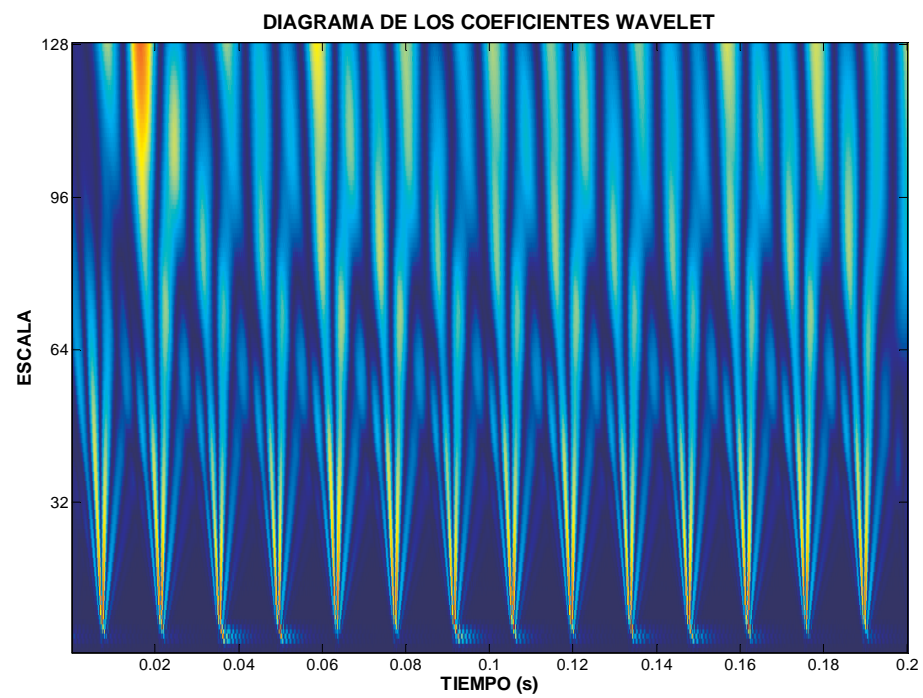


Figura 7.119 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.114 (1200 r.p.m.)

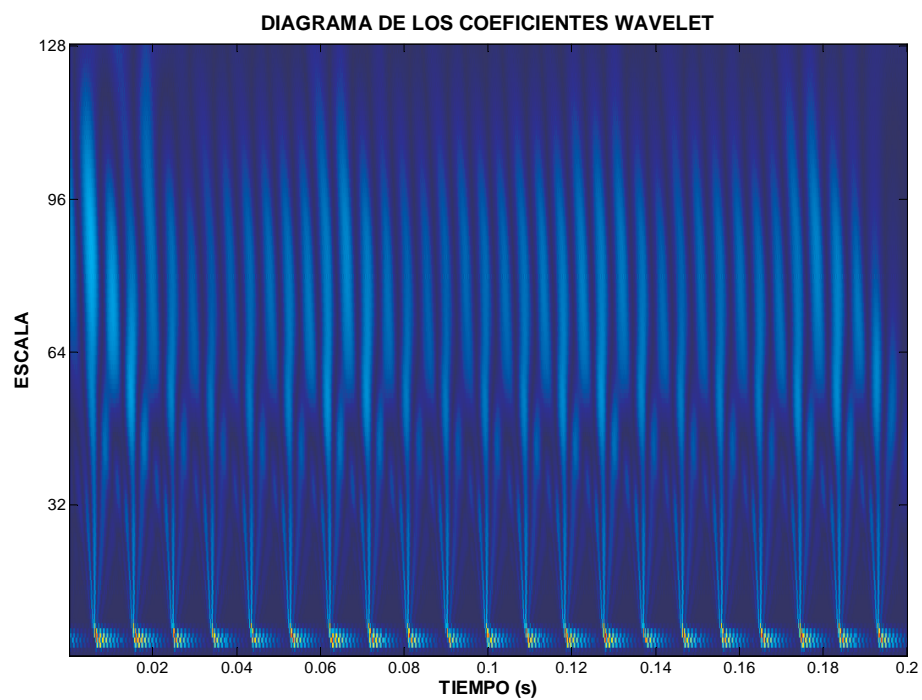


Figura 7.120 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.114 (1800 r.p.m.)

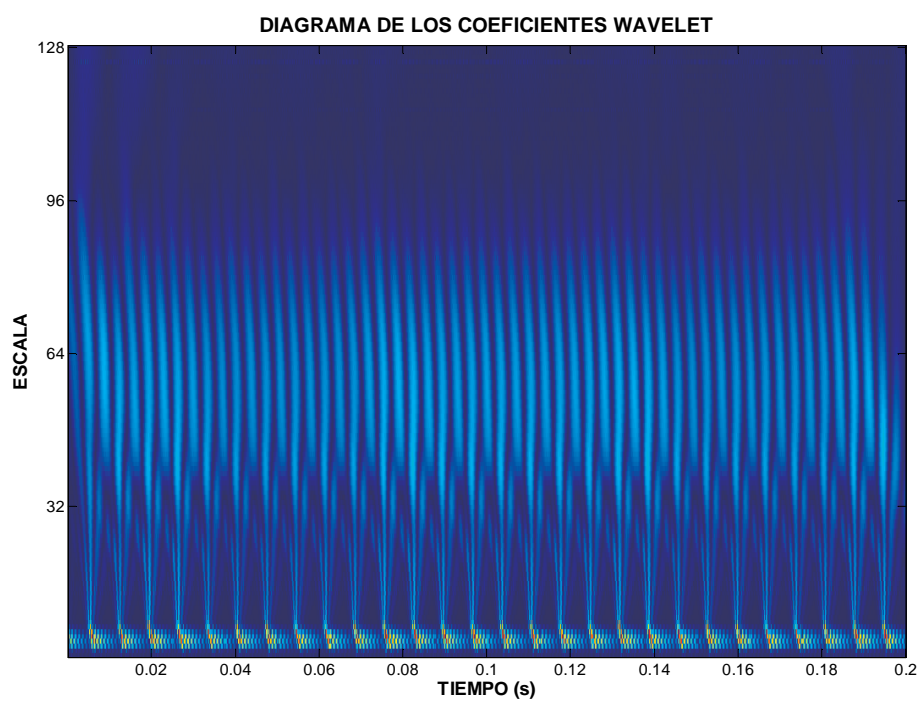


Figura 7.121 Mapa wavelet de la señal representada en la Figura 7.114 (2400 r.p.m.)

7.4. CONTRASTACIÓN ENTRE SEÑALES EXPERIMENTALES Y SEÑALES SIMULADAS

De los ficheros experimentales obtenidos y su contraste con los análogos simulados, presentamos dos casos típicos, uno utilizando un rodamiento con 3 bolas con un defecto en el anillo interno y otro con rodamiento de 9 bolas con defecto en anillo externo.

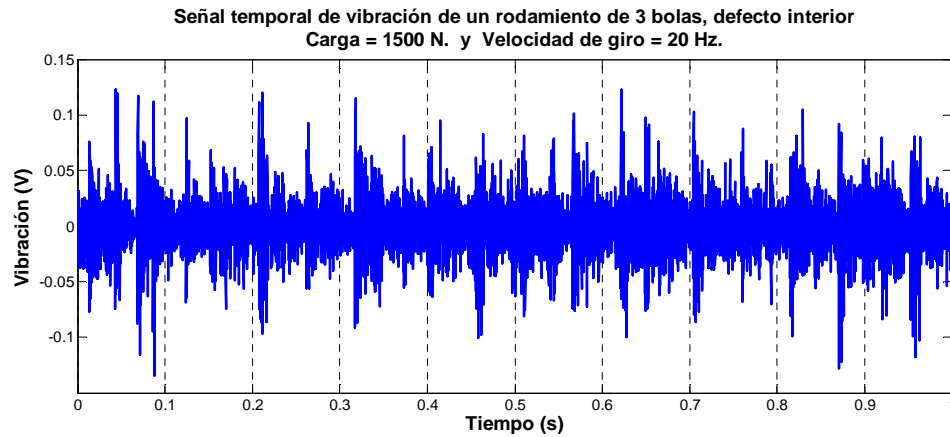


Figura 7.122 Señal temporal de un rodamiento SKF 6206 con 3 bolas y defecto en pista interna.

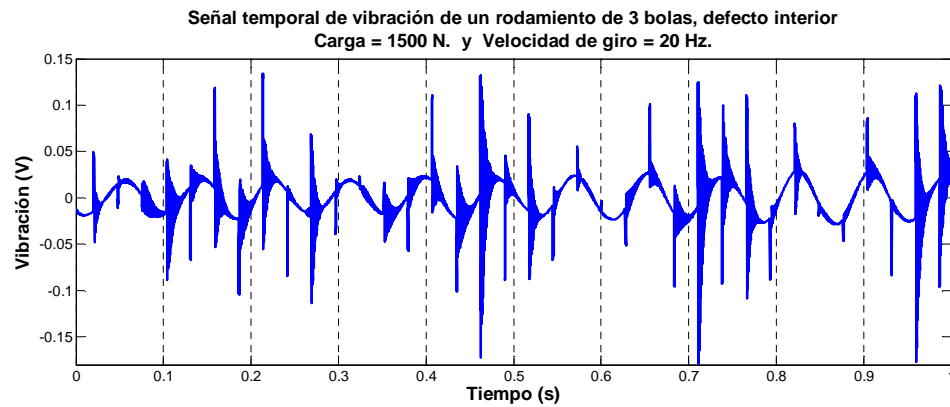


Figura 7.123 Señal temporal de un modelo de rodamiento con 3 bolas y defecto en pista interna

Las Figuras 7.122 y 7.123 representan las señales temporales experimental y simulada, respectivamente, correspondientes a un rodamiento SKF modificado con 3 bolas, con defecto en la pista interna sometido a las mismas condiciones de funcionamiento. Observando ambas figuras se aprecia que:

- Ambas señales presentan picos debido a los impactos de la bola sobre el anillo al paso por el defecto.
- En la señal correspondiente a simulación, se observa la modulación de amplitud de los picos de defecto característico de un defecto en anillo interno.

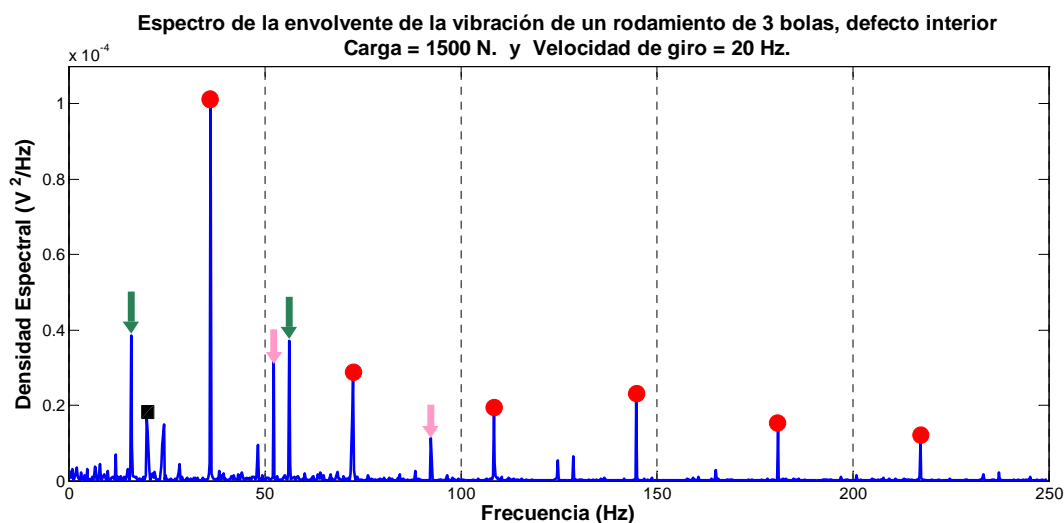


Figura 7.124 Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.122

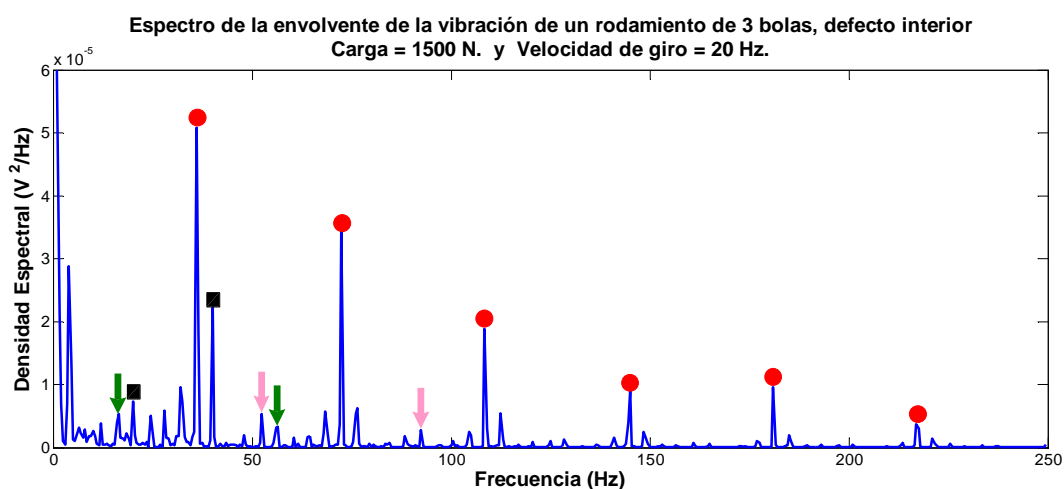


Figura 7.125 Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.123

El espectro de la envolvente de la señal temporal experimental (Figura 7.124) guarda una alta similitud con el espectro de la envolvente de la señal simulada (Figura 7.125). En ambas figuras pueden apreciarse con claridad los seis primeros armónicos de la frecuencia de defecto (puntos rojos).

También se observa en ambas el armónico principal de la frecuencia de giro (cuadrado negro) aunque en este caso, en la señal simulada se aprecia además el segundo armónico.

Por último, indicar la presencia de las bandas laterales (a la frecuencia de giro), características de un defecto en anillo interno, en el primer armónico de la frecuencia de fallo (flechas verdes) y en el segundo (flechas rosas).

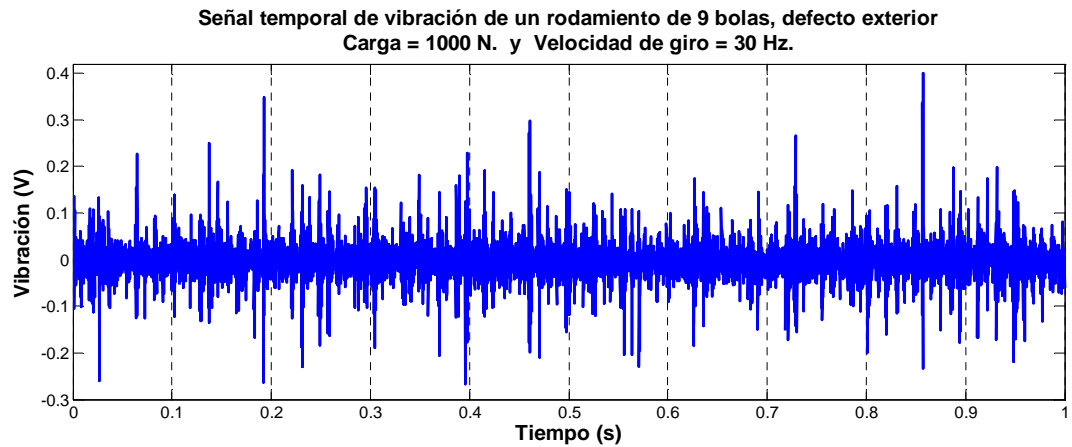


Figura 7.126 Señal temporal de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista externa.

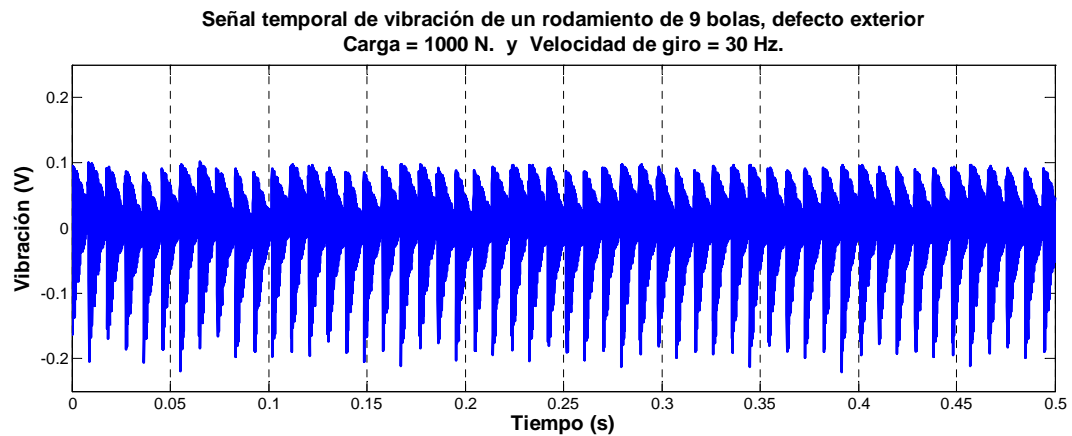


Figura 7.127 Señal temporal de un modelo de rodamiento con defecto en la pista externa, con 9 bolas.

Las Figuras 7.126 y 7.127 representan las señales temporales experimental y simulada, respectivamente, correspondientes a un rodamiento SKF 6206, con defecto en la pista externa.

Ambas señales presentan picos originados por un defecto en el rodamiento.

En la señal simulada (Figura 7.127) se aprecia una alta regularidad de los picos y de ello se deduce que el defecto se encuentra en el anillo externo. La señal experimental (Figura 7.126) se halla muy influenciada por vibraciones o ruidos externos al propio rodamiento y de la observación de la misma es fácil deducir que hay defecto pero no es tan sencillo deducir el tipo de defecto que tiene el rodamiento.

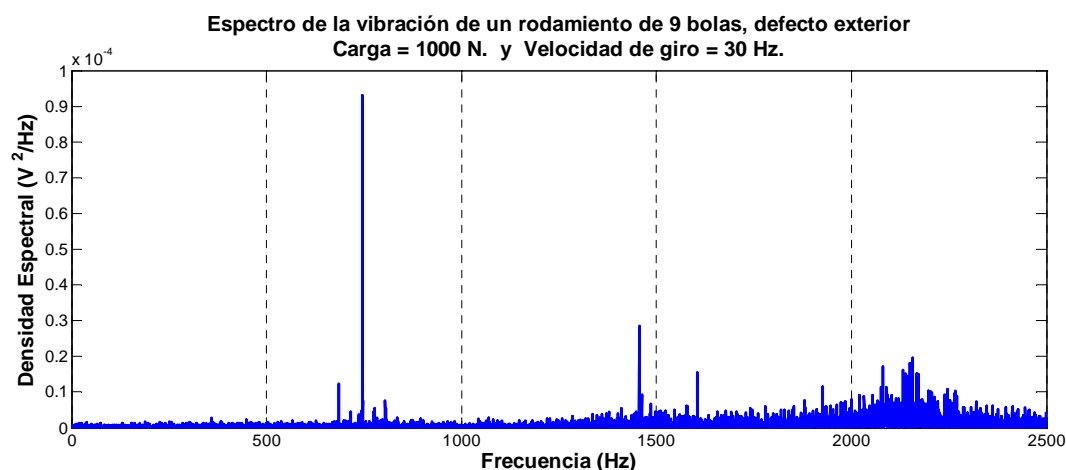


Figura 7.128 Espectro de la señal temporal representada en la Figura 7.126

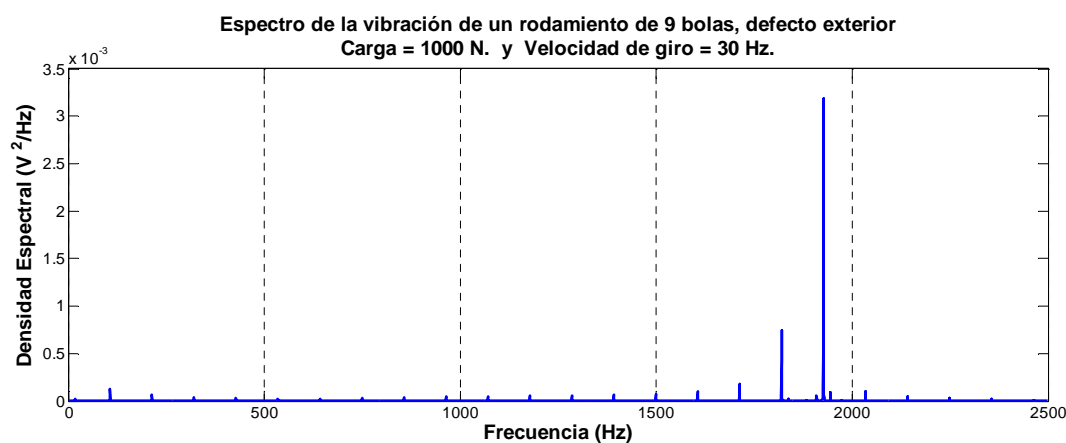


Figura 7.129 Espectro de la señal temporal representada en la Figura 7.127

En el espectro de la señal temporal destacar los picos que aparecen alrededor de la frecuencia de 2 kHz, que si bien en la señal temporal se podrían atribuir a resonancias estructurales, no ocurre lo mismo en el modelo donde las resonancias estructurales no existen.

Estos picos se deben por tanto, a las características propias del sistema simulado como masa, rigidez y amortiguamiento.

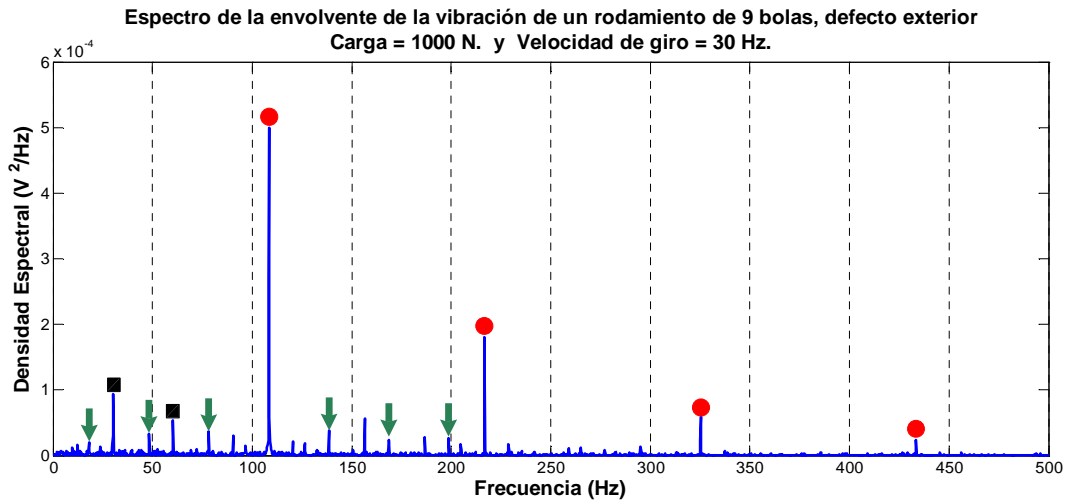


Figura 7.130 Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.126

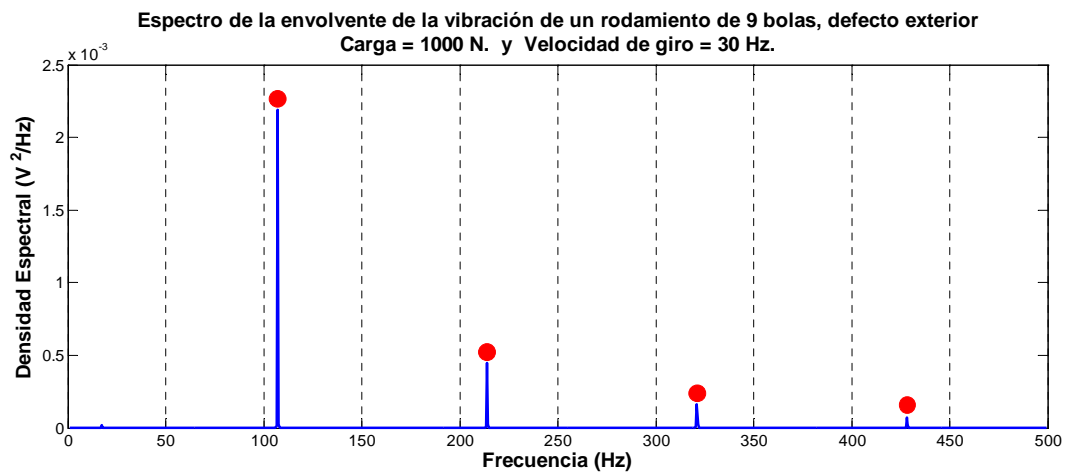


Figura 7.131 Frecuencias características sobre el espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la Figura 7.127.

El espectro de la envolvente de la señal temporal experimental (Figura 7.130) guarda también una elevada similitud con el espectro de la envolvente de la señal simulada (Figura 7.131). En ambas figuras pueden apreciarse con claridad los cuatro primeros armónicos de la frecuencia de defecto (puntos rojos).

En la señal simulada no se ven bandas laterales pero las que aparecen en la señal experimental son de tan pequeño tamaño que no son significativas.

De lo anterior se ha observado que el análisis del espectro de la envolvente de la señal temporal vibratoria, en el caso experimental y simulado, arroja similares resultados con lo que el contraste es aceptado.

7.5. EVOLUCIÓN DE LA POTENCIA ESPECTRAL TOTAL. SEÑALES EXPERIMENTALES

En las próximas páginas se muestran las curvas de evolución de la potencia espectral con la velocidad de giro y con la carga para los diferentes análisis realizados: rodamiento de 3 bolas y 9 bolas, sin defecto, con defecto en anillo externo y con defecto en anillo interno, en total 12 gráficas.

Para construir cada gráfica es necesario procesar 7 cargas: 100 N., 500 N., 1000 N., 1500 N., 2000 N., 2500 N. y 3000 N. con 5 velocidades: 5 Hz, 10 Hz, 20 Hz y 30 Hz y cada una de estas posibles combinaciones generan 100 archivos (series de 10 archivos de 10 rodamientos). En total, en cada gráfico se están procesando 3500 archivos de datos con un contenido de 70 millones de datos.

Se observa en todos los casos que la potencia espectral crece con la velocidad de giro de forma parabólica en todos los casos. Con la carga sin embargo, aunque se aprecia un cierto crecimiento, este es bastante más tenue y hay casos en los cuales aproximadamente no se produce aumento de la potencia espectral.

Es curioso apreciar que en el caso de rodamientos de 3 bolas sin defecto Figura 7.133 y con defecto en el anillo externo Figura 7.135, la potencia espectral tiene tendencia creciente mientras que en el caso de defecto en anillo interno Figura 7.137 se mantiene casi constante el valor de la potencia espectral.

Sin embargo, en el caso de 9 bolas es prácticamente inapreciable el aumento del valor de la potencia espectral con la carga Figuras 7.139 y 7.141 mientras que el defecto en el anillo interno se denota cierto aumento Figura 7.143.

7.5.1. Análisis vibratorio del rodamiento con 3 bolas

Rodamiento sin defecto

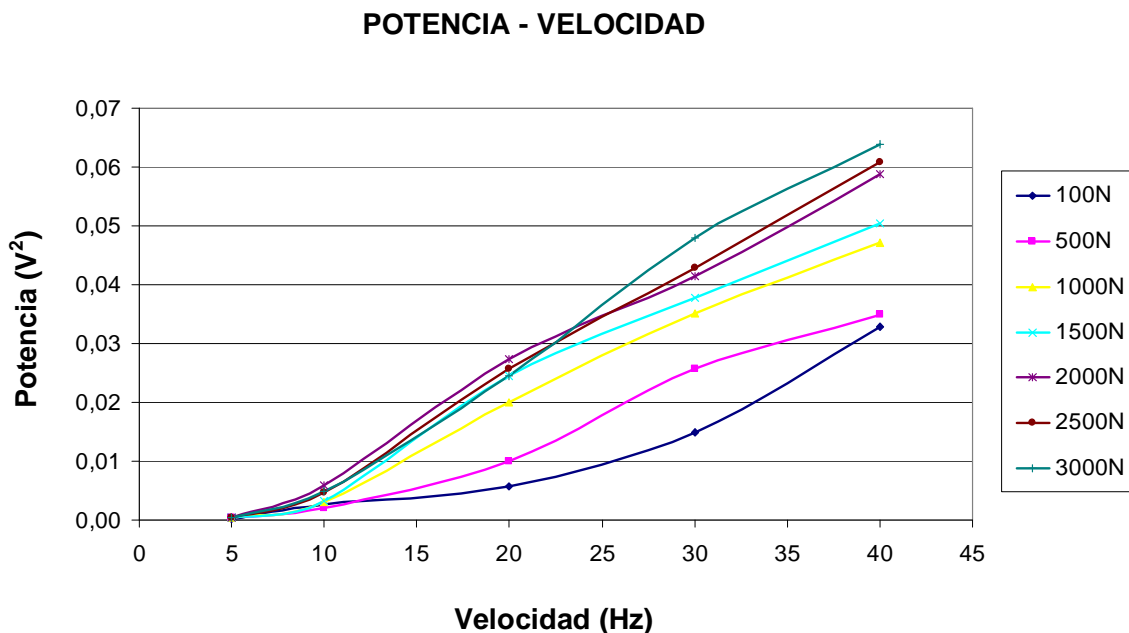


Figura 7.132 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un rodamiento SKF 6206 nuevo, con 3 bolas, para diferentes cargas.

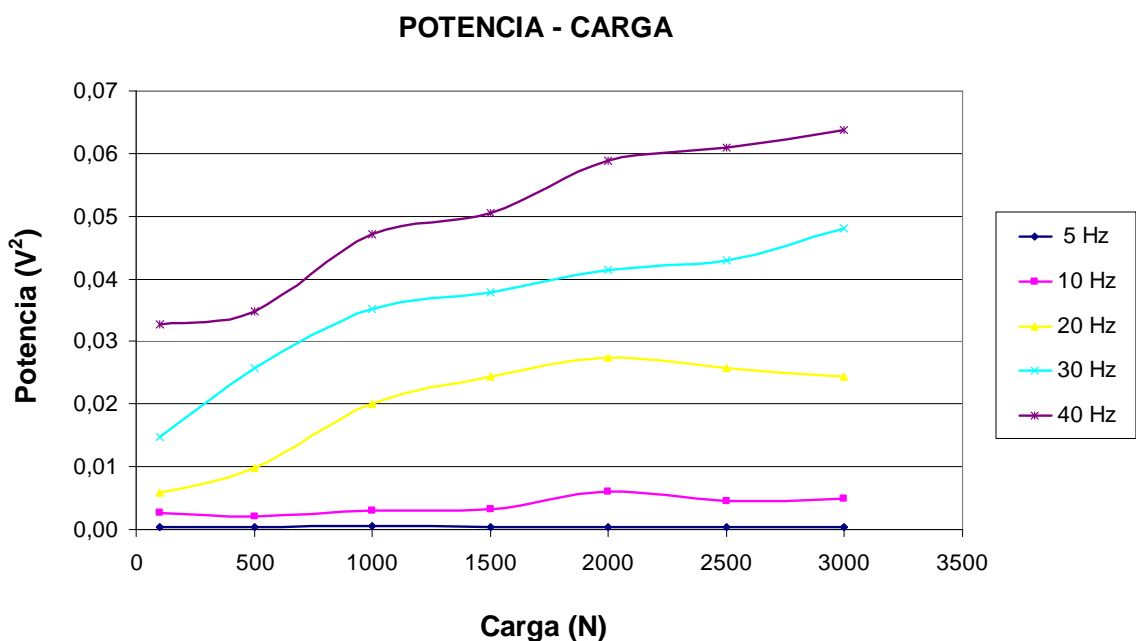


Figura 7.133 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un rodamiento SKF 6206 nuevo, con 3 bolas, para diferentes velocidades de giro.

Rodamiento con defecto en la pista externa

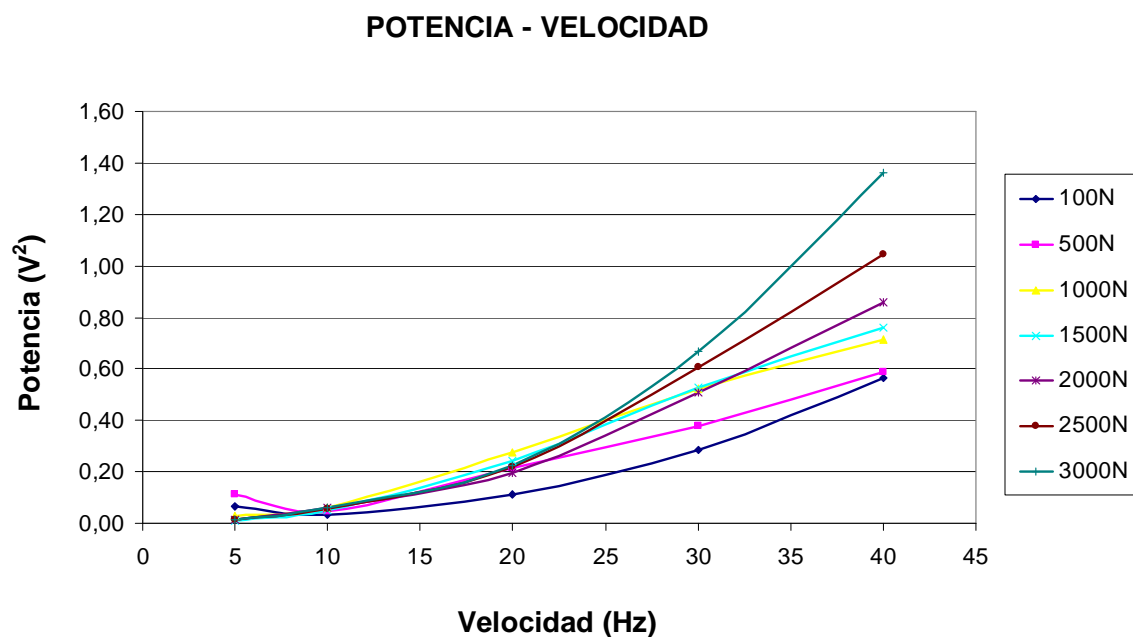


Figura 7.134 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, con 3 bolas, para diferentes cargas.

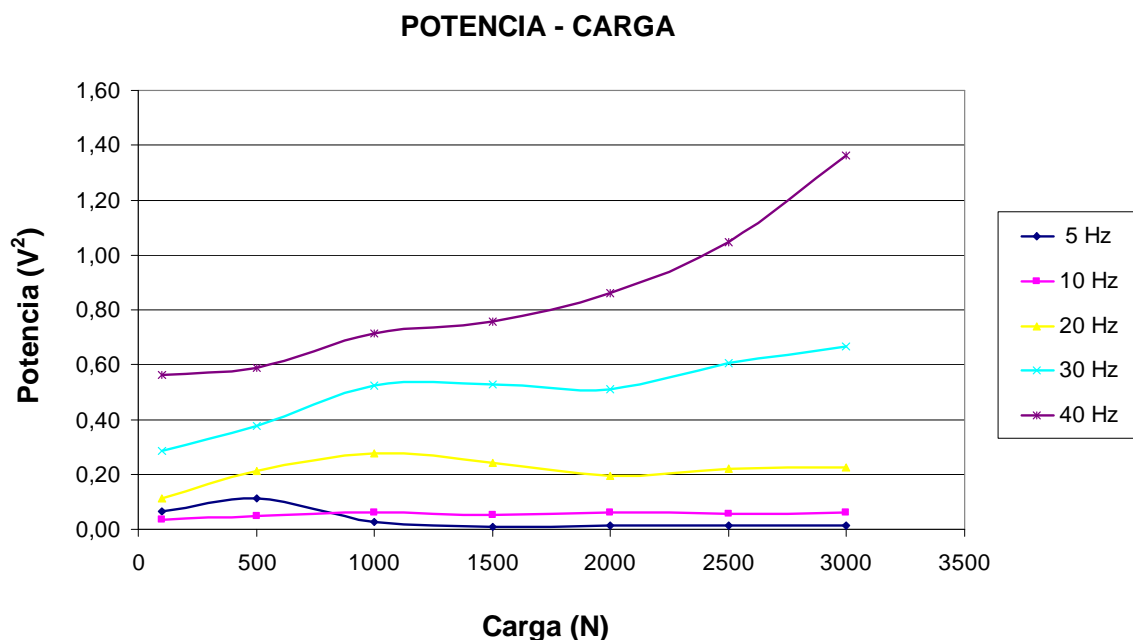


Figura 7.135 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, con 3 bolas, para diferentes velocidades de giro.

Rodamiento con defecto en la pista interna

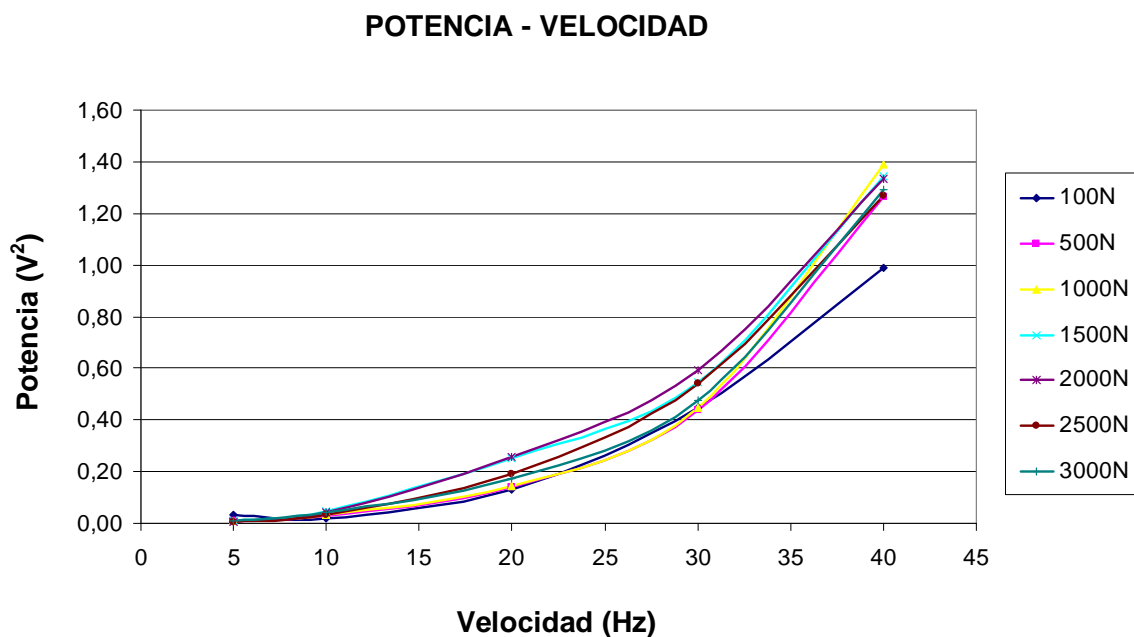


Figura 7.136 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, con 3 bolas, para diferentes cargas.

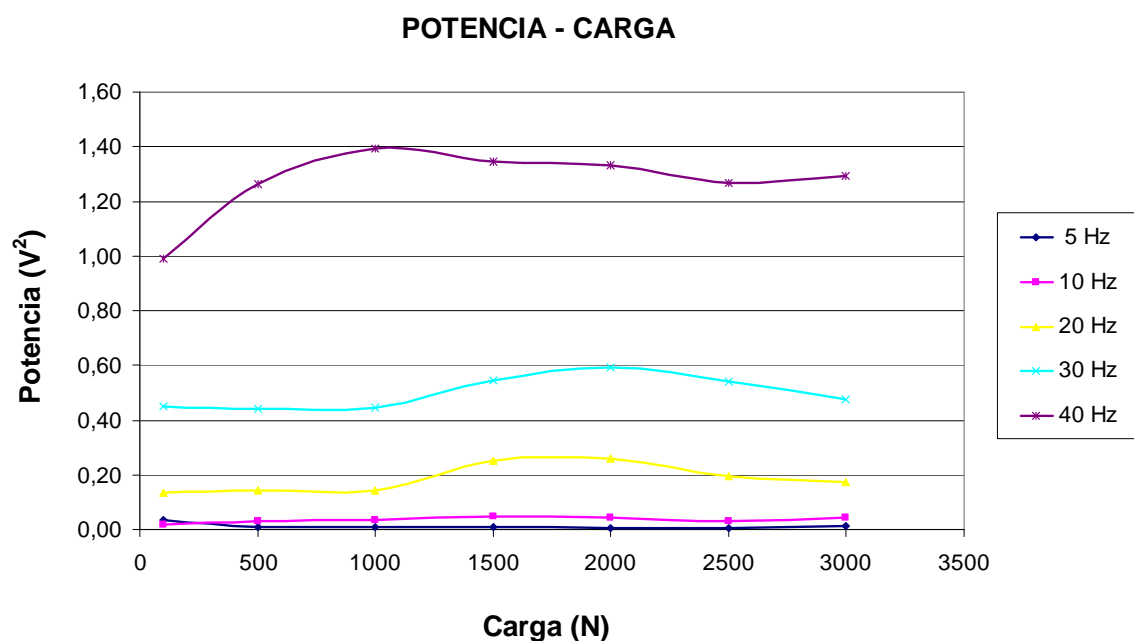


Figura 7.137 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, con 3 bolas, para diferentes velocidades de giro.

7.5.2. Análisis vibratorio del rodamiento completo

Rodamiento sin defecto

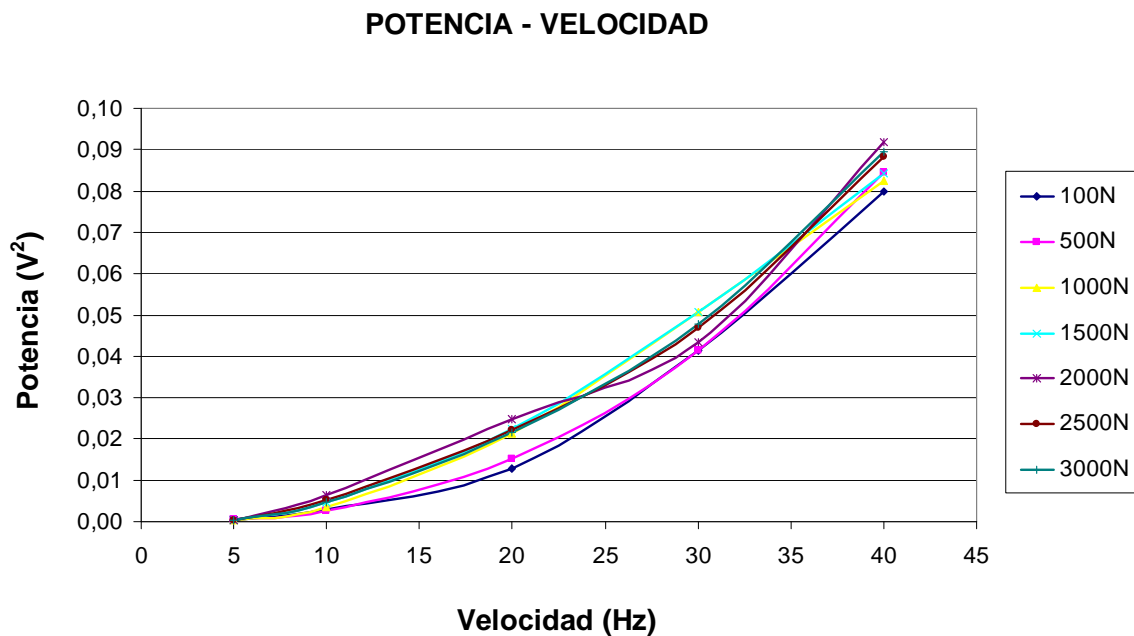


Figura 7.138 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un rodamiento SKF 6206 nuevo, para diferentes cargas.

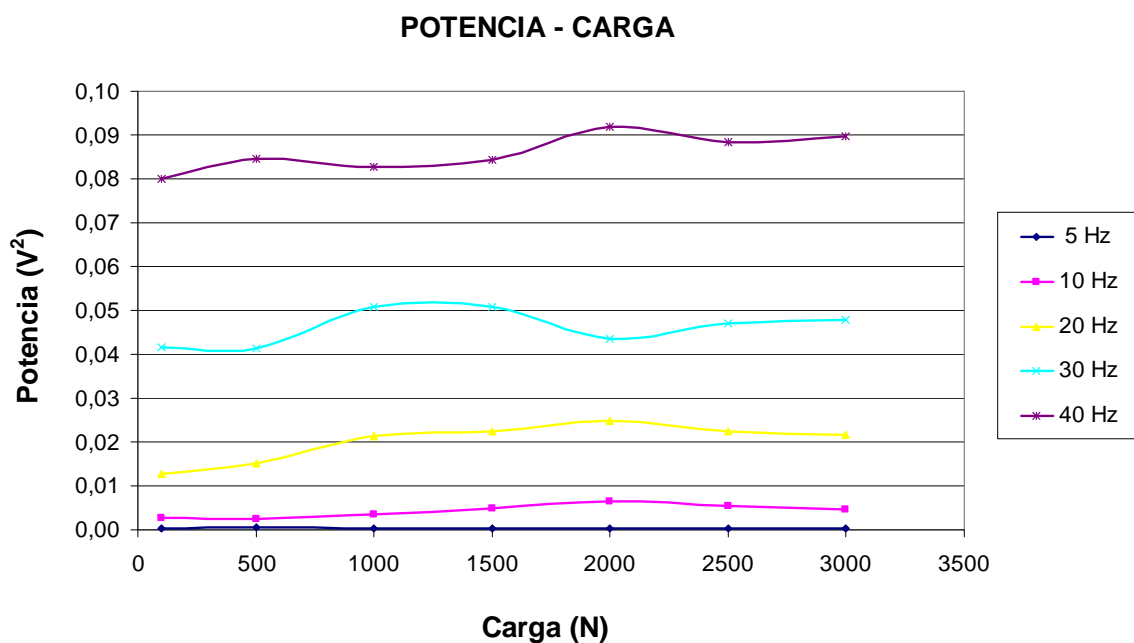


Figura 7.139 Evolución de la Potencia Espectral con la carga de un rodamiento SKF 6206 nuevo, para diferentes velocidades de giro.

Rodamiento con defecto en la pista externa

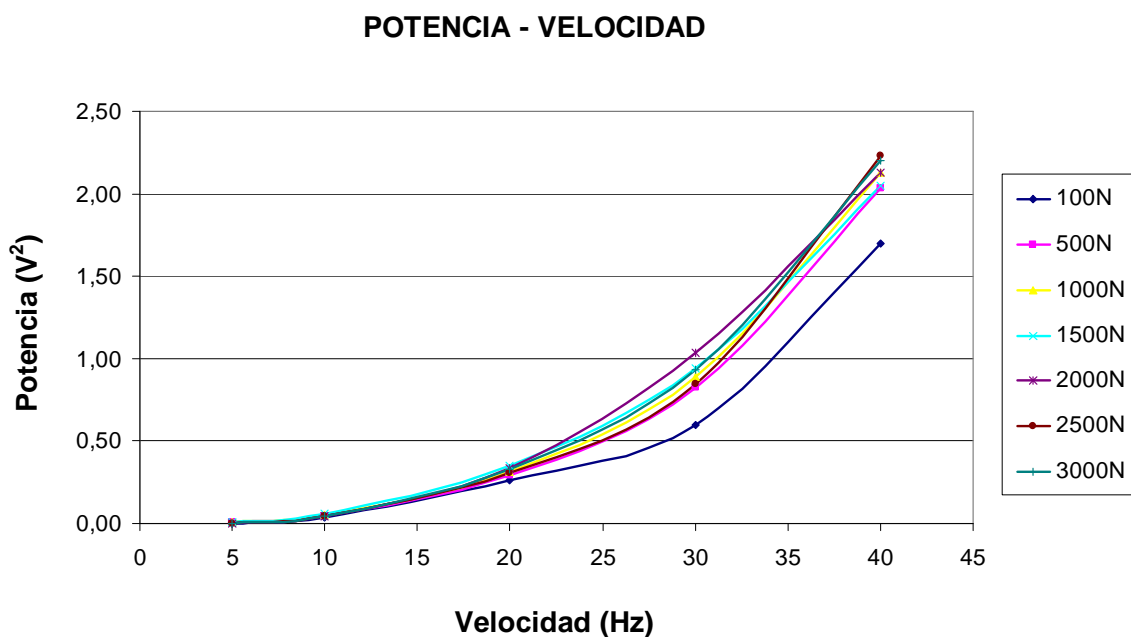


Figura 7.140 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, para diferentes cargas.

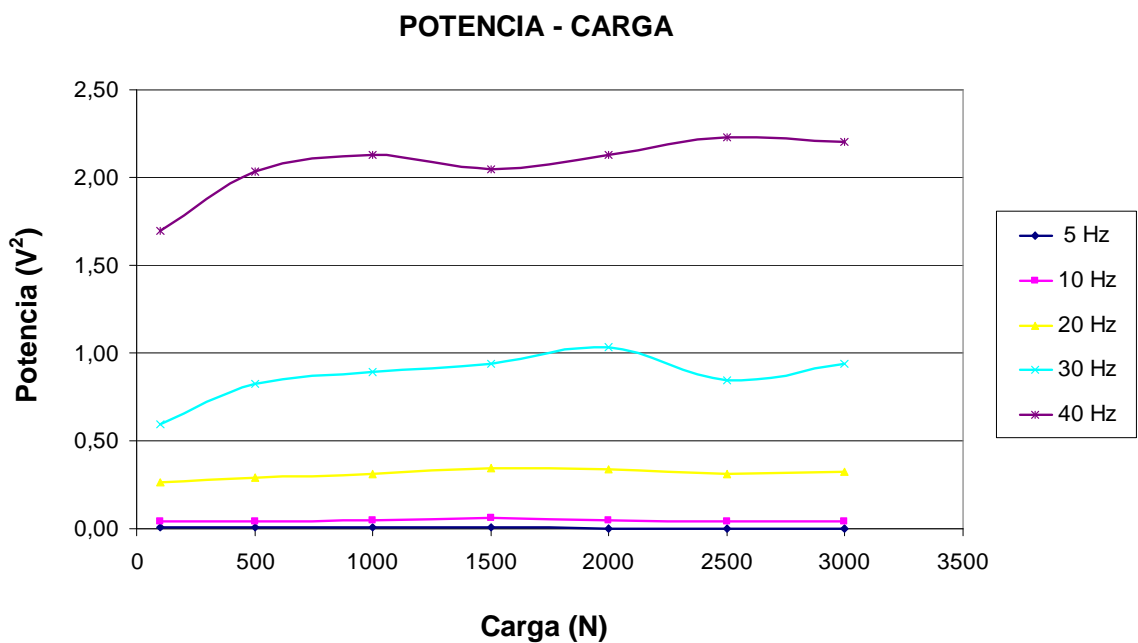


Figura 7.141 Evolución de la Potencia Espectral con la carga de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, para diferentes velocidades de giro.

Rodamiento con defecto en la pista interna

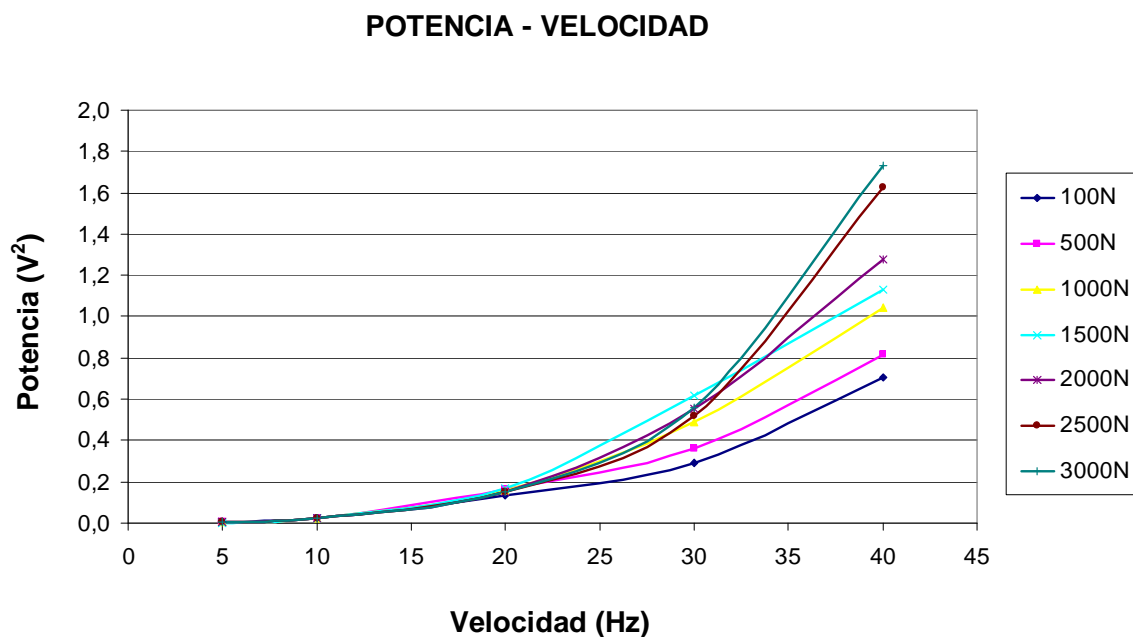


Figura 7.142 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, para diferentes cargas.

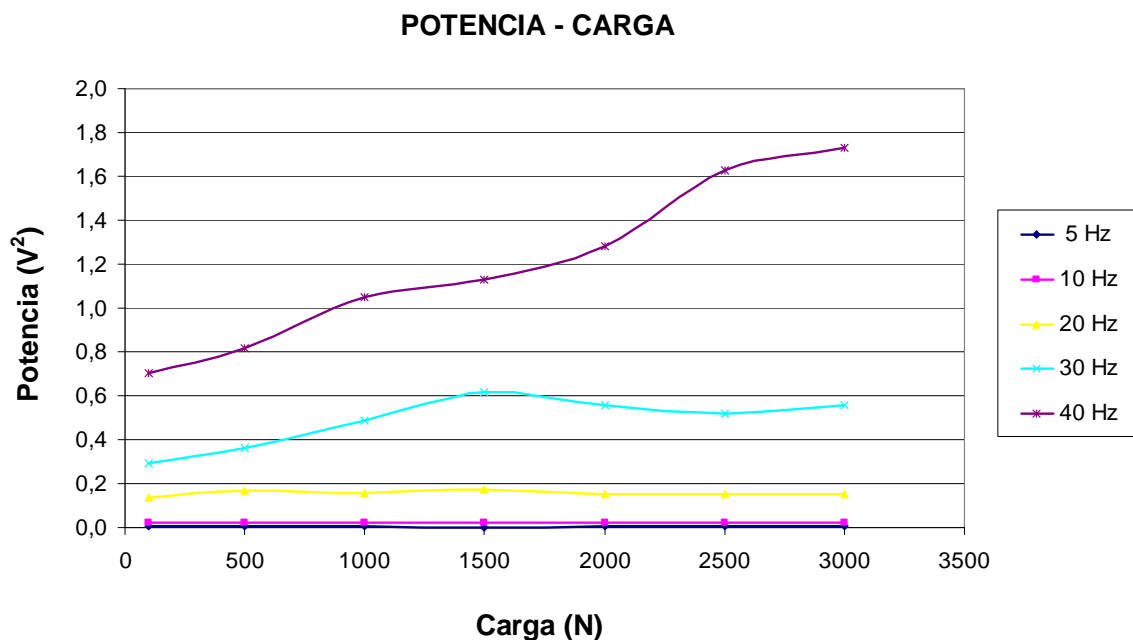


Figura 7.143 Evolución de la Potencia Espectral con la carga de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, para diferentes velocidades de giro.

7.6. EVOLUCIÓN DE LA POTENCIA ESPECTRAL TOTAL. SEÑALES SIMULADAS

En las próximas páginas se ofrecen las curvas de evolución de la potencia espectral con la velocidad de giro y con la carga para los diferentes análisis realizados: modelo de 5 GDL (rodamiento de 3 bolas) y modelo de 11 GDL (rodamiento de 9 bolas), sin defecto, con presencia de defecto en el anillo externo y con presencia de defecto en el anillo interno, en total 12 gráficas.

Para construir cada gráfica es necesario procesar datos de simulación originados a partir de las distintas combinaciones que pueden formarse con 7 cargas: 100 N., 500 N., 1000 N., 1500 N., 2000 N., 2500 N. y 3000 N. y 5 velocidades: 5 Hz, 10 Hz, 20 Hz, 30 Hz y 40 Hz.

Se observa que el comportamiento es diferente cuando existe defecto y cuando no existe defecto. Cuando no existe defecto, tanto en el modelo de 5 GDL como en el modelo de 11 GDL, el valor de la potencia espectral aumenta con la carga Figura 7.145 y Figura 7.151, manteniéndose prácticamente constante o con cierto crecimiento cuando la velocidad es elevada, Figura 7.144 y Figura 7.150.

Cuando existe defecto en el anillo externo, la variación de la potencia espectral es más sensible a la velocidad que a la carga, tanto en el modelo de 5 GDL, Figura 7.146 y 7.148 como 11 GDL Figura 7.152 y 7.154. La variación con la velocidad no sigue un patrón creciente como en el caso experimental, sino que la variación se produce bruscamente en la banda de frecuencias que va de los 20 Hz a 30 Hz en los dos modelos.

La variación de la potencia con la carga en el modelo de 5 GDL y defecto en la pista exterior, Figura 7.147 sigue en general una tendencia débilmente creciente excepto el caso de la velocidad de 30 Hz, donde muestra un patrón decreciente hasta los 2500 N. donde vuelve a crecer.

La variación de la potencia con la carga en el modelo de 11 GDL y defecto en la pista exterior, Figura 7.153 sigue en general una tendencia constante o débilmente decreciente.

La variación de la potencia con la velocidad en el modelo de 5 GDL y defecto en la pista interior, Figura 7.148, presenta un claro crecimiento a partir de los 30 Hz. Hasta los 30 Hz, el comportamiento no es regular, presentándose crecimientos y decrecimientos pero con diferenciales mucho menos que el que se presenta de los 30 a los 40 Hz. La variación de la potencia espectral con la carga, Figura 7.149, sigue una tendencia débilmente al alza, destacando los valores del caso de velocidad de 40 Hz, superiores al del resto de los casos.

La variación de la potencia con la velocidad en el modelo de 11 GDL y defecto en la pista interior, Figura 7.154, presenta un claro crecimiento a partir de los 20 Hz, con cierta similitud al caso experimental. Hasta los 20 Hz, el comportamiento es bastante regular. La variación de la potencia espectral con la carga, Figura 7.155, no sigue un patrón determinado, presentándose incrementos, como en el caso de 40 Hz, decrementos, como el caso de 30 Hz, y tanto decrementos como incrementos como el caso de 10 Hz .

7.6.1. Análisis vibratorio del modelo de rodamiento de 5 GDL

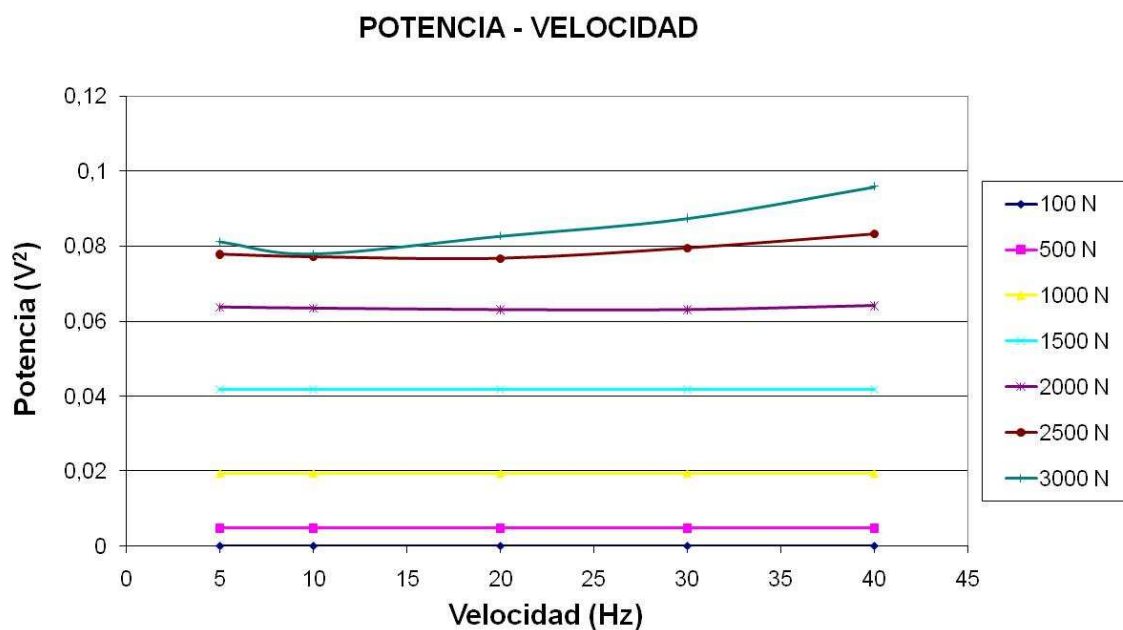


Figura 7.144 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento nuevo, con 5 GDL, para diferentes cargas.

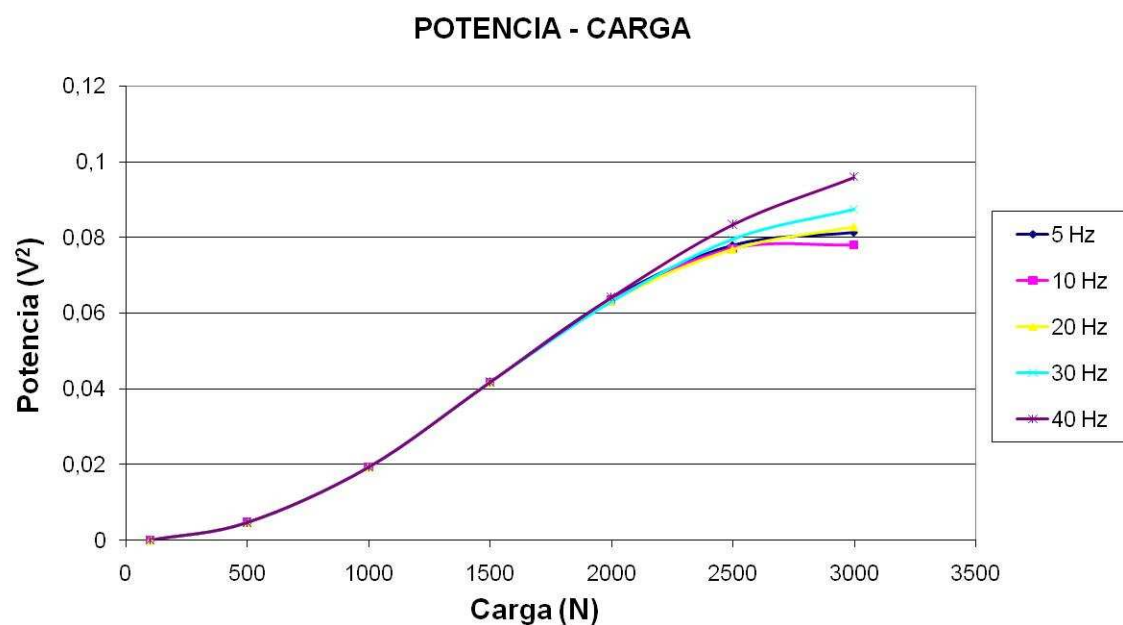


Figura 7.145 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento nuevo, con 5 GDL, para diferentes velocidades de giro.

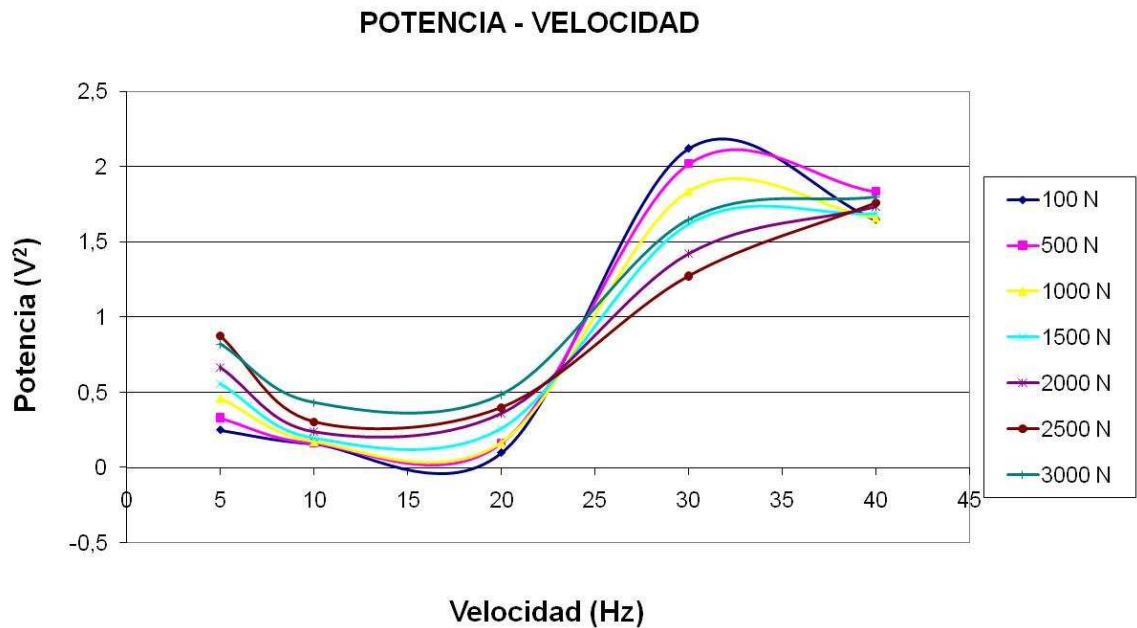
Modelo de rodamiento con defecto en la pista exterior

Figura 7.146 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento con defecto en la pista exterior, con 5 GDL, para diferentes cargas.

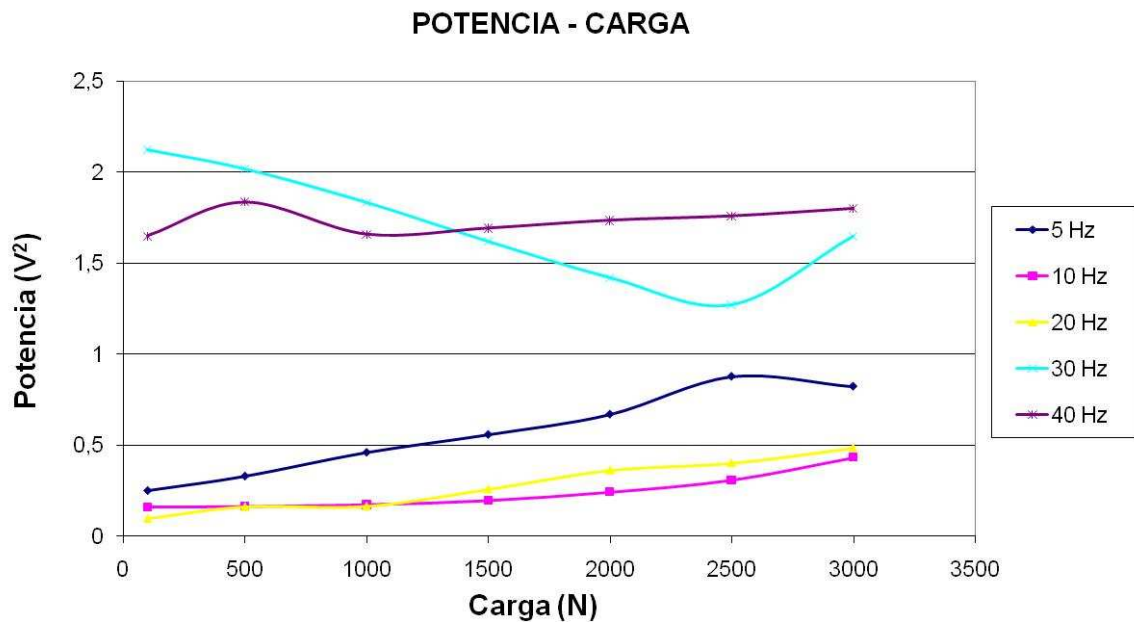


Figura 7.147 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento con defecto en la pista exterior, ccon 5 GDL, para diferentes velocidades de giro.

Modelo de rodamiento con defecto en la pista interior

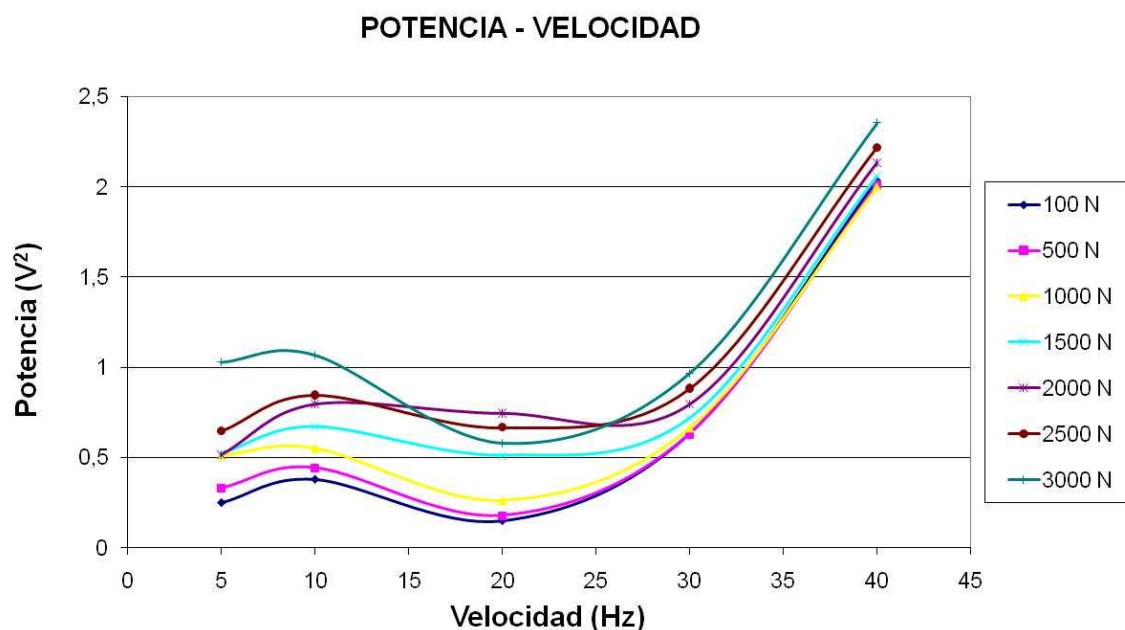


Figura 7.148 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento con defecto en la pista interior, con 5 GDL, para diferentes cargas.

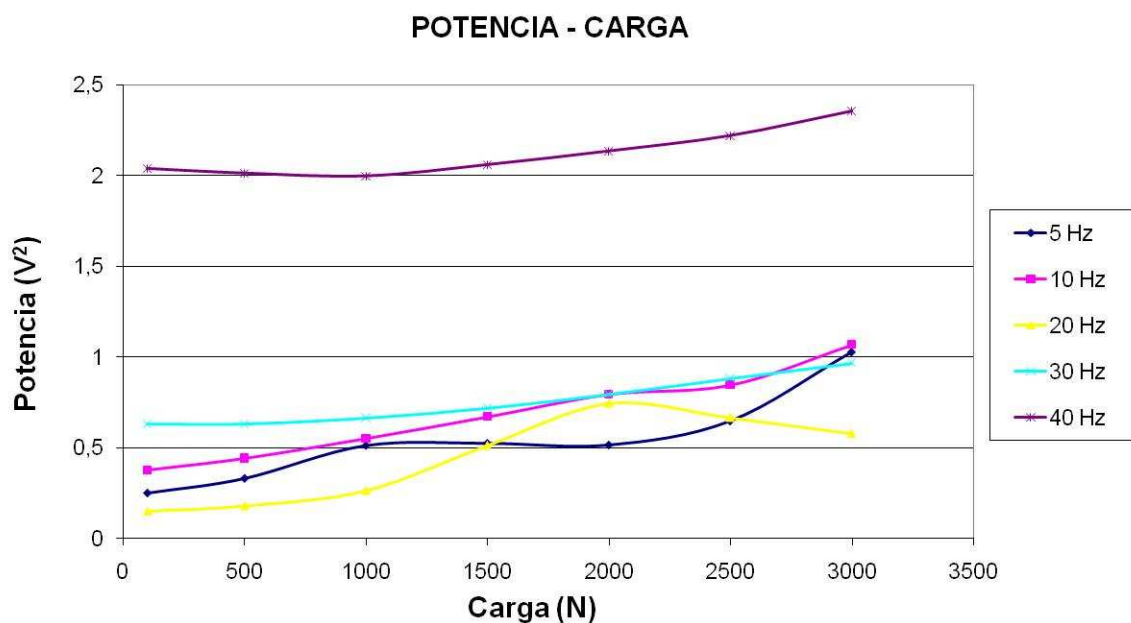


Figura 7.149 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento con defecto en la pista interior, con 5 GDL, para diferentes velocidades de giro.

7.6.2. Análisis vibratorio del modelo de rodamiento de 11 GDL

Modelo de rodamiento sin defecto

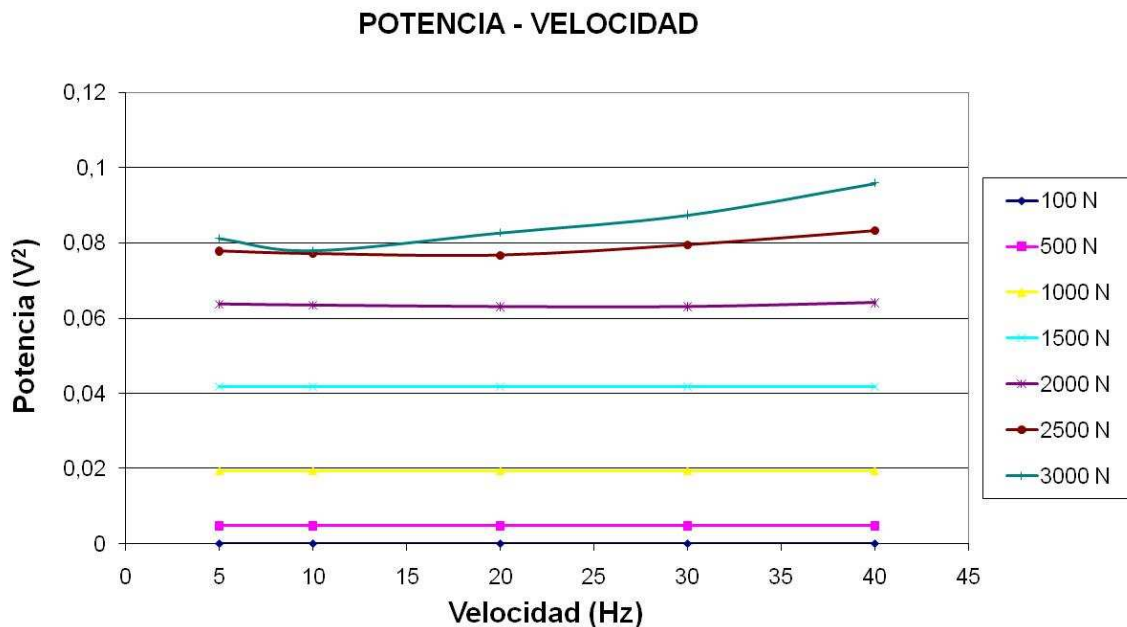


Figura 7.150 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento nuevo, con 11 GDL, para diferentes cargas.

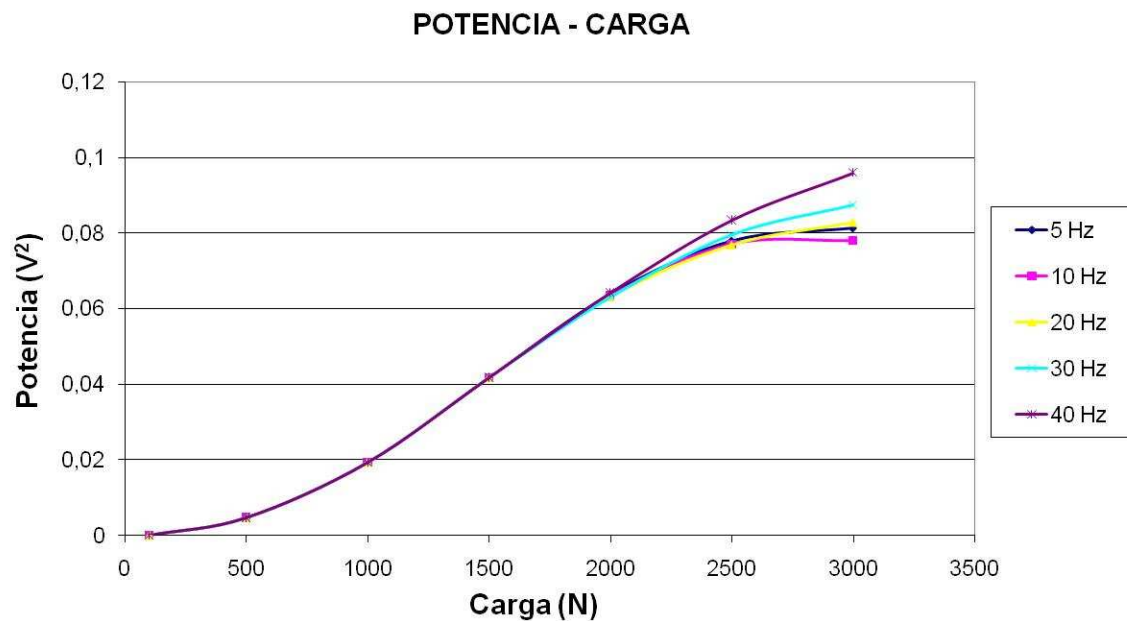


Figura 7.151 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento nuevo, con 11 GDL, para diferentes velocidades de giro.

Modelo de rodamiento con defecto en la pista exterior

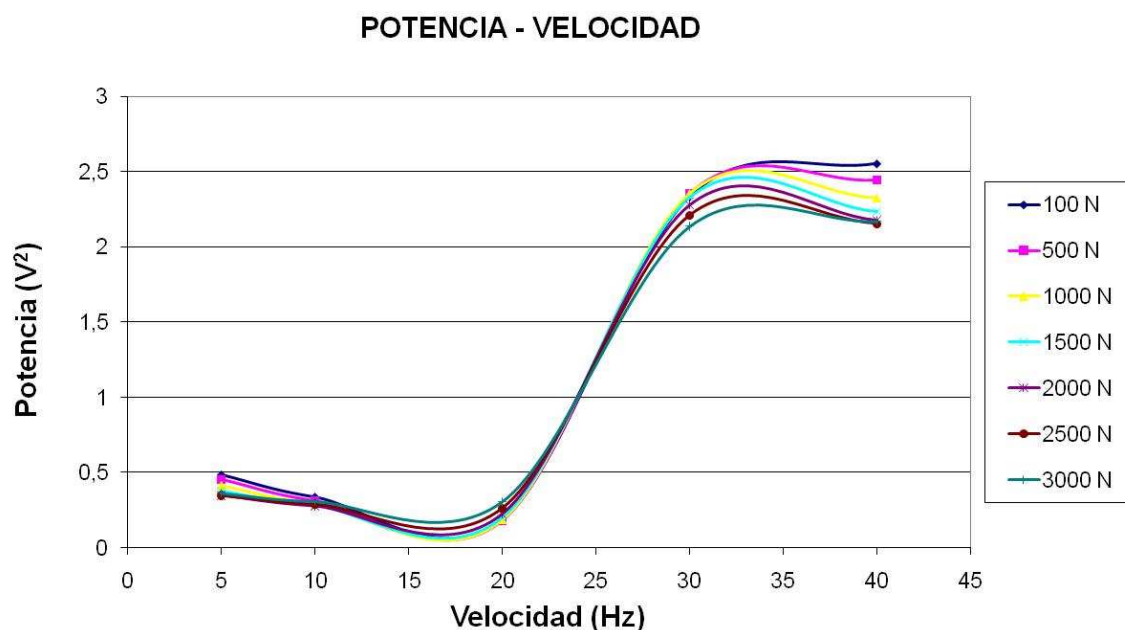


Figura 7.152 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento con defecto en la pista exterior, con 11 GDL, para diferentes cargas.

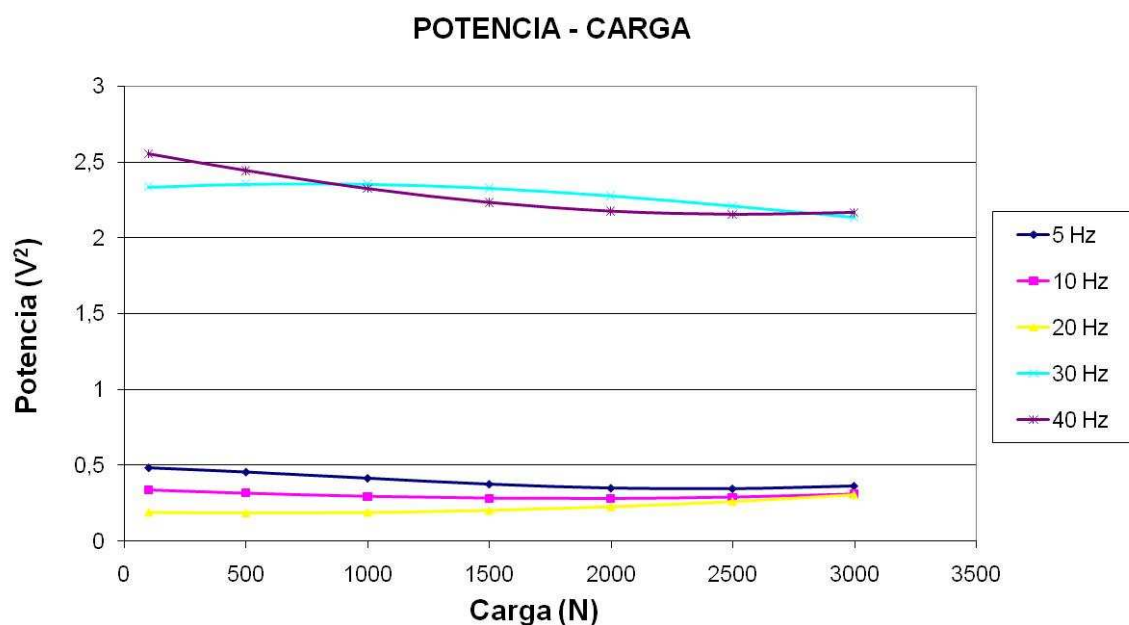


Figura 7.153 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento con defecto en la pista exterior, ccon 11 GDL, para diferentes velocidades de giro.

Modelo de rodamiento con defecto en la pista interior

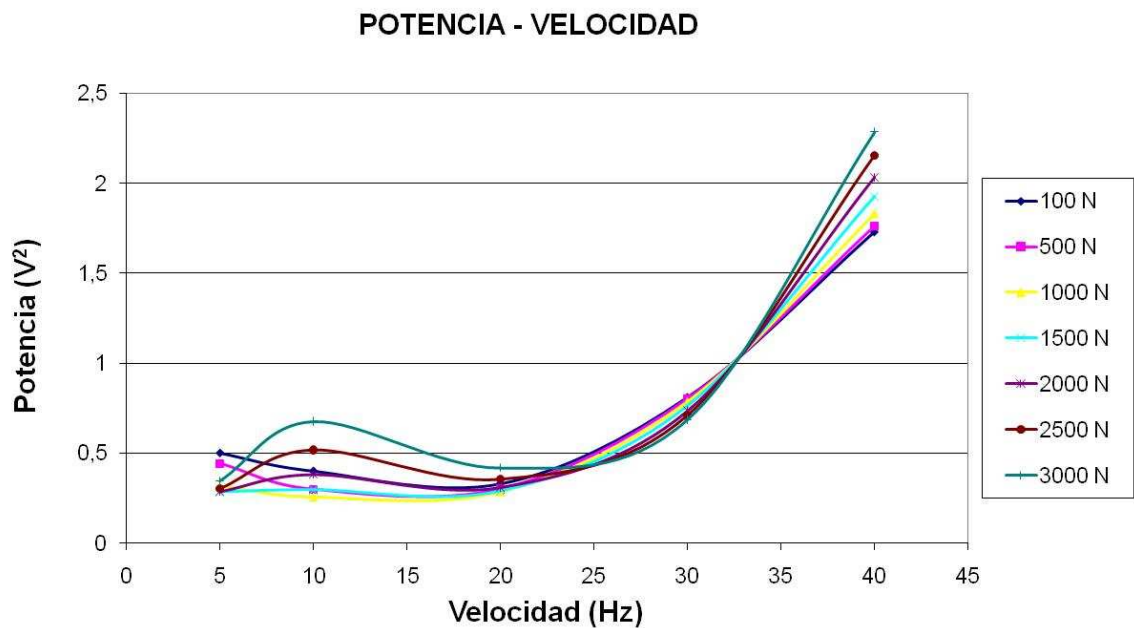


Figura 7.154 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento con defecto en la pista interior, con 11 GDL, para diferentes cargas.

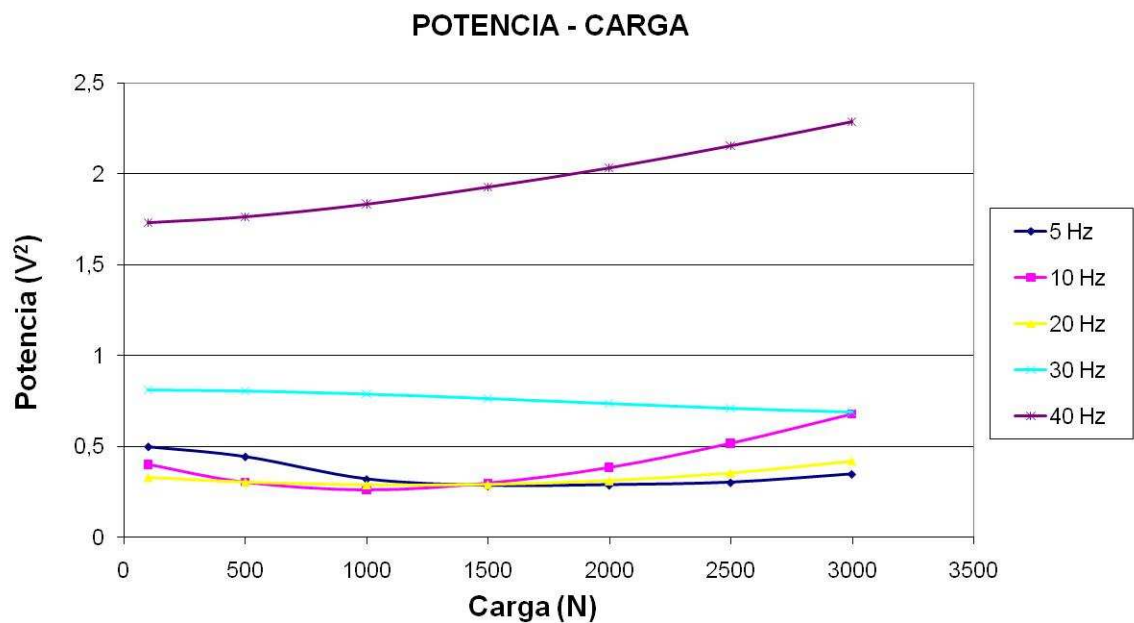


Figura 7.155 Evolución de la Potencia Espectral con la velocidad de giro de un modelo de rodamiento con defecto en la pista interior, con 11 GDL, para diferentes velocidades de giro.

7.7. EVOLUCIÓN DE LA VIBRACIÓN EN EL TIEMPO

Seguidamente se realizó el experimento de registrar la vibración de manera continua, tomando un registro cada minuto, durante 90 minutos, para diferentes circunstancias a diferentes velocidades: 10 Hz, 20 Hz y 30 Hz, con una carga constante de 3000 N., en rodamientos de 3 bolas y de 9 bolas, nuevos, con defecto en anillo interno y con defecto en anillo externo. En total se generan 18 gráficas como la que aparece en la Figura A.15.

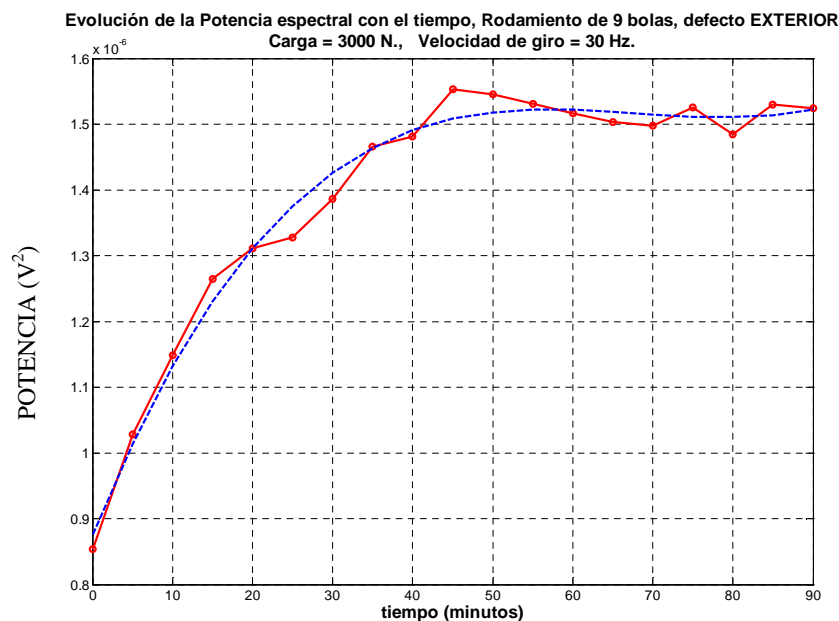


Figura 7.156 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

En estas señales aparecen representadas y la evolución de la potencia espectral de los 90 ficheros. El resto de gráficas se encuentran en el Anexo A.

En el gráfico de la Figura 7.157 se muestran representados los valores de la potencia espectral a los cuales se estabiliza el sistema mecánico.

Observando la gráfica mostrada en la Figura 7.157 puede deducirse que:

- En todos los casos, la tendencia de los valores de la potencia espectral total es a aumentar con la velocidad de giro del rodamiento.
- Cuando el rodamiento presenta defecto en el anillo externo, el valor de la potencia espectral es mayor a cualquier velocidad, ya sea el rodamiento de 3 bolas o 9 bolas que cuando el rodamiento tiene defecto en el anillo interno, y mucho mayor que cuando el rodamiento no tiene defecto.
- Los valores de potencia espectral son mayores en el rodamiento de tres bolas cuando la velocidad angular es de 10 Hz, las diferencias se van reduciendo cuando aumenta la velocidad hasta que, a la velocidad de 30 Hz son prácticamente iguales.

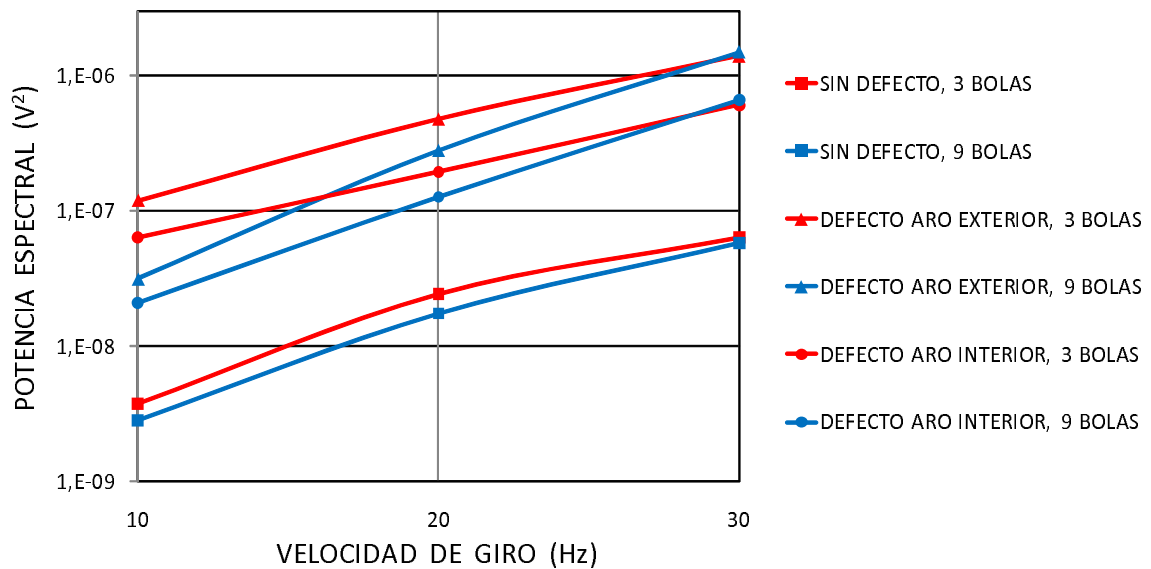


Figura 7.157 Evolución de la vibración en el tiempo con la velocidad angular

TIPO DE DEFECTO	VELOCIDAD GIRO (Hz)	VIBRACIONES	
		3 BOLAS	9 BOLAS
SIN DEFECTO	10	3,75E-09	2,85E-09
	20	2,45E-08	1,75E-08
	30	6,45E-08	5,80E-08
DEFECTO EN ANILLO EXTERIOR	10	1,20E-07	3,15E-08
	20	4,80E-07	2,80E-07
	30	1,40E-06	1,50E-06
DEFECTO EN ANILLO INTERIOR	10	6,40E-08	2,10E-08
	20	1,95E-07	1,27E-07
	30	6,10E-07	6,60E-07

7.8. EVOLUCIÓN DE LA TEMPERATURA EN EL TIEMPO

Junto con el registro de la vibración, visto en el apartado anterior, también se registraron la evolución térmica en la brida y en el rotor, durante un proceso transitorio de calentamiento y enfriamiento, para los 18 casos citados anteriormente (rodamientos de 3 bolas y 9 bolas, diferentes velocidades: 10 Hz, 20 Hz y 30 Hz, con una carga constante de 3000 N.)

La representación de estas 18 figuras se muestran en el anexo A2. En la Figura B.35 se muestra, a modo de ejemplo uno de estos diagramas. Como los procesos tienen duración distinta, se optó por tomar los primeros 90 minutos de calentamiento y los 90 minutos de enfriamiento, tras 7'5 minutos de apagado de la máquina. En las Figuras 7.160, 7.161, 7.162 y 7.163 se muestran todos estos procesos.

Con los datos aportados de los procesos de enfriamiento se extrajeron los coeficientes térmicos de radiación-convención que se utilizan en el modelo térmico de rodamiento.

Los datos obtenidos del modelo se cotejaron con las curvas reales de calentamiento

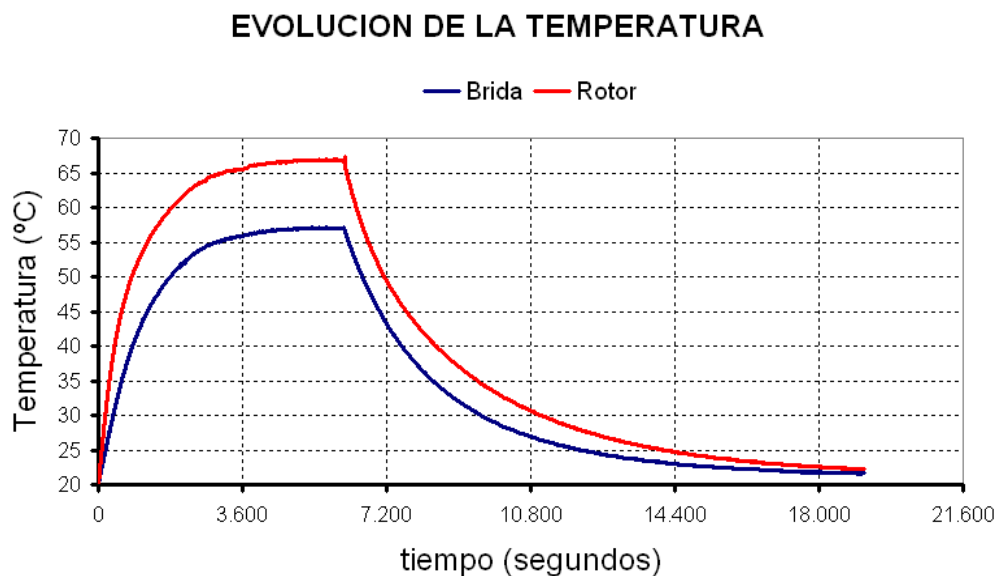


Figura 7.158 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

presentando resultados con una elevada correlación, como se muestra en el ejemplo de la Figura B.36. En el Anexo B se muestran los diagramas de los 18 casos contemplados.

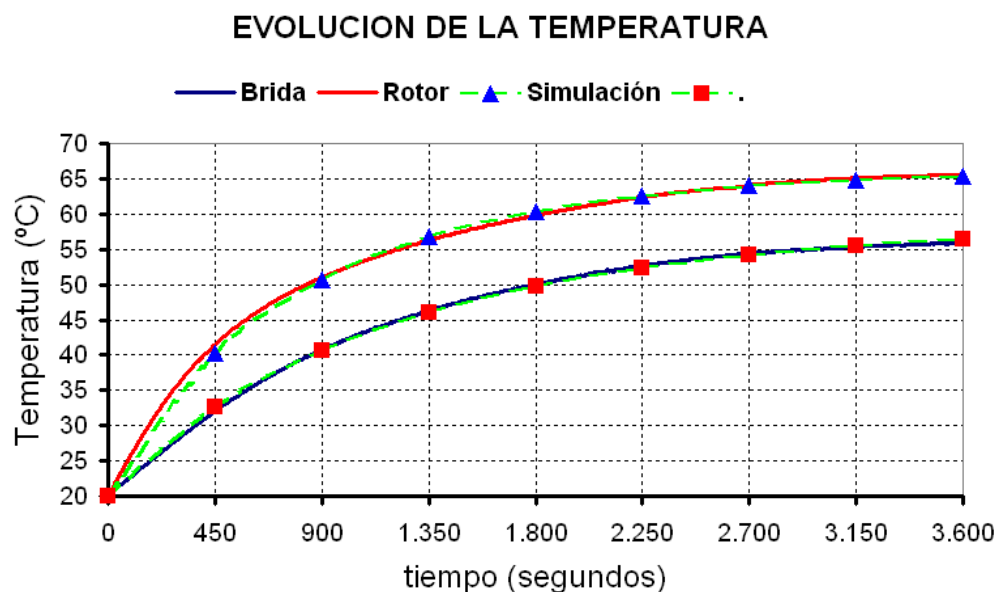


Figura 7.159 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

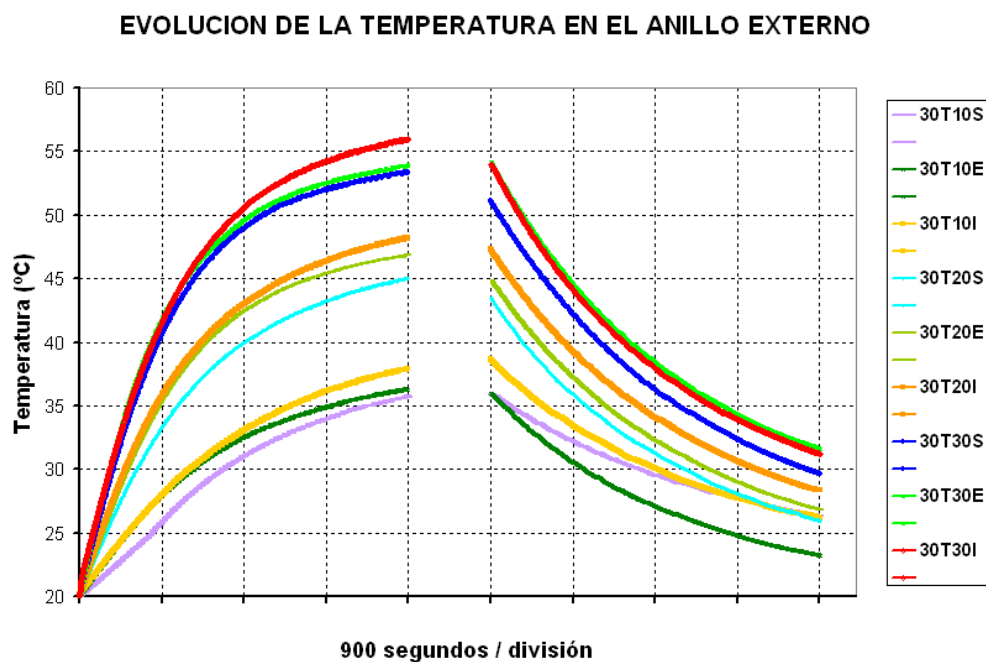


Figura 7.160 Comparación de la evolución de la temperatura en el anillo externo de un rodamiento SKF 6206 con 3 bolas

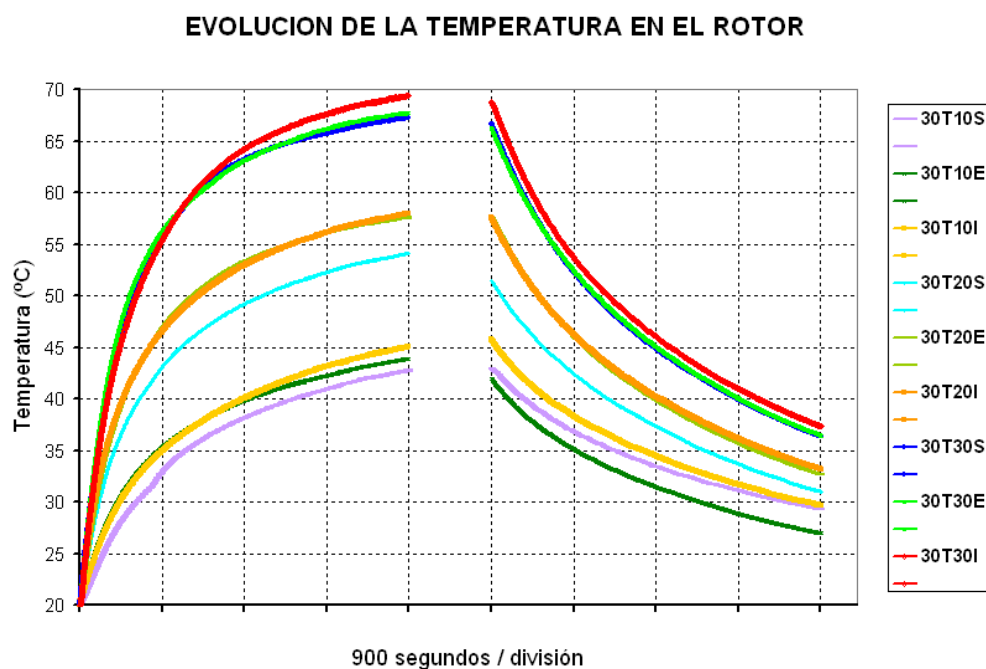


Figura 7.161 Comparación de la evolución de la temperatura en el núcleo del rotor

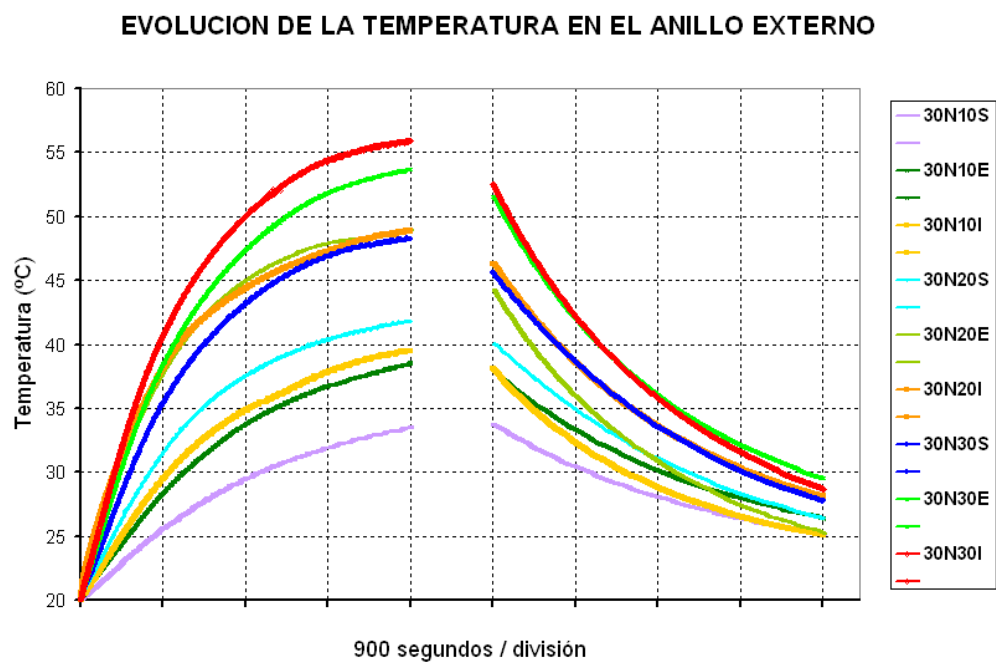


Figura 7.162 Comparación de la evolución de la temperatura en el anillo externo de un rodamiento SKF 6206

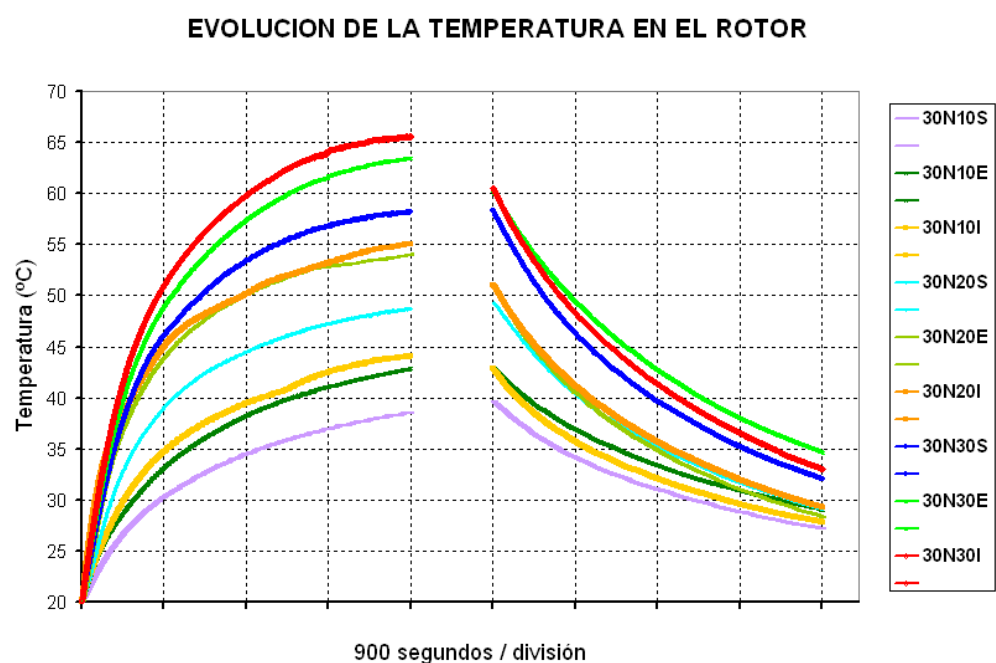


Figura 7.163 Comparación de la evolución de la temperatura en el núcleo del rotor

Al igual que en el estudio vibratorio del apartado anterior, se procedió a obtener los valores a los cuales estabilizaba la temperatura en el rotor y en la brida.

En las siguientes gráficas y tablas se muestran las temperaturas del rotor y brida a los cuales tiende a estabilizar a los 90 minutos para distintos casos. Observando los gráficos mostrados en las Figuras 7.8 y 7.165 se deduce que:

- Tanto en el rotor como en la brida, la tendencia de los valores de temperatura es aumentar con la velocidad de giro.
- Los valores de temperatura en la brida, con rodamientos con defecto, son mayores en los casos del rodamiento de 9 bolas cuando la velocidad de giro es baja (10 Hz), contrariamente a lo que ocurría en las vibraciones. Según aumenta la velocidad angular del eje, las diferencias se van reduciendo hasta que, a 30 Hz, son prácticamente iguales.
- El comportamiento de los valores de temperatura en la brida, con rodamientos sin defecto, es muy diferente. Los rodamientos de 3 bolas generan mayor temperatura en la brida que los rodamientos de 9 bolas y según se incrementa la velocidad de giro, esta diferencia incluso aumenta ligeramente.

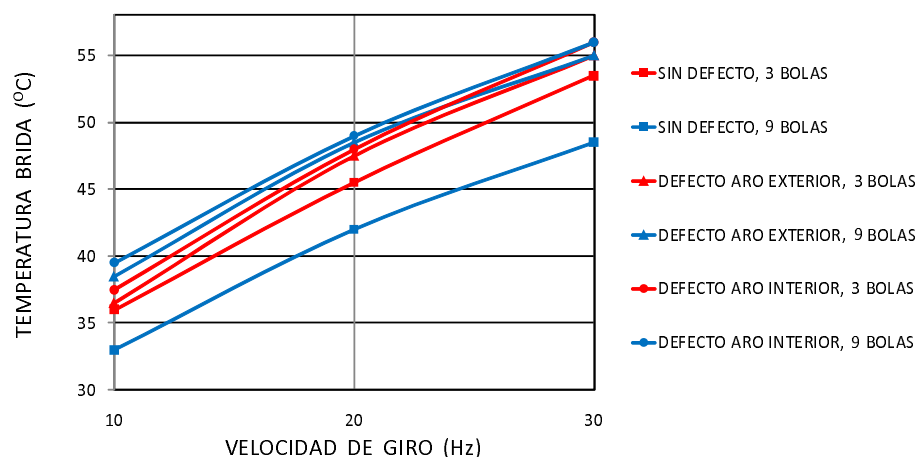


Figura 7.164 Temperatura en la brida a los 90 minutos de funcionamiento

TIPO DE DEFECTO	VELOCIDAD GIRO (Hz)	TEMPERATURA BRIDA	
		3 BOLAS	9 BOLAS
SIN DEFECTO	10	36,0	33,0
	20	45,5	42,0
	30	53,5	48,5
DEFECTO EN ANILLO EXTERIOR	10	36,5	38,5
	20	47,5	48,5
	30	55,0	55,0
DEFECTO EN ANILLO INTERIOR	10	37,5	39,5
	20	48,0	49,0
	30	56,0	56,0

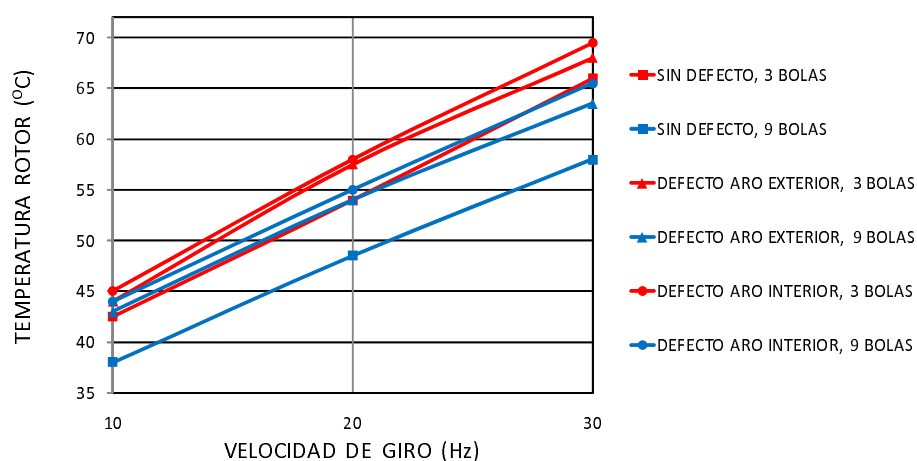


Figura 7.165 Temperatura en el rotor a los 90 minutos de funcionamiento

TIPO DE DEFECTO	VELOCIDAD GIRO (Hz)	TEMPERATURA ROTOR	
		3 BOLAS	9 BOLAS
SIN DEFECTO	10	42,5	38,0
	20	54,0	48,5
	30	66,0	58,0
DEFECTO EN ANILLO EXTERIOR	10	44,0	43,0
	20	57,5	54,0
	30	68,0	63,5
DEFECTO EN ANILLO INTERIOR	10	45,0	44,0
	20	58,0	55,0
	30	69,5	65,5

- Los valores de temperatura en el rotor para iguales condiciones de defecto o sin defecto son siempre mayores en el rodamiento de 3 bolas.
- El crecimiento de los valores de temperatura en el rotor para casos de 3 ó 9 bolas sin defecto o con defecto son prácticamente lineales, teniendo en cada caso incrementos mantenidos.
- En todos los casos, tanto en el rotor como en la brida, para el caso de un rodamiento con un determinado número de bolas y a una determinada velocidad, con defecto interior se genera la mayor temperatura. Le sigue la temperatura generada en rodamientos con defecto en aro exterior y por último, queda la temperatura generada en rodamientos sin defecto. Esto se aprecia muy bien en las Figuras 7.166 y 7.167. La diferencia de temperaturas generadas en rodamientos con defecto y sin defecto, es bastante más elevada en el caso de rodamientos de 9 bolas.
- En todos los casos estudiados y para circunstancias análogas siempre es superior los valores de temperatura en el rotor que en la brida.
- El comportamiento, a nivel térmico, del rodamiento de 9 bolas es análogo en la brida y en el rotor. En el caso del rodamiento de 3 bolas también guarda bastante semejanza.

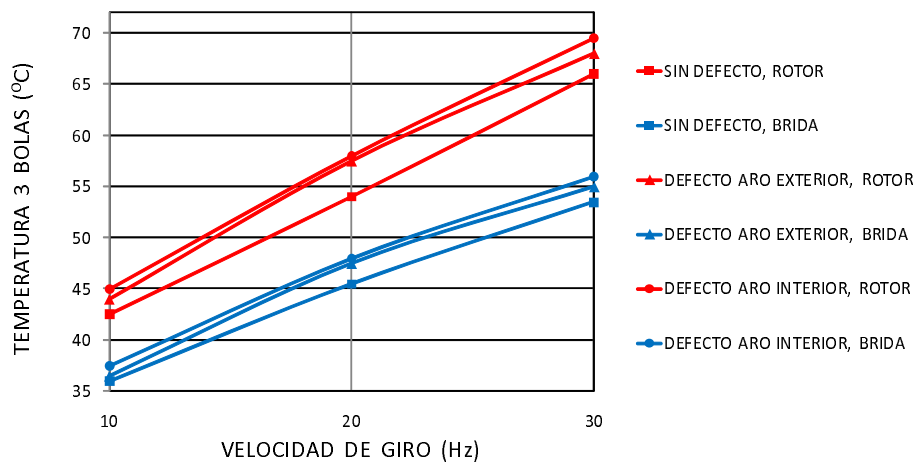


Figura 7.166 Temperatura en un rodamiento con 3 bolas a los 90 minutos de funcionamiento

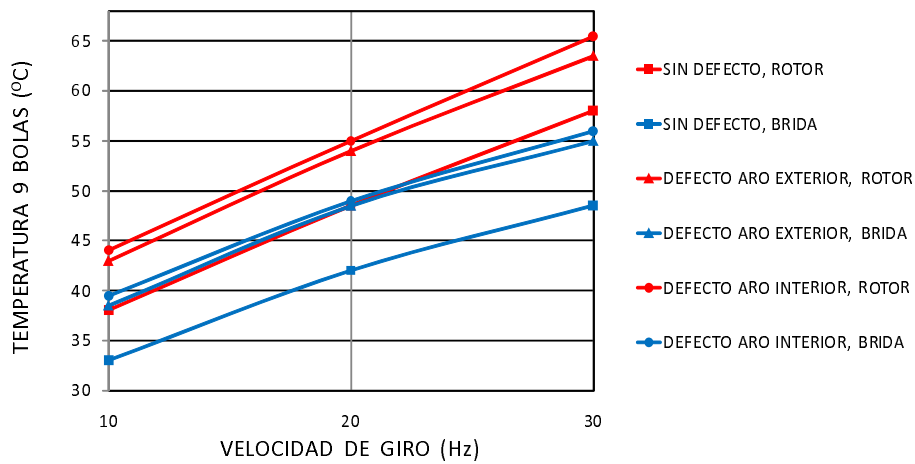


Figura 7.167 Temperatura en un rodamiento SKF 6206 a los 90 minutos de funcionamiento

7.9. RELACIÓN ENTRE EL MODELO DINÁMICO Y EL MODELO TÉRMICO

Tal y como se vio en el capítulo 4, el calor generado en el rodamiento cuando éste se encuentra cargado y en movimiento, puede ser evaluado mediante la ecuación 4.1 [112].

$$\dot{q} = 1,047 \cdot 10^{-4} \cdot M_r \cdot n$$

El par resistente M_r incluye: el par resistente debido al lubricante, M_v , el par resistente debido a la fricción, M_f , el par resistente originado por el movimiento de espín de la bola, M_s y el par resistente causado por el movimiento giroscópico de la bola, M_g .

$$M_r = M_v \cdot M_f \cdot M_s \cdot M_g$$

El par resistente debido al lubricante puede calcularse utilizando la ecuación 7.1

$$M_v = 10^{-7} \cdot f_o \cdot (v_o \cdot n)^{\frac{2}{3}} \cdot dm^3 \cdot v_o \cdot n \quad (7.1)$$

Donde:

- f_o , es un coeficiente que depende del tipo de rodamiento y de su lubricación.
- v_o , es la viscosidad cinemática del lubricante.
- n , es la velocidad de rotación.
- dm , es el diámetro medio del rodamiento.

El par resistente originado por la fricción viene dado por la ecuación 4.7, estudiada en el capítulo 4.

$$Mr = f_1 \cdot F_\beta \cdot dm$$

El par resistente causado por el movimiento de espín de la bola puede evaluarse mediante la ecuación 7.2 [297].

$$M_s = \frac{3 \cdot \mu \cdot Q \cdot \gamma \cdot \varepsilon}{8} \quad (7.2)$$

Donde:

- μ , es el coeficiente de rozamiento de la bola con la pista de rodadura.
- Q , es la carga que actúa sobre cada bola del rodamiento.
- γ , es el ángulo de contacto del rodamiento.
- ε , es la integral elíptica de segunda especie evaluada sobre las superficies de contacto bola-pista de rodadura.

El par resistente causado por el movimiento giroscópico de cada bola del rodamiento viene dado por la ecuación 7.3

$$M_s = \frac{\rho_{bo} \cdot \pi \cdot d_{bo}^5 \cdot \omega_R \cdot \omega_{jaula} \cdot \text{sen}(\lambda)}{60} \quad (7.3)$$

Donde:

- ρ_{bo} , es la densidad del material de la bola.
- d_{bo} , es el diámetro de la bola.
- ω_R , es la velocidad angular de la bola respecto a su propio eje.
- ω_{jaula} , es la velocidad orbital de la bola respecto a el eje del rodamiento.

- λ , es el ángulo que forman el vector velocidad angular ω_R y el eje del rodamiento.

Considerando los distintos componentes del par de rozamiento, el calor generado en el rodamiento viene dado por la ecuación 7.4:

$$\dot{q} = 1,047 \cdot 10^{-4} \cdot \sum M_{ri} \cdot n_i$$

$$\dot{q} = 1,047 \cdot 10^{-4} \cdot [n \cdot (M_v + M_f + M_g) + n_s \cdot M_s] \quad (7.4)$$

siendo n la velocidad de rotación del rodamiento y n_s la velocidad de spin de la bola considerada.

Particularizando la ecuación 7.4 para el rodamiento analizado tenemos:

1. Como el rodamiento no se encuentra lubricado, no podemos considerar rozamientos debidos al lubricante y, por tanto, $M_v = 0$.
2. Puesto que el rodamiento estudiado es rígido de bolas y, además, no existe carga axial sobre el mismo, el ángulo de contacto es de $\gamma = 0^\circ$, por tanto, el rozamiento debido al movimiento de espín de las bolas teóricamente es cero, $M_s = 0$.
3. Por el mismo motivo descrito en el punto 2, resulta que el vector velocidad angular de la bola sobre su propio eje, ω_R , y el eje del rodamiento, son paralelos, por tanto, $\lambda = 0^\circ$, resulta que el par resistente causado por el movimiento giroscópico de las bolas, también es cero, $M_g = 0$.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, el calor generado en el rodamiento viene, finalmente, dado por:

$$\dot{q} = 1,047 \cdot 10^{-4} \cdot M_f \cdot n \quad (7.5)$$

Para un rodamiento de 3 bolas, a partir del resultado de la ecuación 4.30, se deduce que:

$$\dot{q} = 1,047 \cdot 10^{-4} \cdot 0'002 \cdot F_r^{1'55} \cdot n \quad (7.6)$$

Para un rodamiento de 9 bolas, teniendo en cuenta en este caso el resultado de la ecuación 4.32 resulta:

$$\dot{q} = 1,047 \cdot 10^{-4} \cdot 0'0011 \cdot F_r^{1'55} \cdot n \quad (7.7)$$

Se observa, pues, que el calor generado en el rodamiento depende, en este caso, únicamente de la carga radial aplicada al rodamiento y de la velocidad de giro. Esta carga será igual a las fuerzas que actúan sobre el conjunto anillo interno rotor.

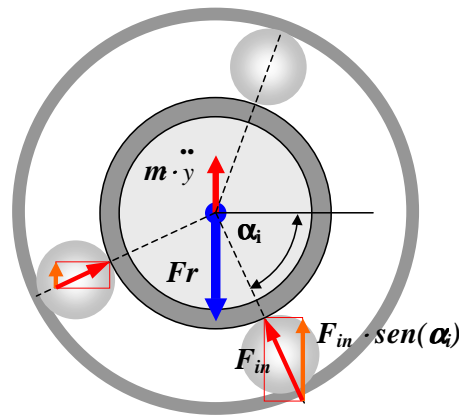


Figura 7.168 Fuerzas que actúan en el sistema rotor-aro interno

De la Figura 7.168 puede deducirse, en general, que:

$$F_r = m \cdot \ddot{y} + \sum F_{in} \cdot \sin(\alpha_i) = (m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{y} + \sum C_{in} \cdot \delta_{in} \cdot \sin(\alpha_i) \quad (7.8)$$

Sustituyendo en la ecuación 7.7 resulta finalmente:

$$\dot{q} = 1,047 \cdot 10^{-4} \cdot 0'0011 \cdot [(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{y} + \sum C_{in} \cdot \delta_{in} \cdot \sin(\alpha_i)]^{1'55} \cdot n \quad (7.9)$$

Con la simulación del modelo se obtienen los valores instantáneos de las deformaciones en el contacto bola-anillo interno, δ_{in} , Figura 7.169 y de la aceleración, \ddot{y} , Figura 7.170. Con estos valores, obtenidos de la simulación del modelo dinámico, introducidos en la ecuación 7.9, se calcula la potencia calorífica generada en el rodamiento.

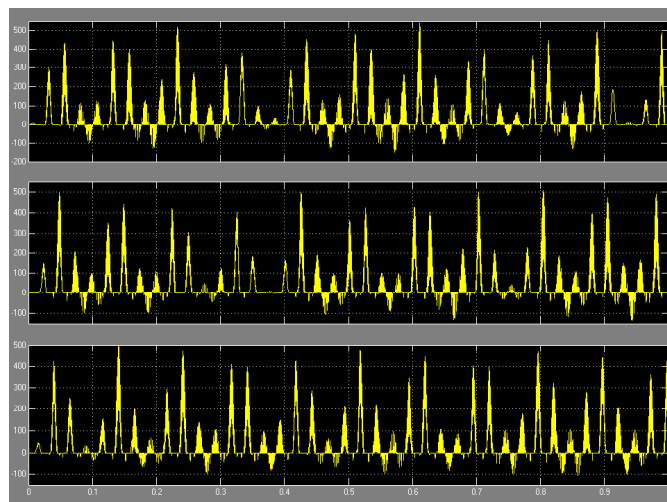


Figura 7.169 Reacciones en las bolas correspondientes a un modelo de rodamiento de 3 bolas

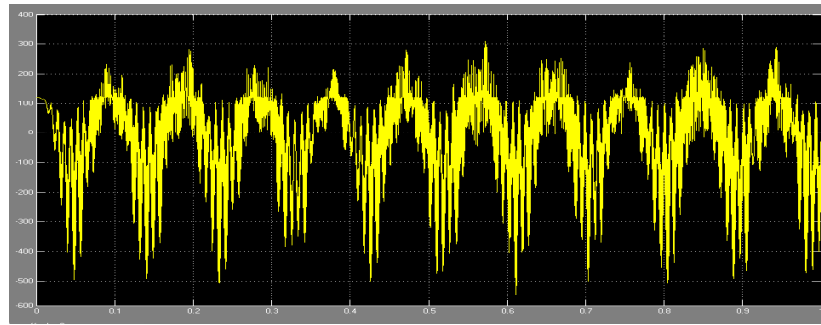


Figura 7.170 Componente inercial del rotor de un modelo de rodamiento de 3 bolas

7.10. CÁLCULO DEL PAR RESISTENTE A PARTIR DEL MODELO TÉRMICO

Para conseguir la alta correlación mostrada en la Figura B.36 entre las curvas de calentamiento experimental y simulada, es necesario introducir en el modelo, además de los coeficientes de radiación-convención de todas las superficies del mismo, las fuentes de calor. Esto se realiza seleccionando una o varias superficies del modelo e indicando el valor de la potencia calorífica adjudicada a las mismas. Por ello, a partir del modelo térmico del rodamiento, es posible obtener la potencia calorífica para unas circunstancias especificadas del modelo (número de bolas y presencia de defecto) para una velocidad de giro determinada.

$$\dot{q} = 1,047 \cdot 10^{-4} \cdot M_r \cdot n \quad (7.10)$$

En la gráfica de la Figura 7.171 se pueden observar las curvas de la evolución potencia calorífica generada por un rodamiento, en función de la velocidad de giro, con una carga radial de 3000 N., para:

- Modelo SKF.
- Modelo SKF ajustado.
- Modelo Palmgren 3 bolas.
- Modelo Palmgren 9 bolas.
- Rodamiento SKF 6206 modificado con 3 bolas, sin defecto.
- Rodamiento SKF 6206 modificado con 3 bolas, con defecto en anillo externo.
- Rodamiento SKF 6206 modificado con 3 bolas, con defecto en anillo interno.
- Rodamiento SKF 6206 sin defecto.
- Rodamiento SKF 6206 con defecto en anillo externo.
- Rodamiento SKF 6206 con defecto en anillo interno.

En la Figura 7.171 las líneas discontinuas representan los valores obtenidos mediante procedimientos teóricos mientras que las líneas continuas representan valores experimentales (líneas rojas rodamientos de 3 bolas, líneas azules rodamientos de 9 bolas). Además las líneas con marcadores cuadrados indican que no hay defecto, marcadores triangulares indican defecto exterior y marcadores redondos indican defecto en anillo interior.

Puede observarse la discrepancia de los modelos SKF y SKF ajustado respecto a los valores experimentales. La causa de esta diferencia se encuentra en la forma de ejecución de los ensayos experimentales, ya que estos se realizan con rodamientos débilmente lubricados en tanto que los modelos SKF suponen una perfecta lubricación de los rodamientos.

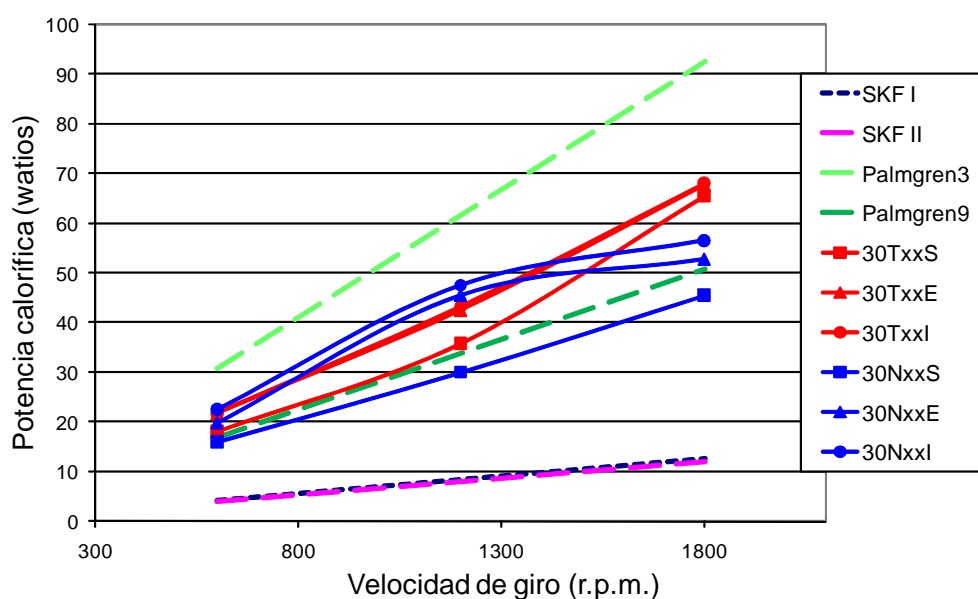


Figura 7.171 Potencia calorífica generada en el rodamiento

n (r.p.m.)	600	1200	1800
SKF I	4,2	8,5	12,7
SKF II	4	8	12
Palmgren3	30,8	61,6	92,4
Palmgren9	16,9	33,9	50,8
30TxxS	18	35,75	65,5
30TxxE	21,75	42,5	67,75
30TxxI	21,75	43,25	68
30NxxS	16	30	45,5
30NxxE	19,8	45,5	52,75
30NxxI	22,5	47,5	56,5

Puesto que las curvas derivadas de los ensayos experimentales de los rodamientos con 3 y 9 bolas encuentran solapadas, se decide mostrar estos casos de forma independiente. La Figura 7.173 muestra los valores obtenidos ensayando rodamientos de 3 bolas y la Figura 7.172 presenta los valores generados ensayando rodamientos con 9 bolas.

En la Figura 7.172 se observa como la evolución de la potencia calorífica generada por el rodamiento de 9 bolas, en función de la velocidad de giro, es similar cuantitativa y cualitativamente (pendiente de la recta) a la que predice el modelo de Palmgren, particularizado para un rodamiento de 9 bolas.

Como era de esperar, los valores de la potencia calorífica de los rodamientos de 9 bolas con defecto son superiores al caso de sin defecto y también a los derivados del modelo de Palmgren.

Los valores de la potencia calorífica son bastante parecidos en el caso de ambos defectos. La evolución de la potencia calorífica en estos casos, al principio, comienza con una pendiente mayor que la del modelo sin defecto y el modelo de Palmgren pero después esta decrece aunque siempre es positiva.

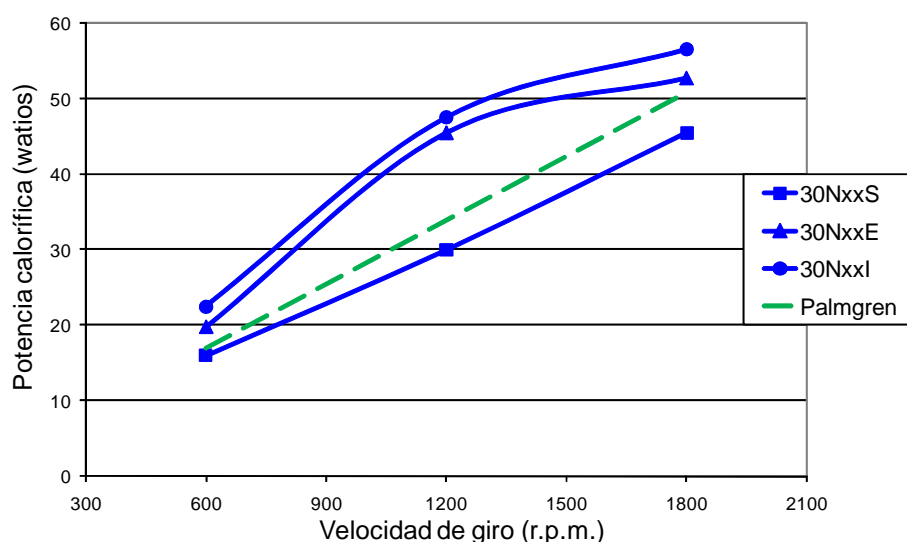


Figura 7.172 Potencia calorífica generada en el rodamiento

n (r.p.m.)	30NxxS	30NxxE	30NxxI	Palmgren9
600	16	19,8	22,5	16,9
1200	30	45,5	47,5	33,9
1800	45,5	52,75	56,5	50,8

En la Figura 7.173 se observa como la evolución de la potencia calorífica generada por el rodamiento de 3 bolas, en función de la velocidad de giro, es similar cualitativamente a la que predice el modelo de Palmgren, para rodamiento de 3 bolas, pero cuantitativamente los valores de la potencia calorífica son sensiblemente inferiores.

Los valores de la potencia calorífica de los rodamientos de 3 bolas con defecto son ligeramente superiores al caso de sin defecto pero claramente inferiores a los extraídos del modelo de Palmgren.

Los valores de la potencia calorífica son casi idénticos en el caso de ambos defectos. La evolución de la potencia calorífica en estos casos es similar al caso de los rodamientos sin defecto.

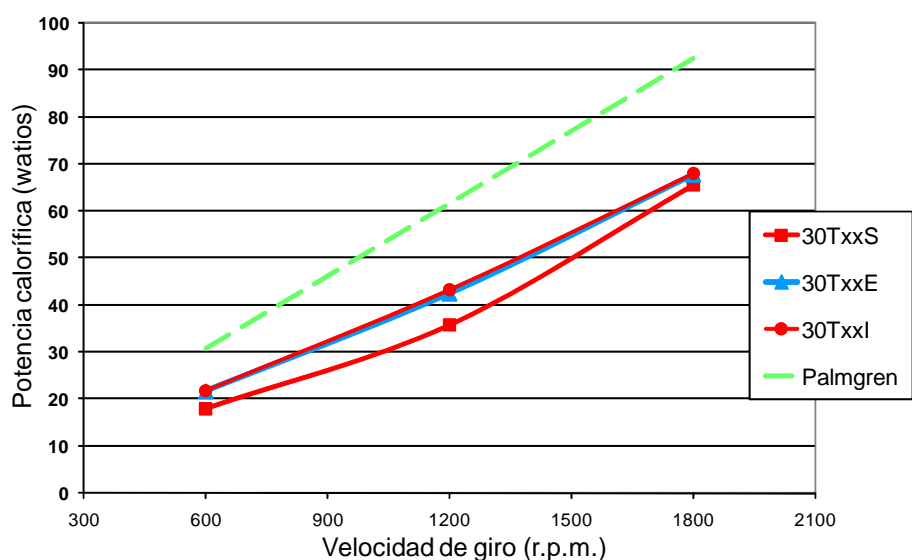


Figura 7.173 Potencia calorífica generada en el rodamiento

n (r.p.m.)	30TxxS	30TxxE	30TxxI	Palmgren3
600	18	21,75	21,75	30,8
1200	35,75	42,5	43,25	61,6
1800	65,5	67,75	68	92,4

Capítulo 8

CONCLUSIONES

8.1. CONCLUSIONES

El objetivo principal de esta tesis es la propuesta y desarrollo de un modelo analítico avanzado que nos permita obtener los parámetros cinemático-dinámicos de un rodamiento a bolas en un sistema mecánico realista. Para ello, se ha modelado un rodamiento de bolas mediante técnicas newtonianas y lagrangianas contemplando la posibilidad de incluir diferentes geometrías y parámetros mecánicos, en particular: presencia de defectos en los caminos de rodadura, cálculo y análisis del par de rozamiento en el rodamiento, estudio y análisis del régimen transitorio de las vibraciones y la temperatura desde arrancada.

El modelo propuesto da lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, y ha sido resuelto utilizando el código Matlab-Simulink como caso característico de sistema no lineal. Se ha desarrollado una metodología, véase la Figura 8.1 donde se han integrado los parámetros geométricos, mecánicos y la influencia de la temperatura, para obtener señales periódicas similares a las reales. En la bibliografía especializada, este problema ha sido resuelto para valores muy alejados de los reales y con este modelo se ha conseguido conjugar parámetros de entrada realistas (masas, amortiguamiento, rigideces, etc.) con sus correspondientes soluciones periódicas próximas al comportamiento real validadas posteriormente.

En este trabajo se obtiene, de forma experimental, mediante ensayos de impacto, el valor del coeficiente de amortiguamiento en los rodamientos, que posteriormente se utiliza en las ecuaciones de los modelos y cuyos resultados se alejan de los sugeridos por la literatura clásica, ampliamente utilizados desde entonces. El amortiguamiento es un parámetro muy importante en el modelo de simulación.

Otro hito logrado es la validación de los modelos de rodamientos mediante el contraste de la señal generada al resolver el sistema de ecuaciones no lineal con la señal obtenida de los ensayos experimentales. Para ello se ha realizado el análisis y comparación en el dominio del tiempo, dominio de la frecuencia y dominio tiempo-frecuencial (wavelet), siendo especialmente significativo el espectro de la envolvente. Para realizar los ensayos experimentales se ha desarrollado un banco universal de pruebas de rodamientos, con el sistema de medida correspondiente.

Llegados a este punto se puede afirmar que el objetivo principal de esta tesis se ha cumplido satisfactoriamente.

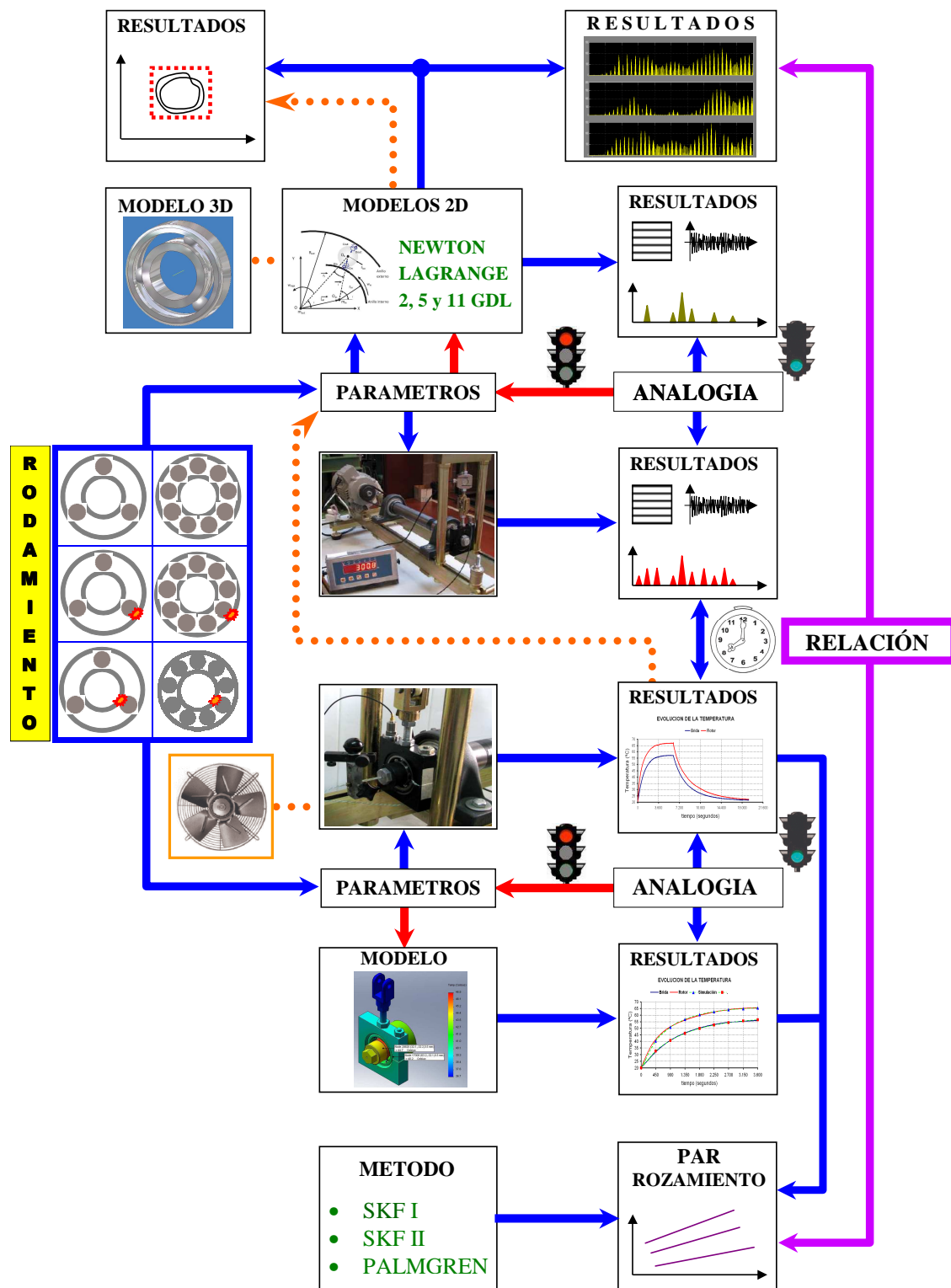


Figura 8.1 Diagrama de bloques del desarrollo de esta tesis

El trabajo de investigación presentado en esta tesis se ultima en esta sección donde además, se detallan las conclusiones derivadas de la aplicación de las técnicas utilizadas para modelar elementos mecánicos (modelo dinámico en capítulos 3 y modelo térmico en capítulo 4), resolver las ecuaciones de los modelos (capítulo 5), obtener las señales (vibratoria y térmica) mediante ensayos experimentales (Capítulo 6), la metodología para analizar la señal vibratoria obtenida de dicha simulación dinámica (capítulo 2) y analizar el par de rozamiento mediante las medidas de temperatura en el rotor y la brida (capítulo 4). La Figura 8.1 muestra un diagrama donde se indica la secuencia seguida en el desarrollo de esta tesis.

Una de las principales aportaciones de esta tesis consiste en presentar seis modelos analíticos dinámicos de rodamientos, originales y adaptados a las dimensiones del rodamiento comercial SKF 6206. En todos los modelos presentados cabe la posibilidad de incluir un defecto en el anillo interno, defecto en el anillo externo o defecto en ambos anillos simultáneamente. Los modelos presentados son los siguientes:

1. Modelo de rodamiento con 2 GDL, (de 3 bolas), implementado mediante las ecuaciones de Newton.
2. Modelo de rodamiento con 2 GDL, (de 9 bolas), implementado mediante las ecuaciones de Newton.
3. Modelo de rodamiento con 5 GDL, (de 3 bolas), implementado mediante las ecuaciones de Newton.
4. Modelo de rodamiento con 5 GDL, (de 3 bolas), implementado mediante las ecuaciones de Lagrange.
5. Modelo de rodamiento con 11 GDL, (de 9 bolas), implementado mediante las ecuaciones de Newton.
6. Modelo de rodamiento con 11 GDL, (de 9 bolas), implementado mediante las ecuaciones de Lagrange.

En el capítulo de resultados se puede apreciar una alta correlación de las señales vibratorias generadas por los modelos cuando se han simulado situaciones donde el rodamiento presenta defectos en alguna de sus pistas de rodadura y la señal vibratoria experimental obtenida en el banco de ensayos ante el mismo estado de fallo. Las señales obtenidas en simulación con modelo de rodamiento que incluye un defecto, presentan todas las características que se describen en la literatura, tales como frecuencias de fallo características, BPFE y BPFI, armónicos de estas frecuencias o bandas laterales en las mismas Figuras 7.124 y 7.125.

Otra contribución significativa de esta tesis ha consistido en simplificar de forma considerable la complejidad matemática en los modelos de 5 y 11 GDL implementados utilizando las ecuaciones de Lagrange mediante la hipótesis de hacer constante el ángulo β (Figura 8.2) en la implementación del modelo utilizando la ecuación de Newton ($\beta \leq 1^\circ$). Con esta modificación se ha conseguido una disminución de complejidad sin por ello perder definición en los resultados obtenidos del mismo.

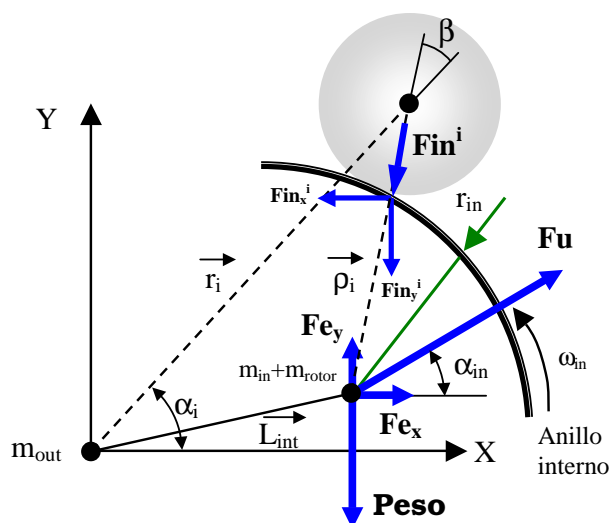


Figura 8.2 Detalle del ángulo β en el modelo general de rodamiento presentado

Otra aportación importante de esta tesis es el diseño de varios bancos de ensayos de rodamientos con los correspondientes utillajes que permitan realizar adecuadamente los ensayos vibratorios y térmicos. Se seleccionaron y fabricaron tres de ellos porque eran los que mejores resultados producían en las simulaciones. Finalmente, para los ensayos experimentales realizados para esta tesis, solamente se utiliza uno de ellos; el que, por tamaño y comportamiento, mejor se adaptaba al rodamiento a ensayar (SKF 6206).

Para esta tesis se realizaron, mediante equipos de laboratorio de medida de vibraciones, las medidas experimentales de vibraciones según distintas constituciones físicas del sistema mecánico y para varios estados de funcionamiento:

- Se utilizaron rodamientos con 3 bolas y rodamientos con 9 bolas.
- Se emplearon rodamientos sin defecto, con defecto en la pista de rodadura del anillo externo y con defecto en la pista de rodadura del anillo interno.
- Con velocidades variables en el aro interior de 5, 10, 20, 30 y 40 Hz.
- Con cargas variables de 100, 500, 1000, 1500, 2000, 2500 y 3000 N.

Se realizaron, mediante equipos de laboratorio de medida de temperatura y vibraciones, las medidas experimentales de vibraciones y de las temperaturas de varios puntos del sistema mecánico y temperatura ambiente, según distintos montajes y para varios estados de funcionamiento:

- Se utilizaron rodamientos con 3 bolas y rodamientos con 9 bolas.
- Se emplearon rodamientos sin defecto, con defecto en la pista de rodadura del anillo externo y con defecto en la pista de rodadura del anillo interno.
- Con velocidades variables de 10, 20 y 30 Hz.

Estos ensayos han permitido validar los modelos, contrastando las señales experimentales con los resultados obtenidos de las simulaciones.

Además, se ha propuesto un modelo térmico cuyas dimensiones y comportamiento se ajustan al sistema brida-rodamiento-rotor del banco de ensayos utilizado en la medida de vibraciones. Los parámetros no dimensionales del modelo son ajustados de forma iterativa utilizando los valores obtenidos en los ensayos experimentales a través de las curvas de evolución térmica (calentamiento y enfriamiento), tal y como se indica en la Figura 8.3.

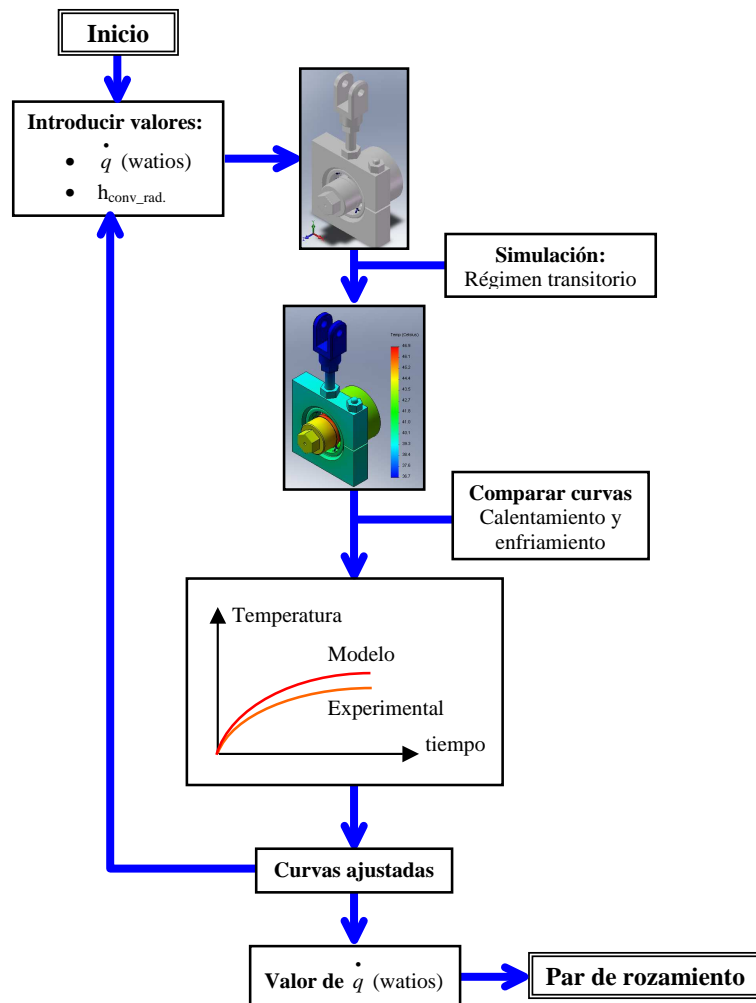


Figura 8.3 Secuencia seguida en la simulación térmica

8.2. TRABAJOS FUTUROS

Como líneas futuras se proponen las siguientes evoluciones o mejoras:

- Realizar un análisis de estabilidad de los modelos para establecer zonas de convergencia y zonas donde es posible realizar las simulaciones oportunas utilizando datos realistas.
- Realizar un interface mediante la herramienta GUI (Graphical User Interface) del software Matlab, de tal forma que se facilite la introducción o modificación de los parámetros más representativos utilizados en las simulaciones, gráficas de resultados e incluso método de simulación.
- Obtener, a partir de las soluciones de los modelos, una representación gráfica del rodamiento donde se muestren los elementos móviles del mismo, como bolas o anillo interno-rotor en movimiento, pudiendo variar la velocidad de la simulación, donde queden además resaltados aquellos puntos en los que se producen los impactos y, también se indique el valor de las fuerzas de contacto.
- Obtener mediante ensayos vibratorios y modelo de comportamiento vibro-térmico la localización de la posición del defecto cuando este se encuentre en la pista de rodadura del anillo externo (posición invariable durante el funcionamiento del rodamiento).
- Realizar las medidas de la evolución térmica en condiciones de refrigeración forzada en lugar de convención natural e incluso con fuente de lubricación.

Apéndice A

EVOLUCIÓN DE LA VIBRACIÓN EN EL TIEMPO

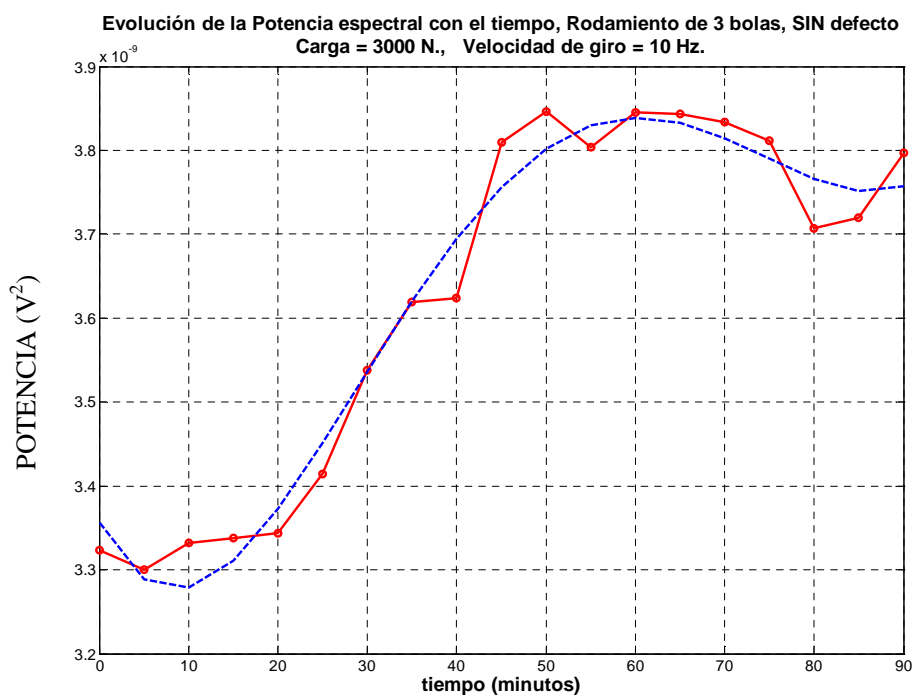


Figura A.1 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 nuevo, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.

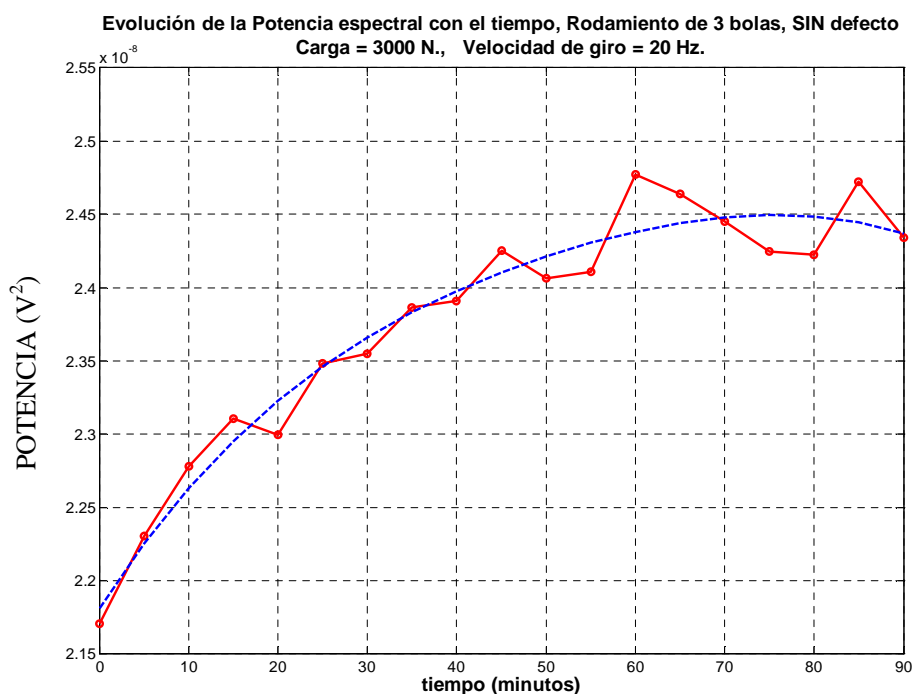


Figura A.2 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 nuevo, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.

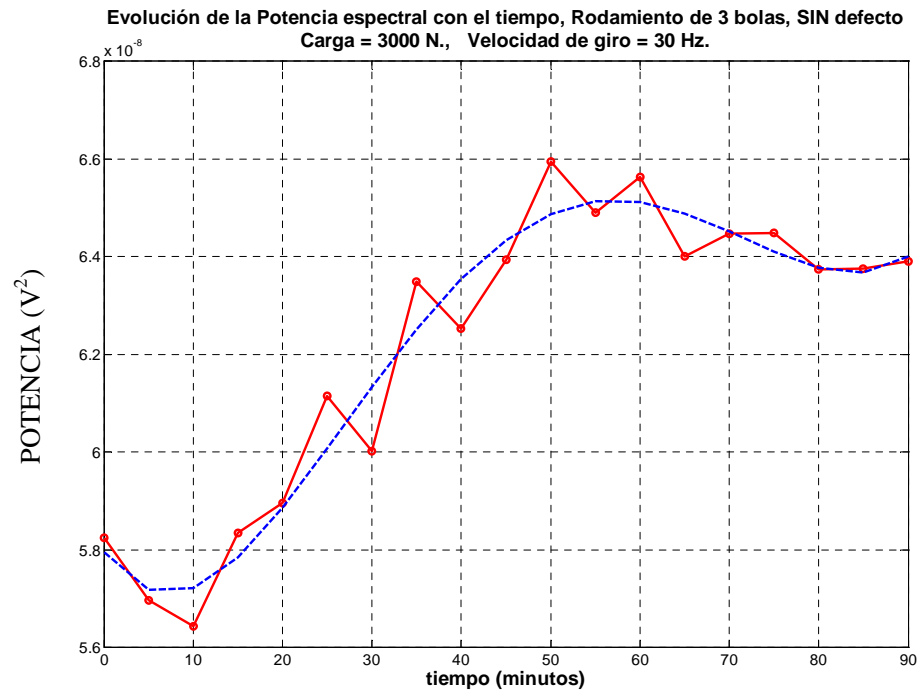


Figura A.3 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 nuevo, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

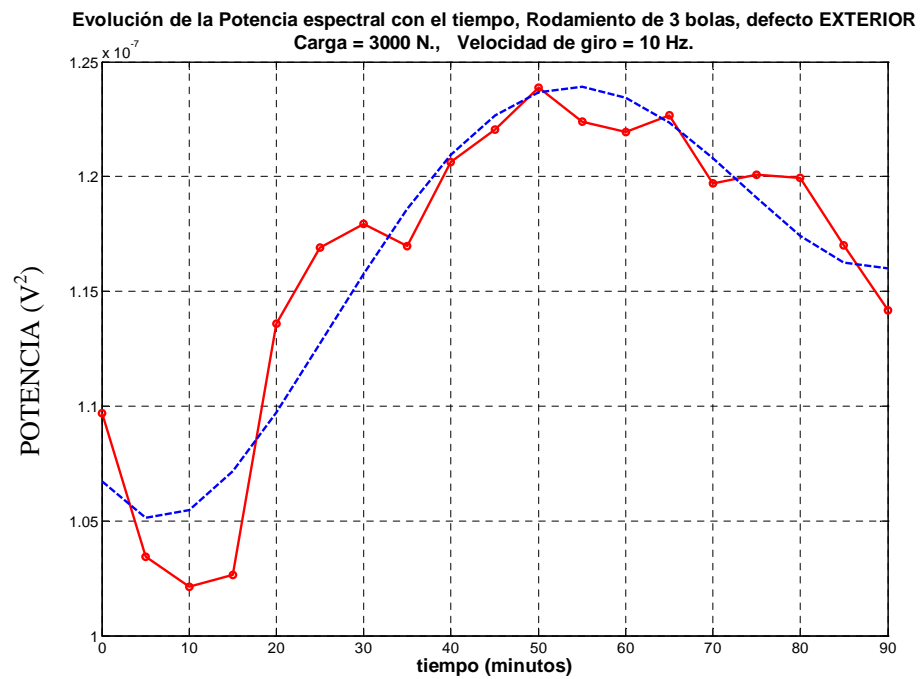


Figura A.4 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.

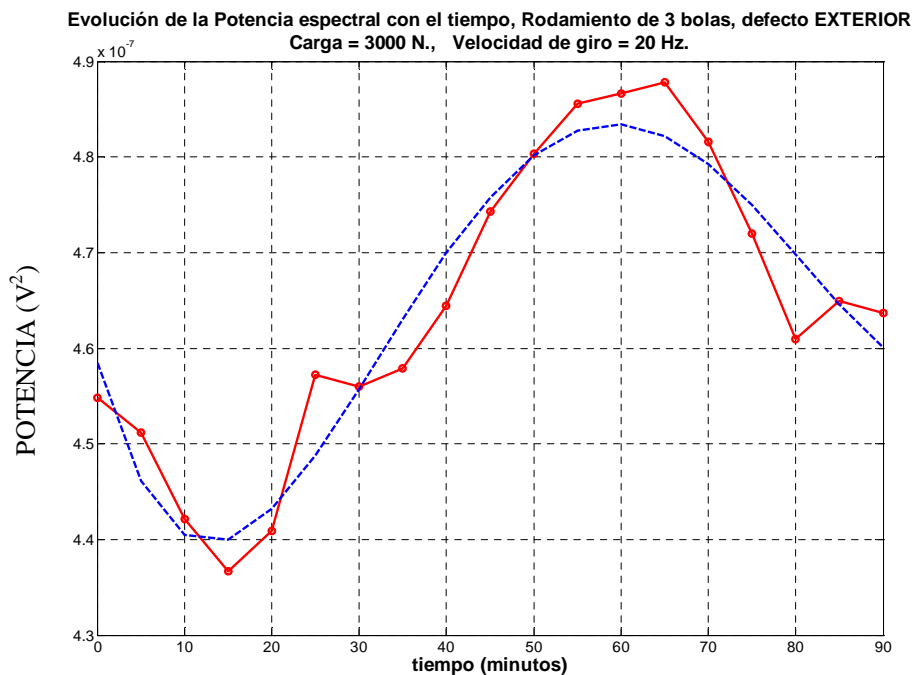


Figura A.5 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.

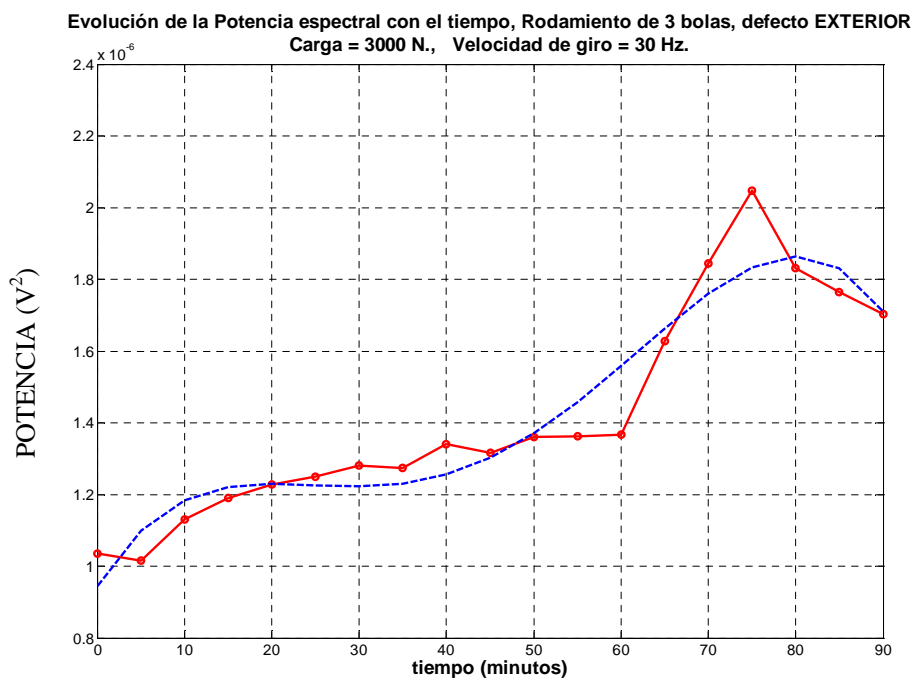


Figura A.6 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

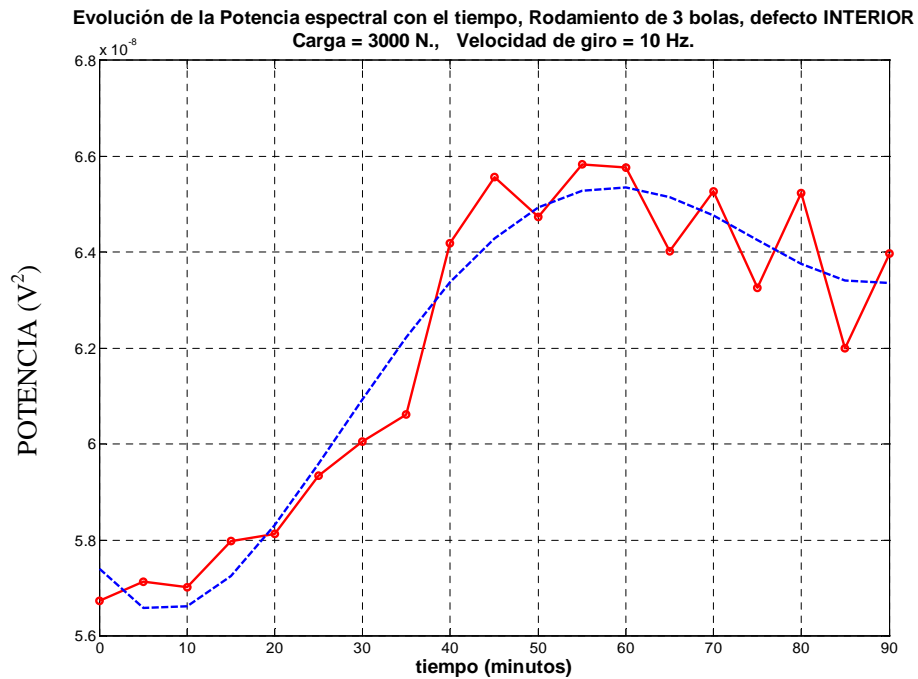


Figura A.7 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.

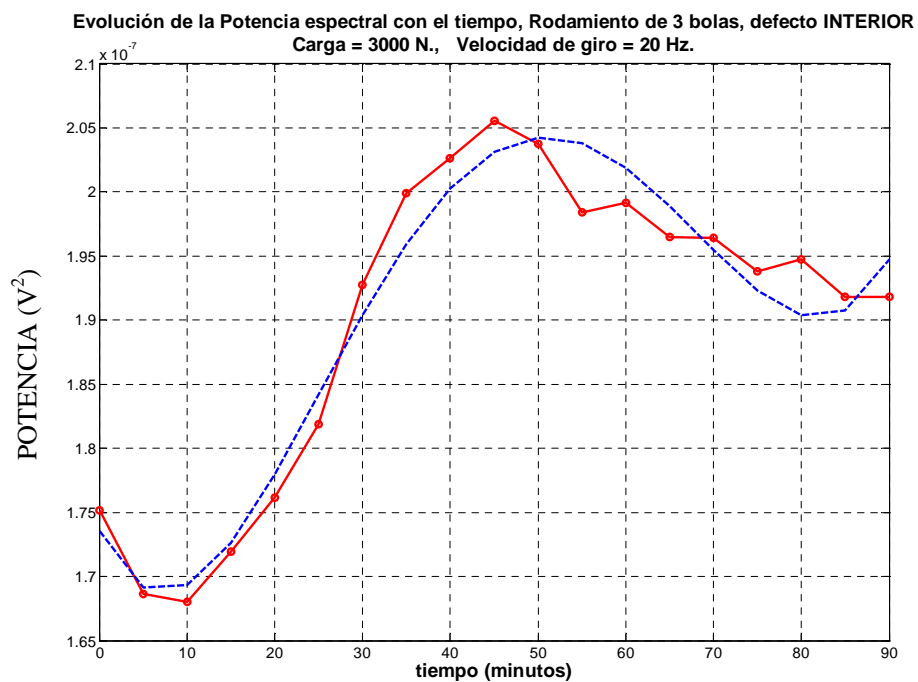


Figura A.8 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.

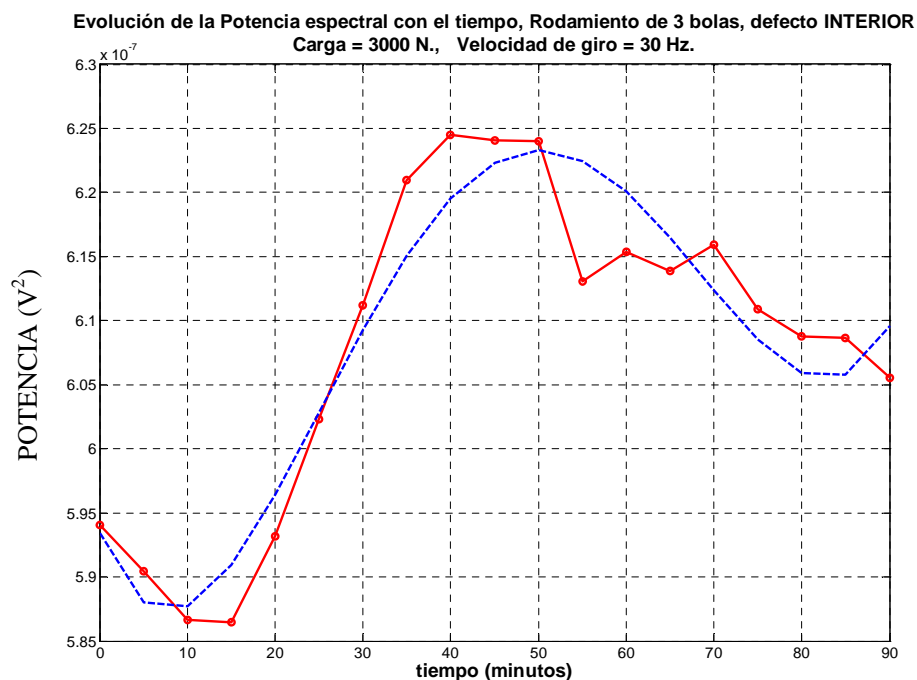


Figura A.9 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

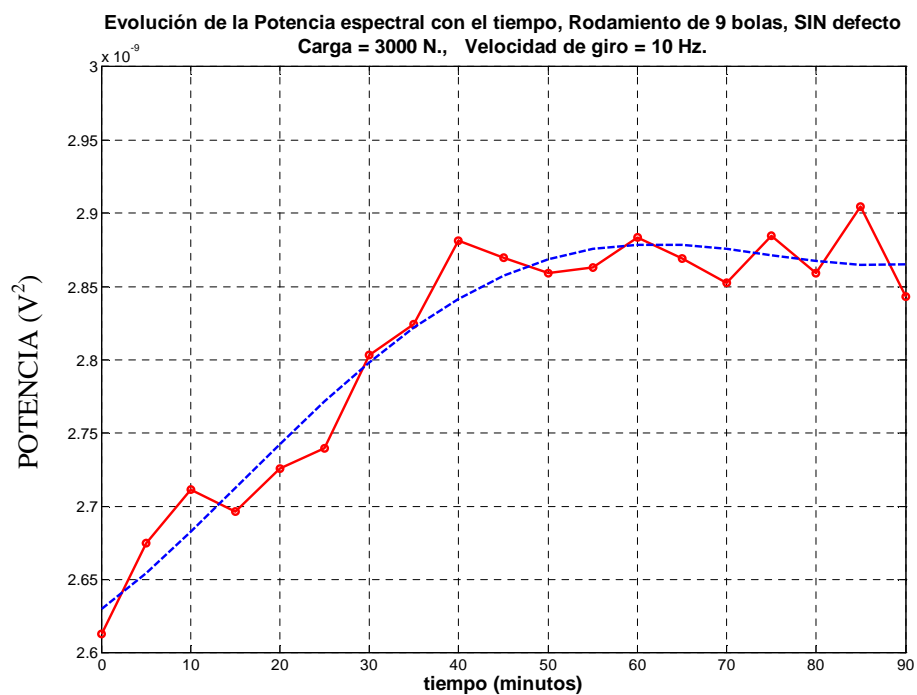


Figura A.10 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 nuevo, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.

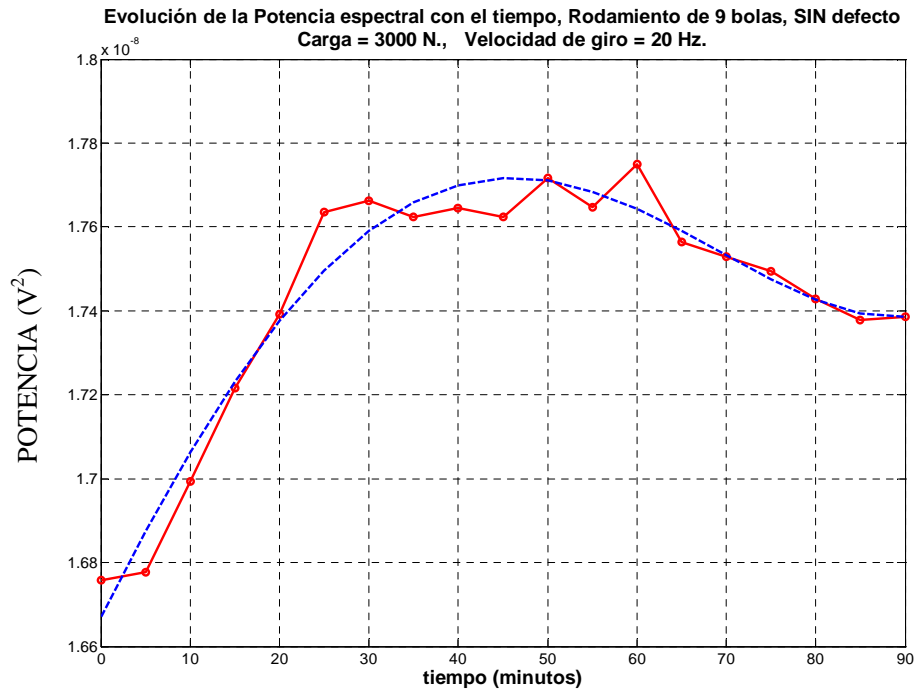


Figura A.11 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 nuevo, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.

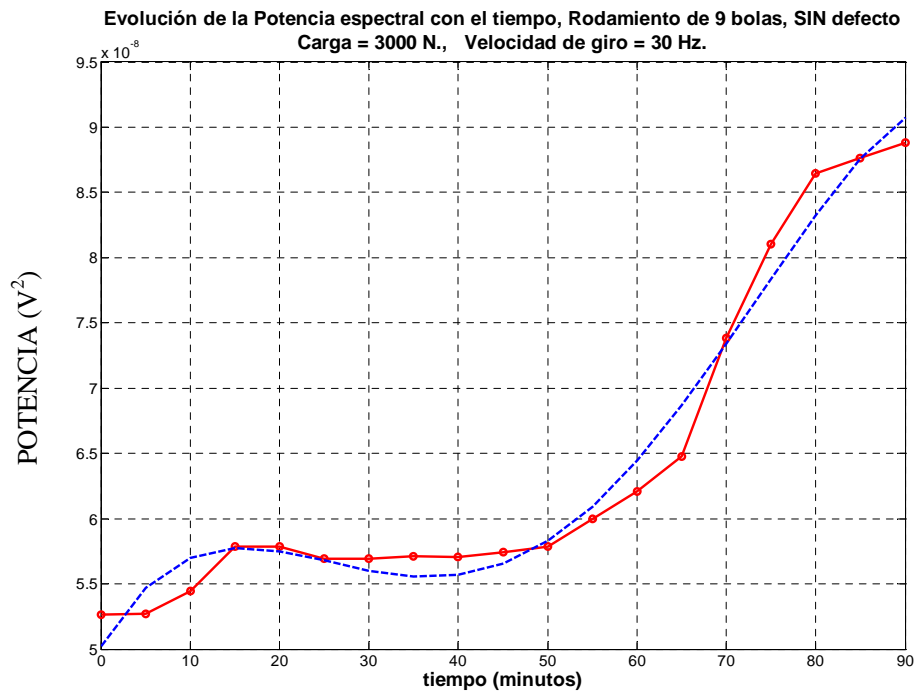


Figura A.12 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 nuevo, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

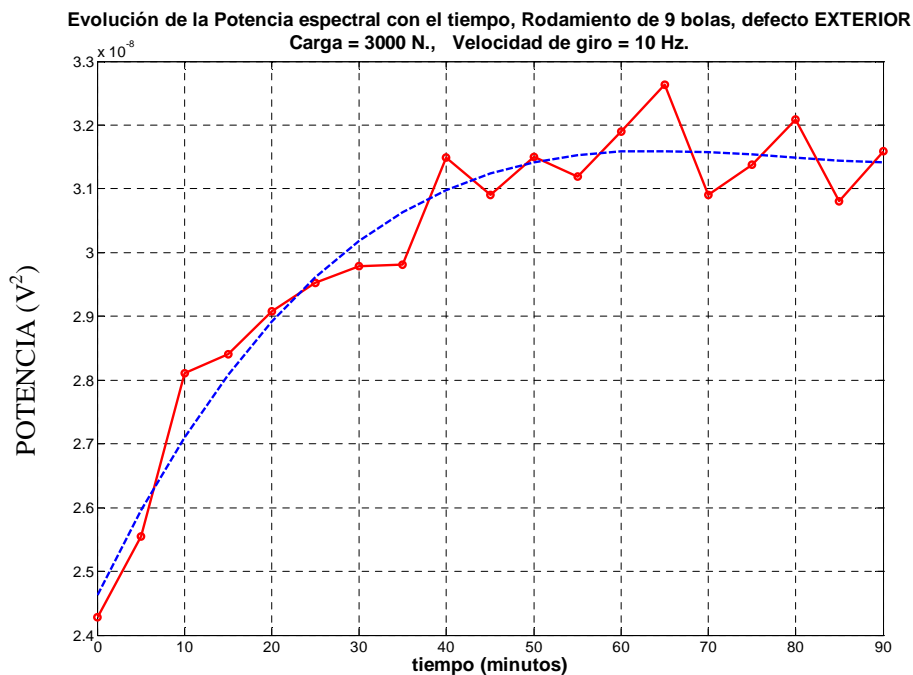


Figura A.13 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.

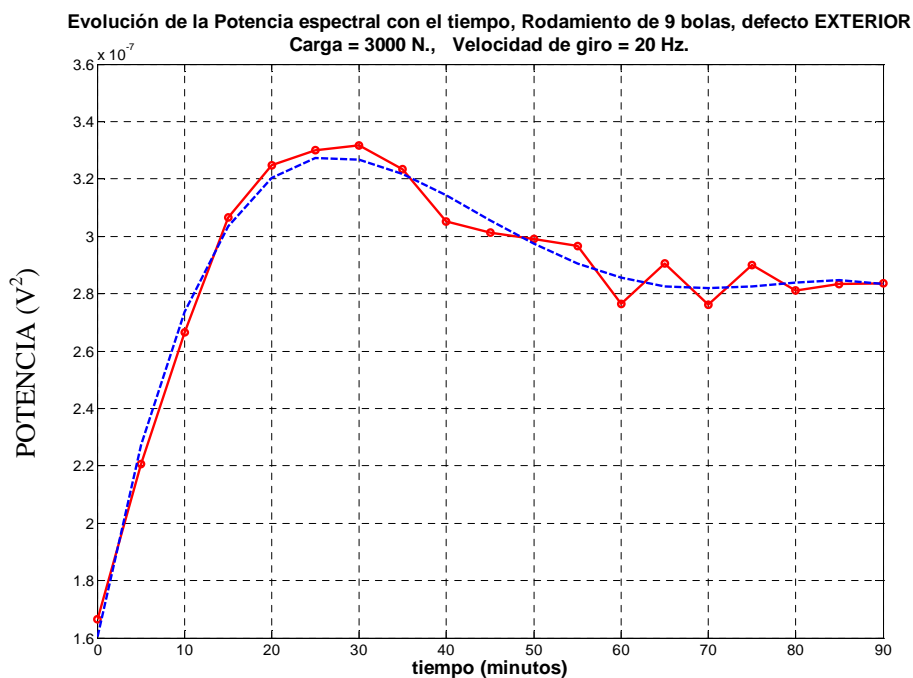


Figura A.14 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.

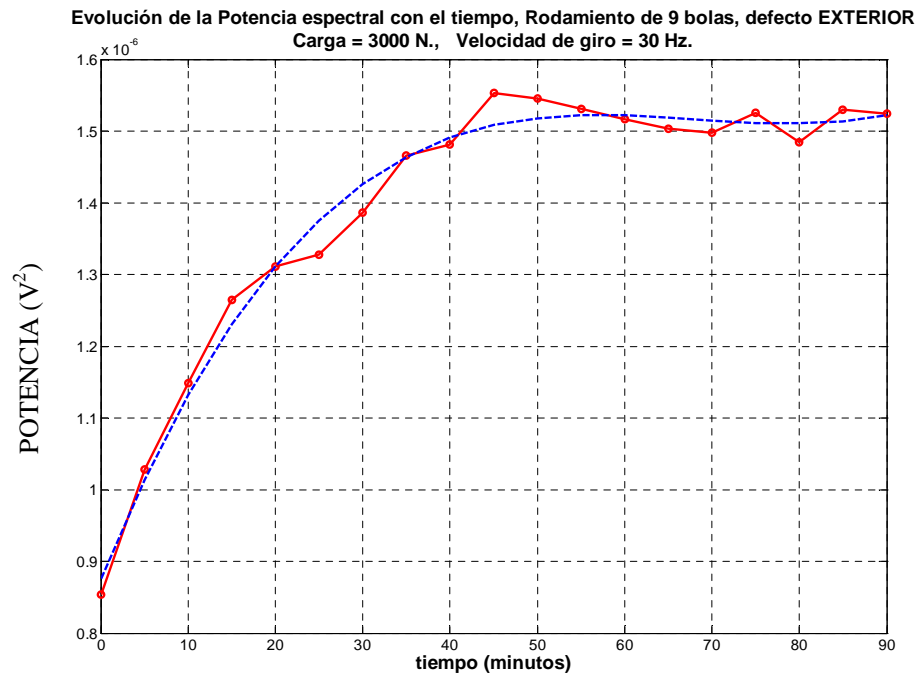


Figura A.15 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

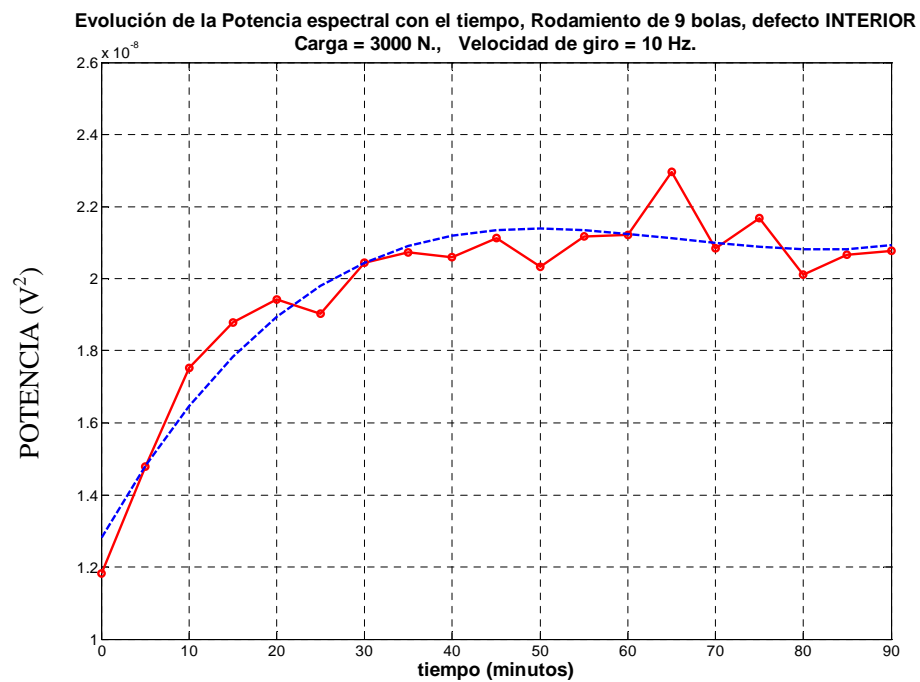


Figura A.16 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.

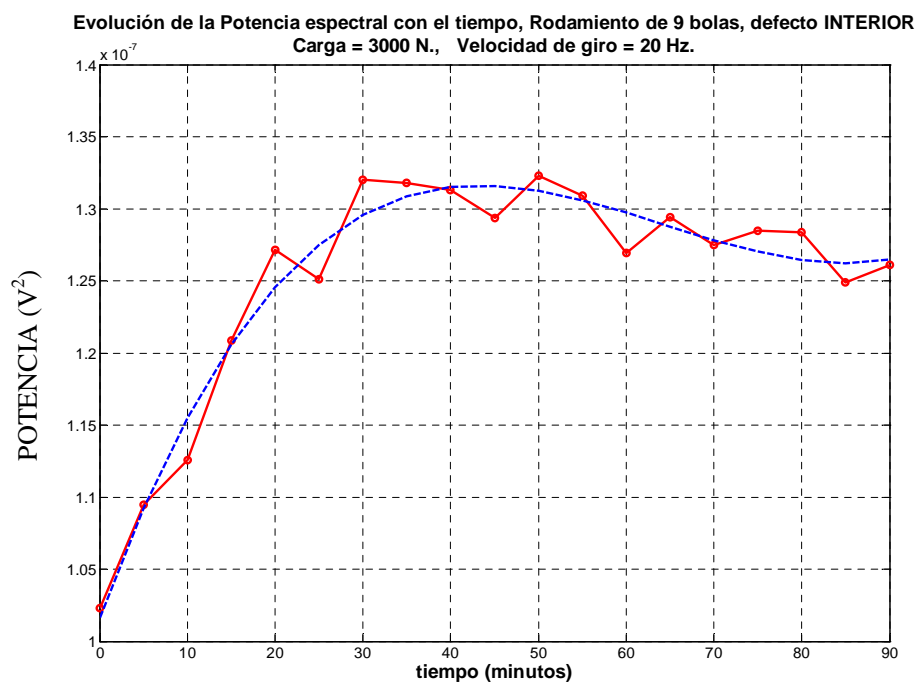


Figura A.17 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.

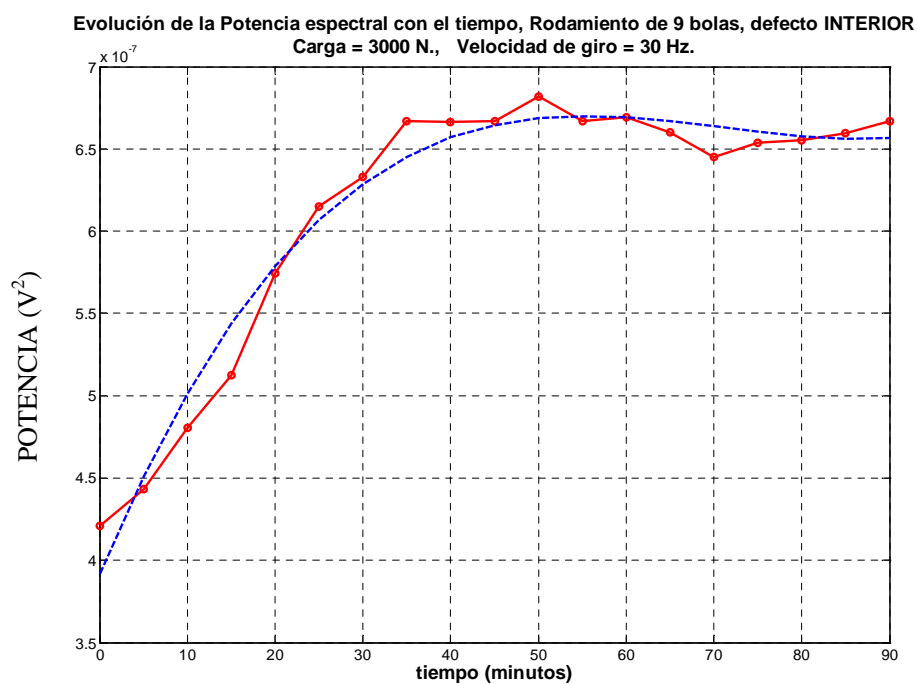


Figura A.18 Evolución de la Potencia Espectral, durante 90 minutos, generada por un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

Apéndice B

EVOLUCIÓN DE LA TEMPERATURA EN EL TIEMPO

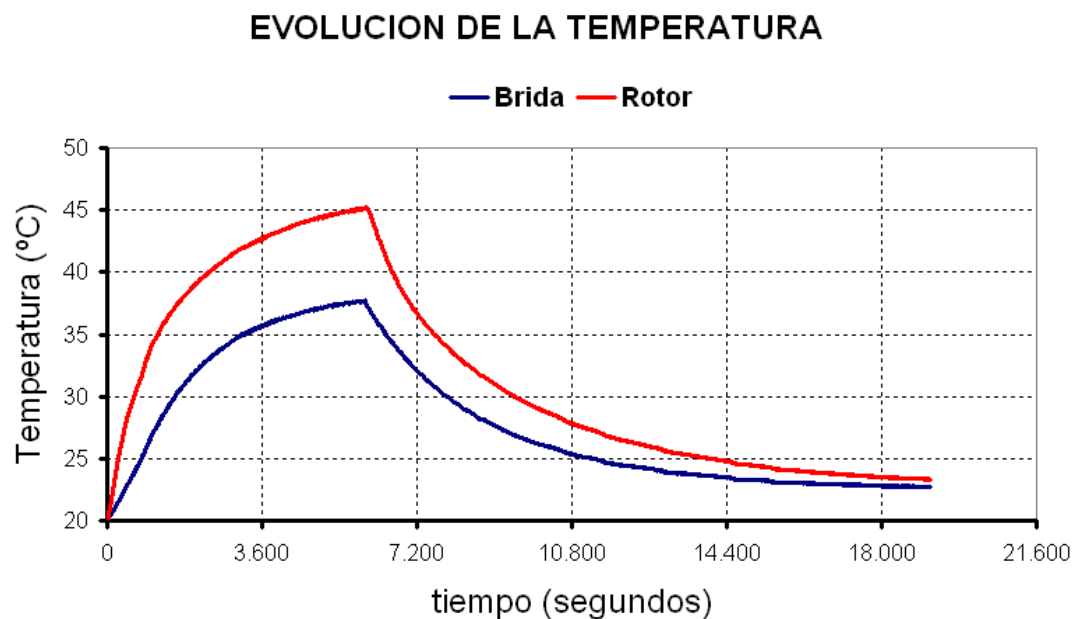


Figura B.1 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 nuevo, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.

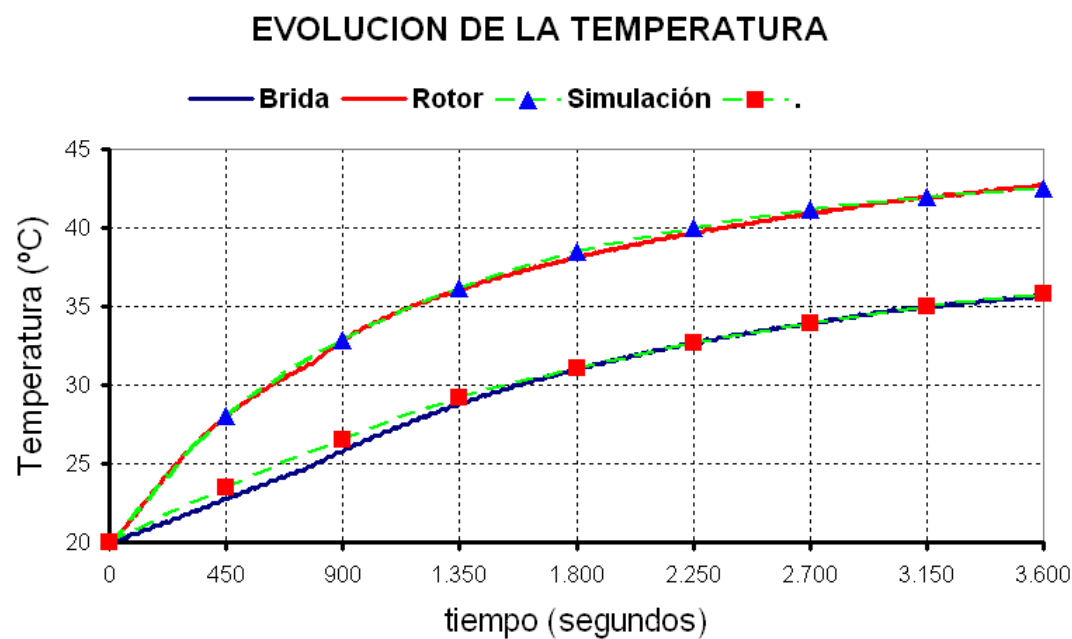


Figura B.2 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 nuevo, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.

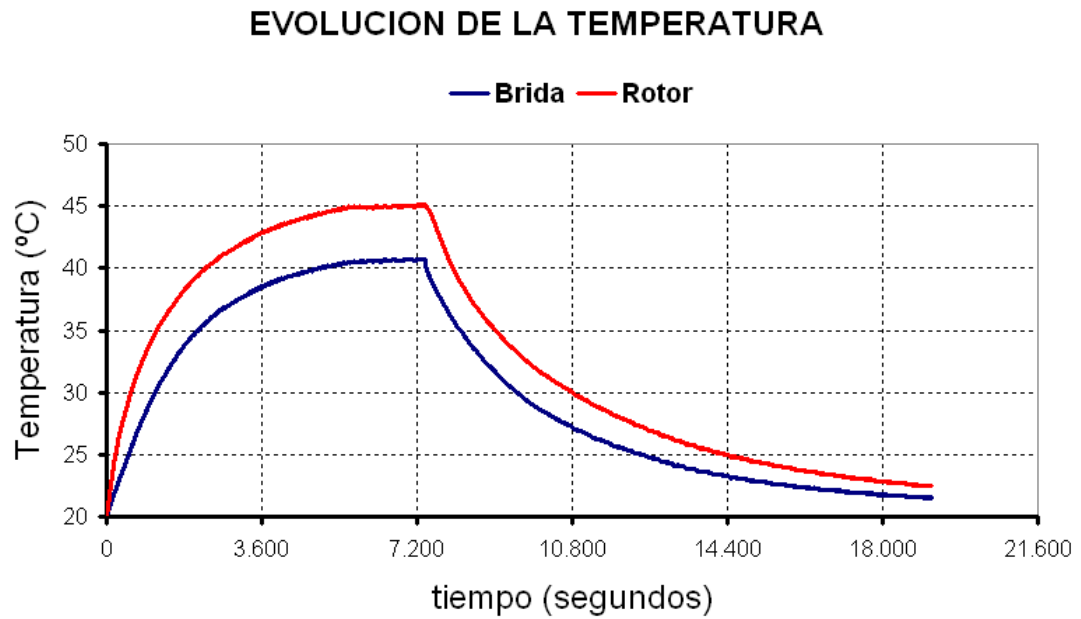


Figura B.3 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.

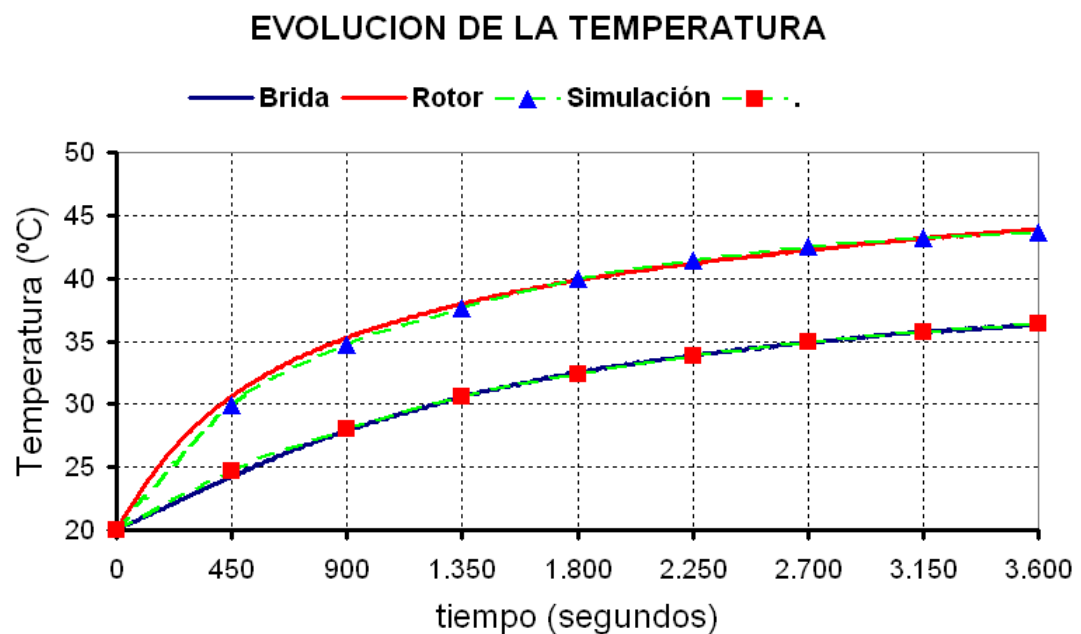


Figura B.4 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.

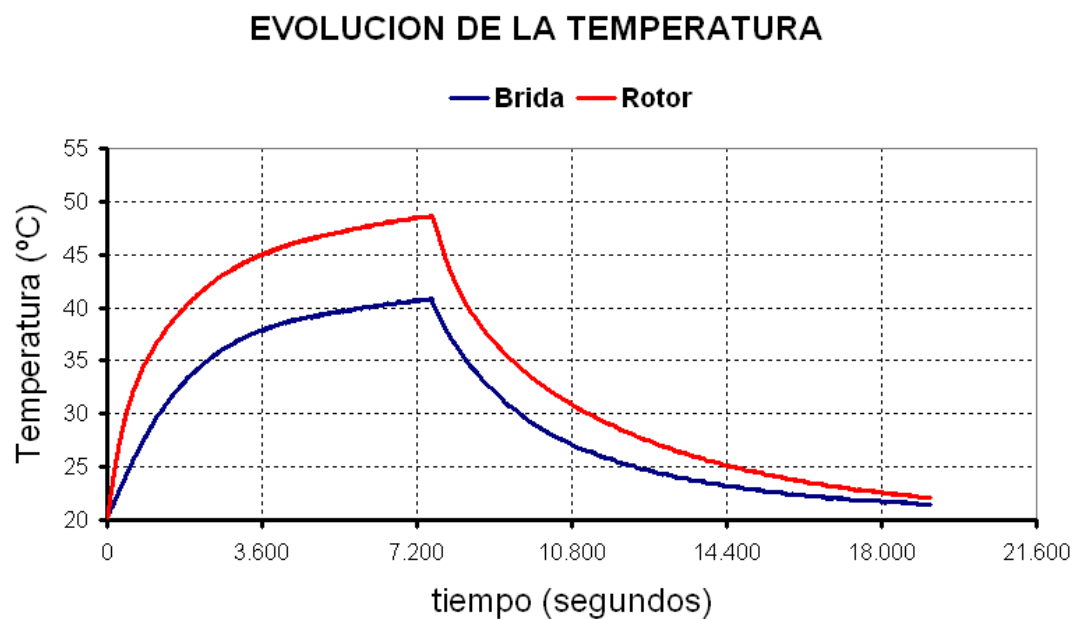


Figura B.5 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.

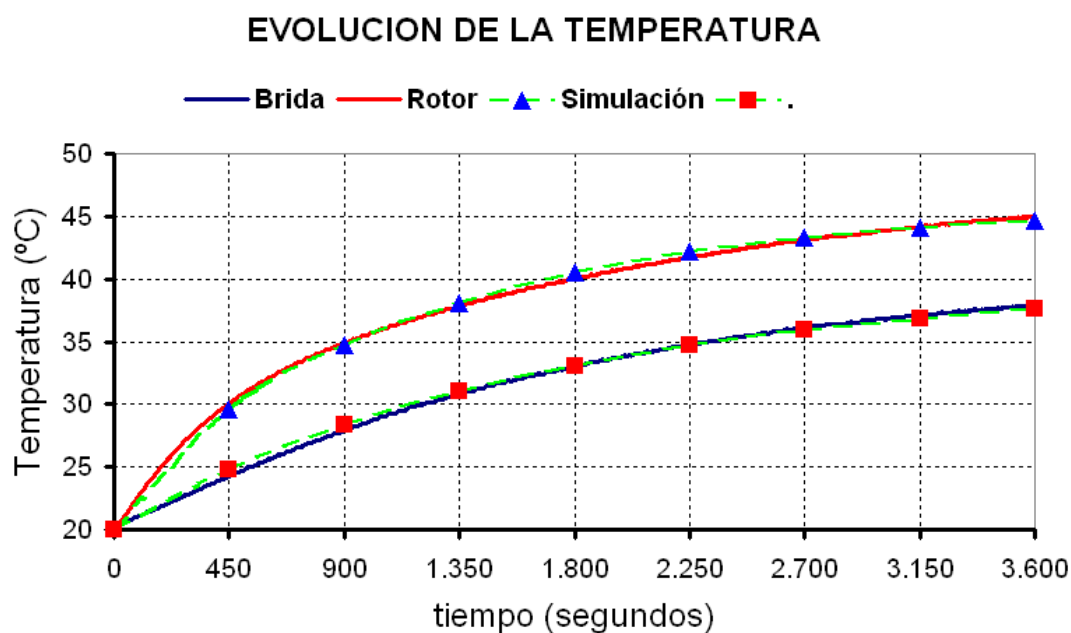


Figura B.6 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.

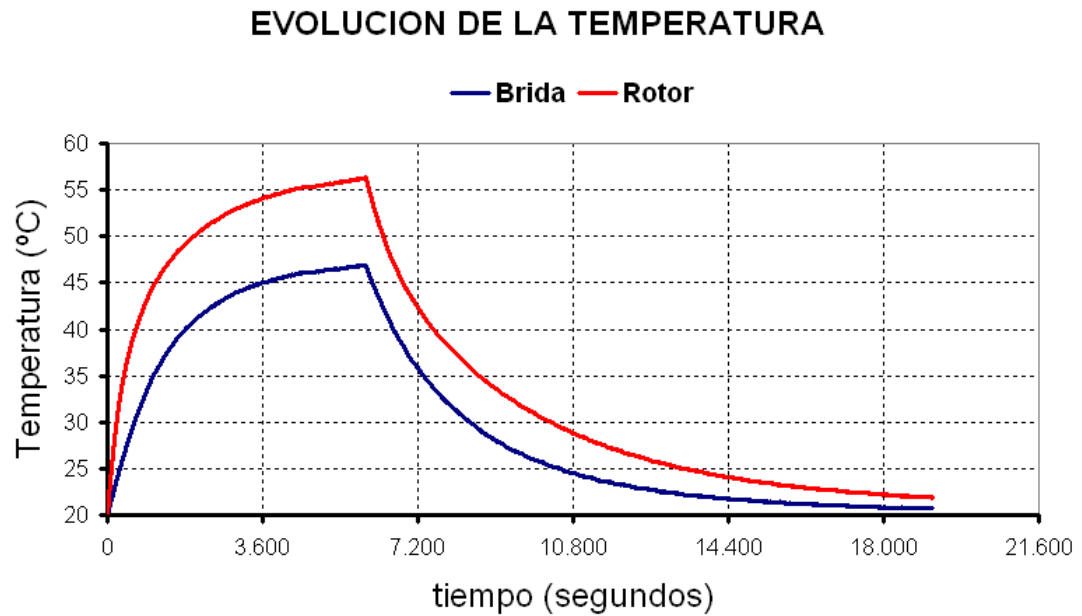


Figura B.7 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 nuevo, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.

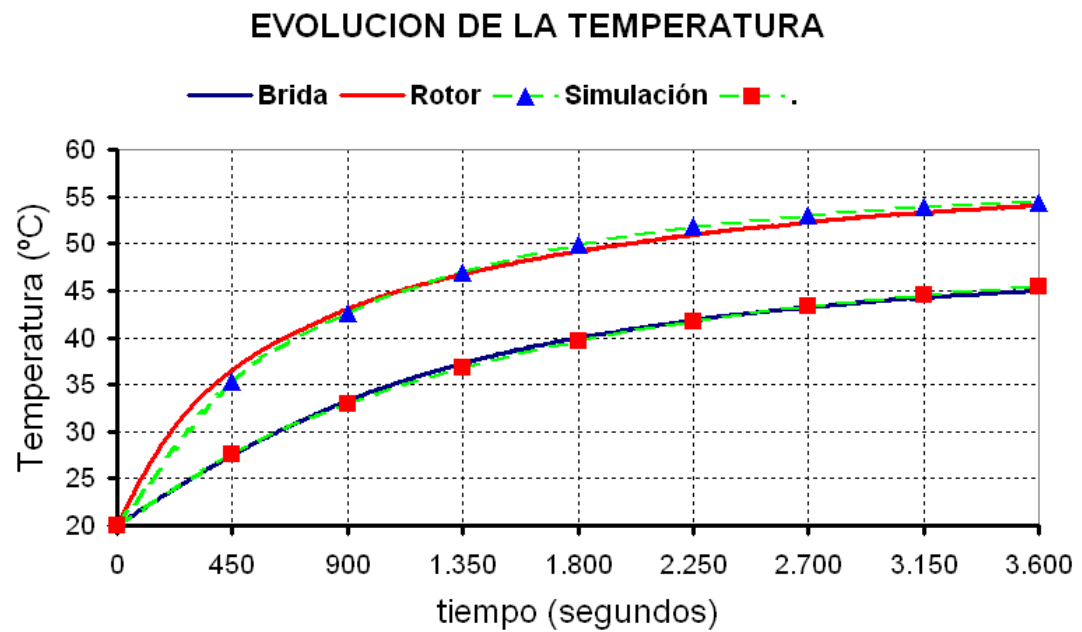


Figura B.8 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 nuevo, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.

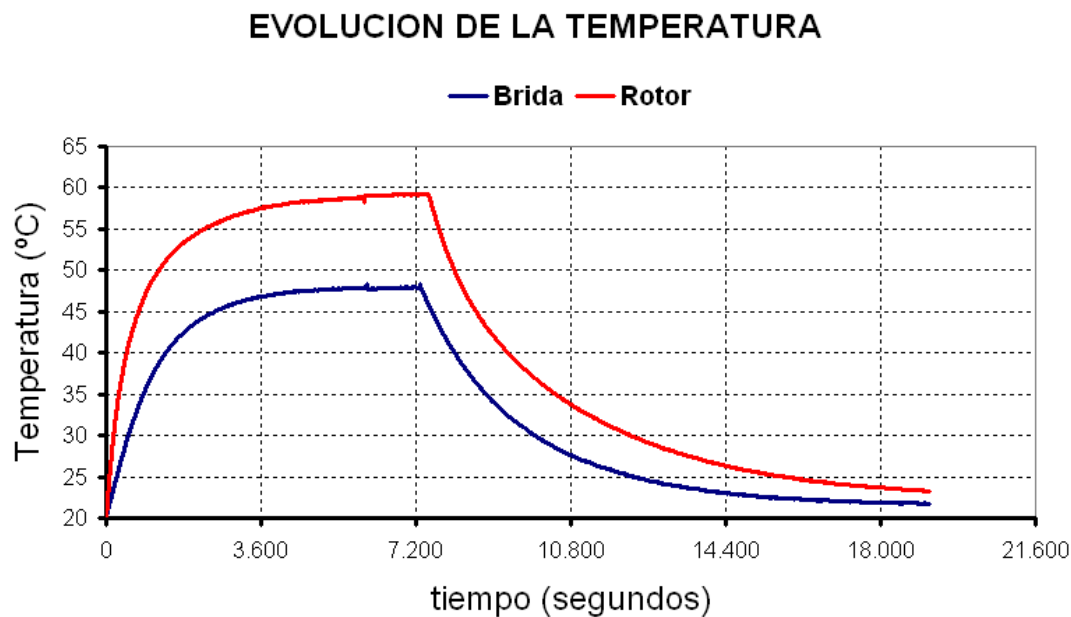


Figura B.9 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.

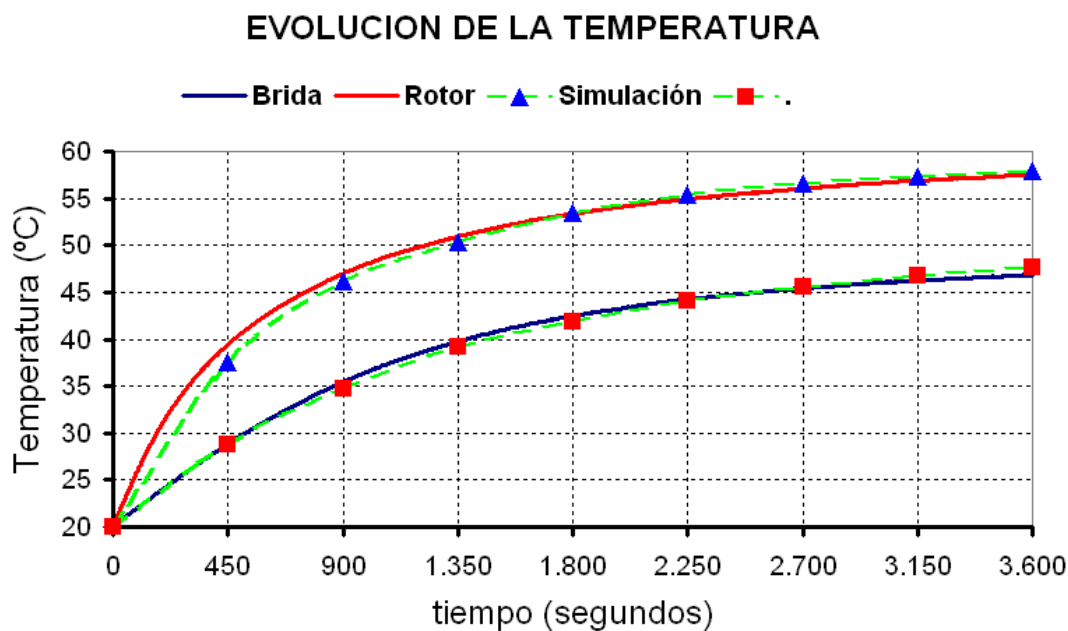


Figura B.10 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.

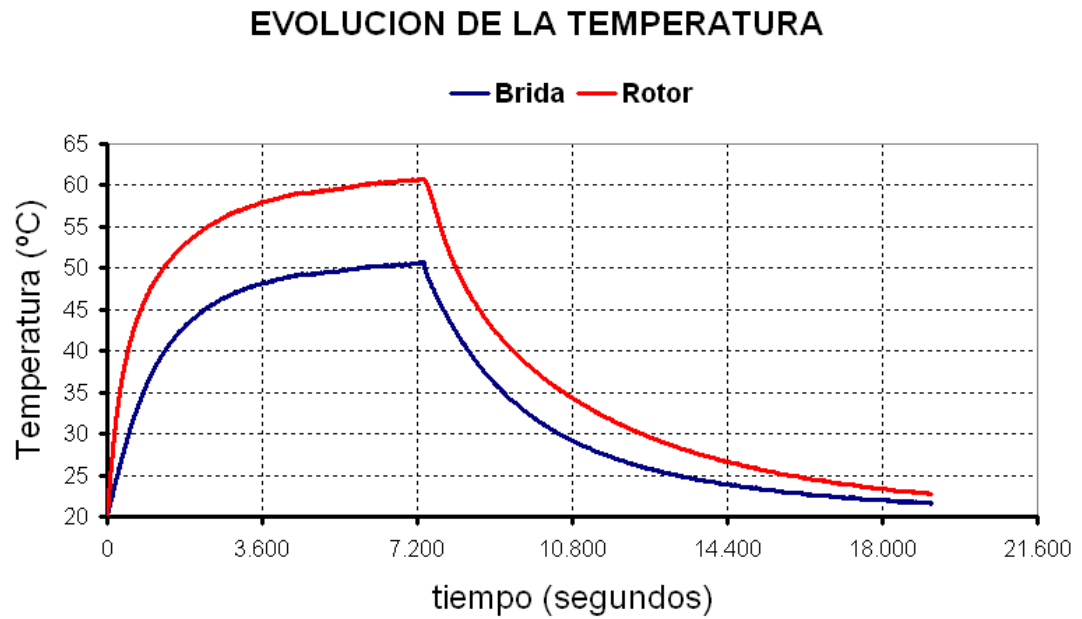


Figura B.11 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.

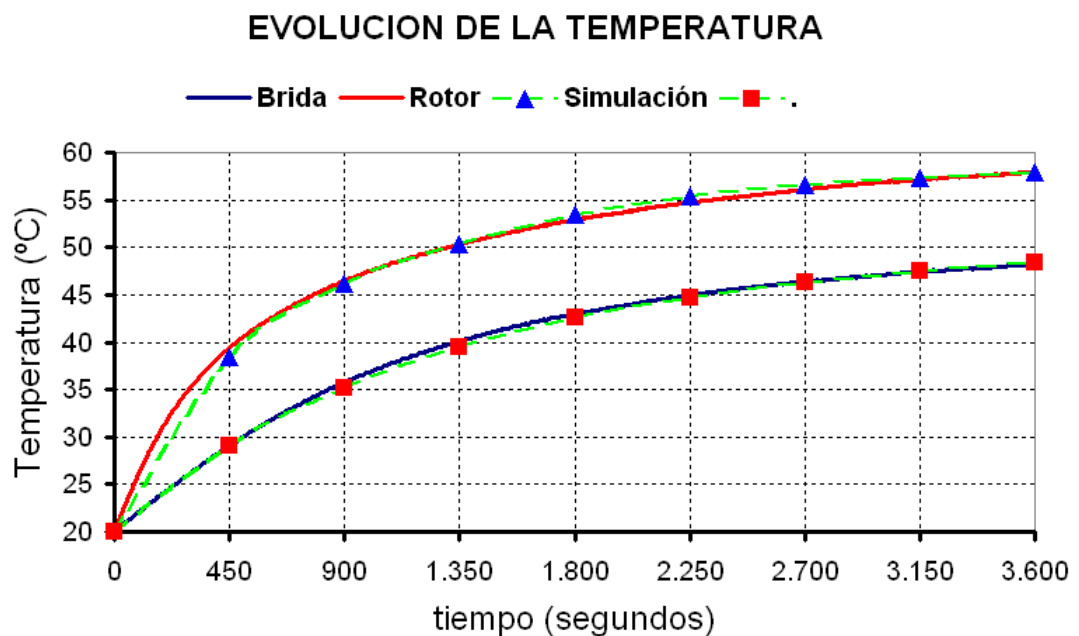


Figura B.12 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.

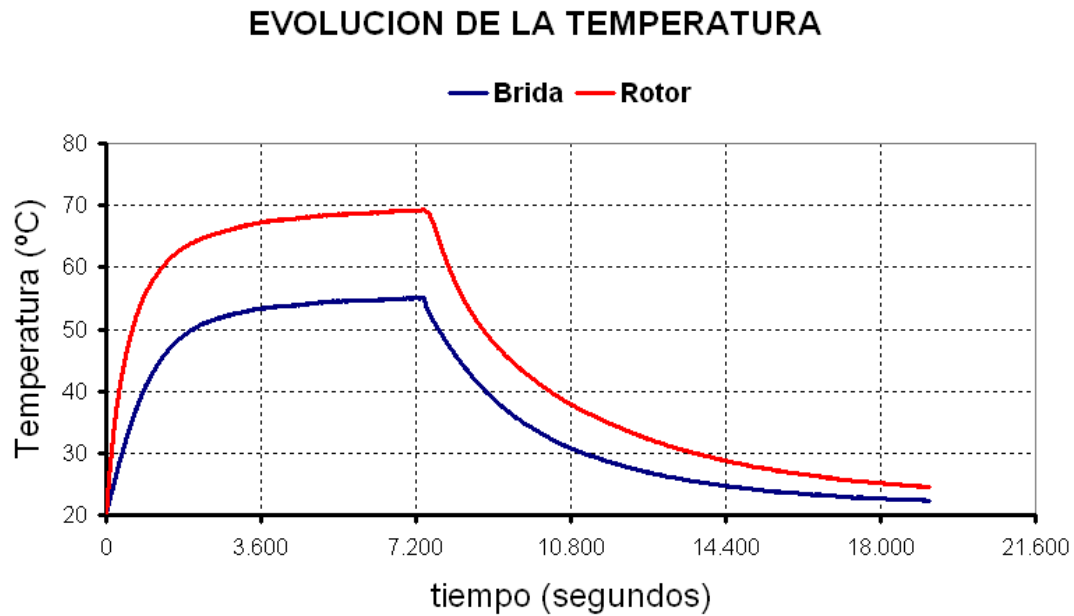


Figura B.13 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 nuevo, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

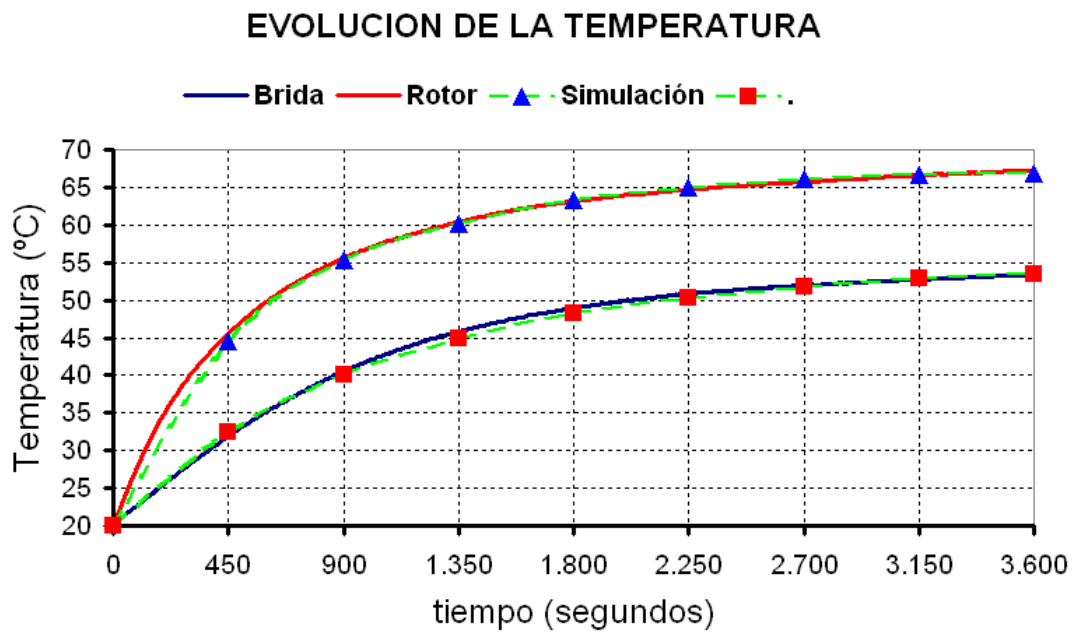


Figura B.14 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 nuevo, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

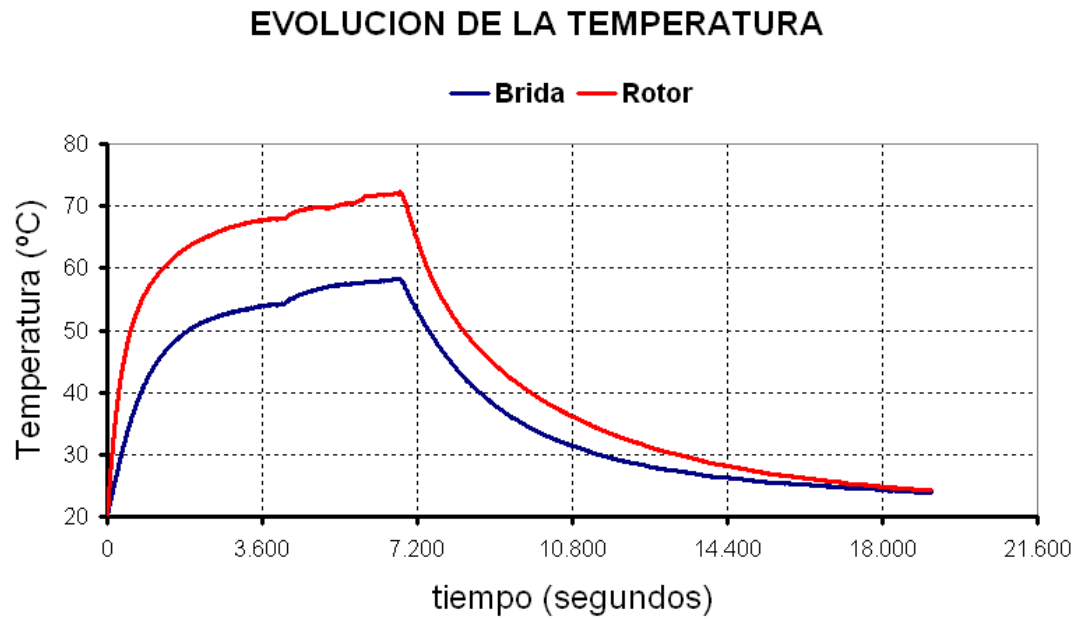


Figura B.15 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

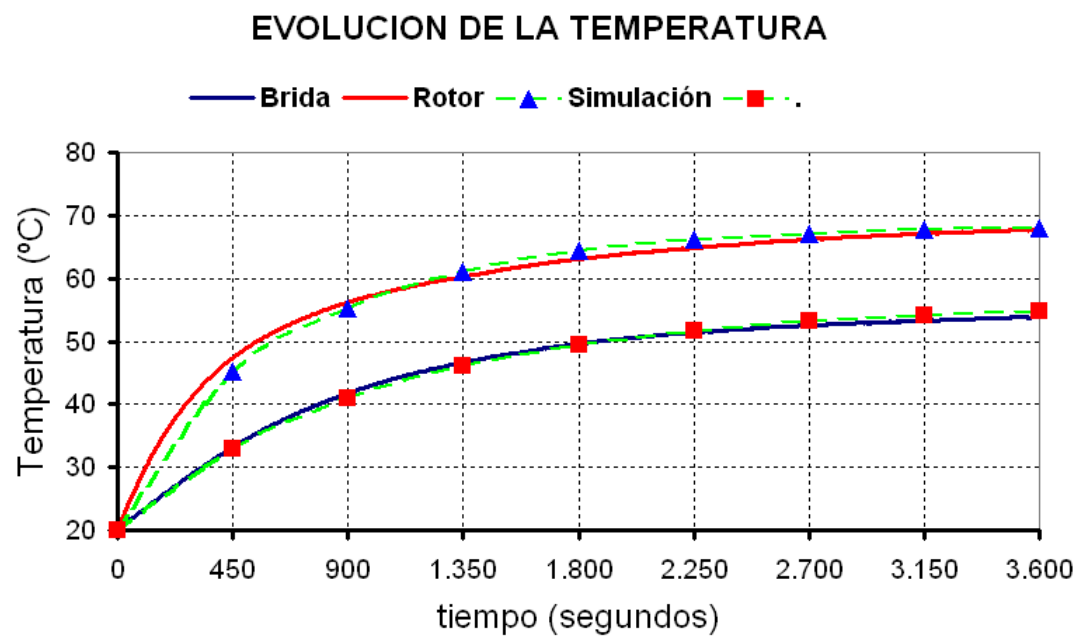


Figura B.16 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

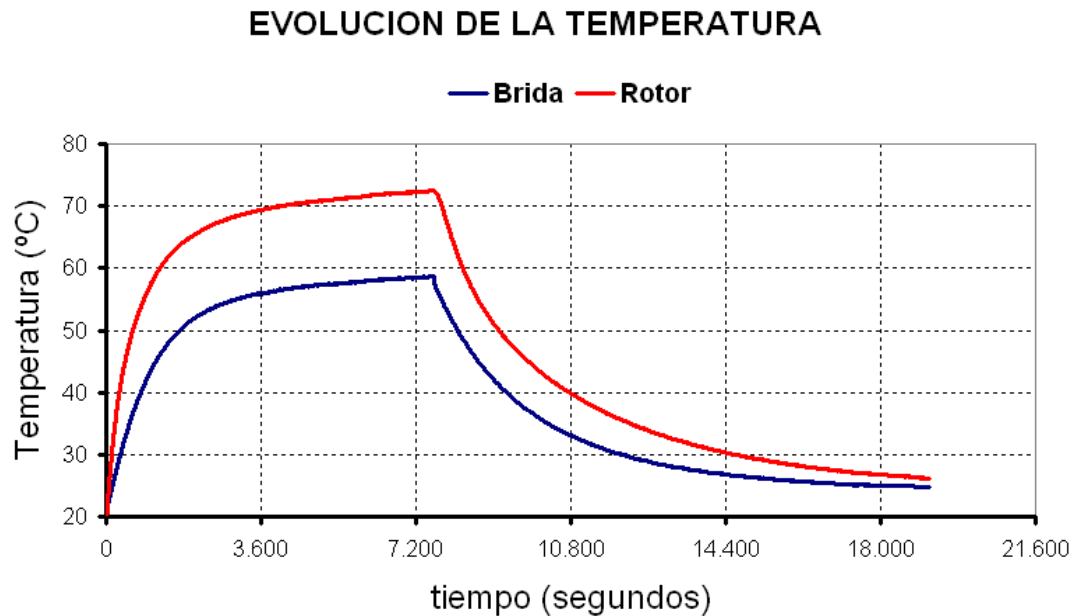


Figura B.17 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

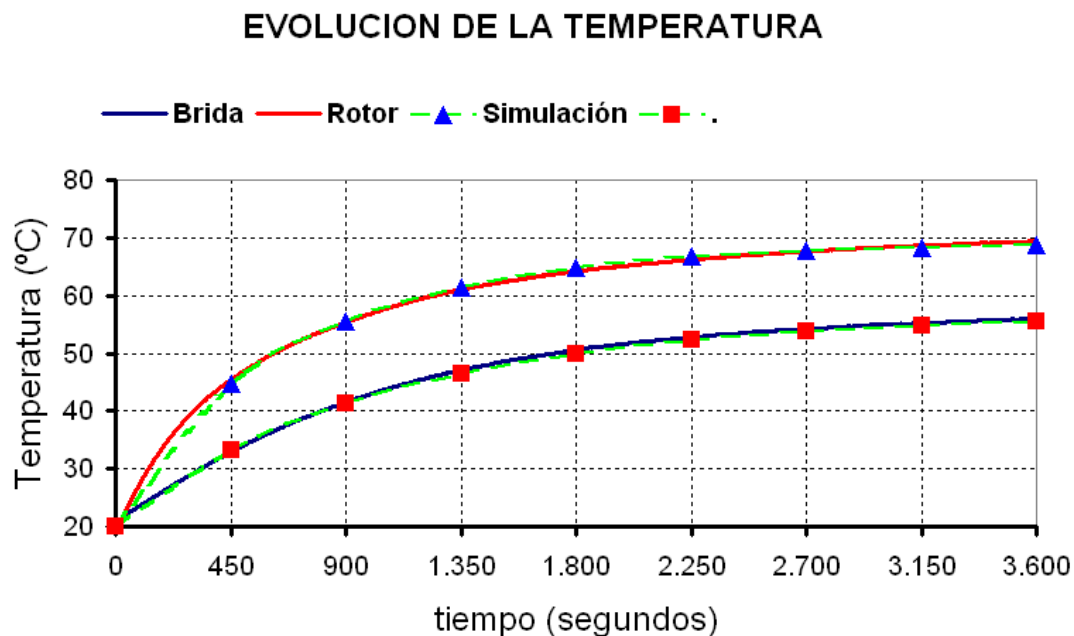


Figura B.18 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, con 3 bolas, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

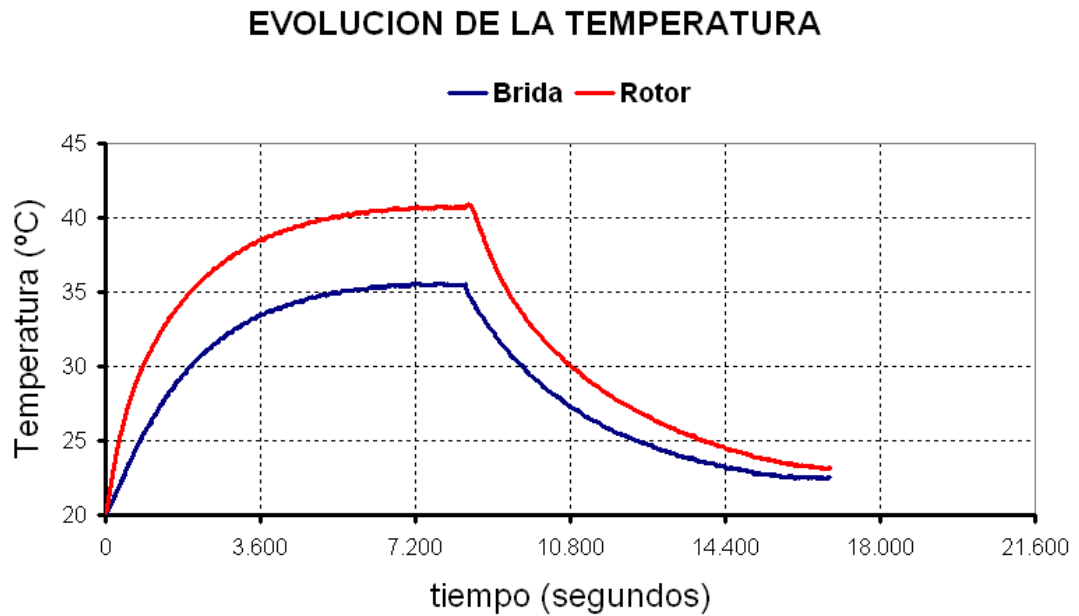


Figura B.19 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 nuevo, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.

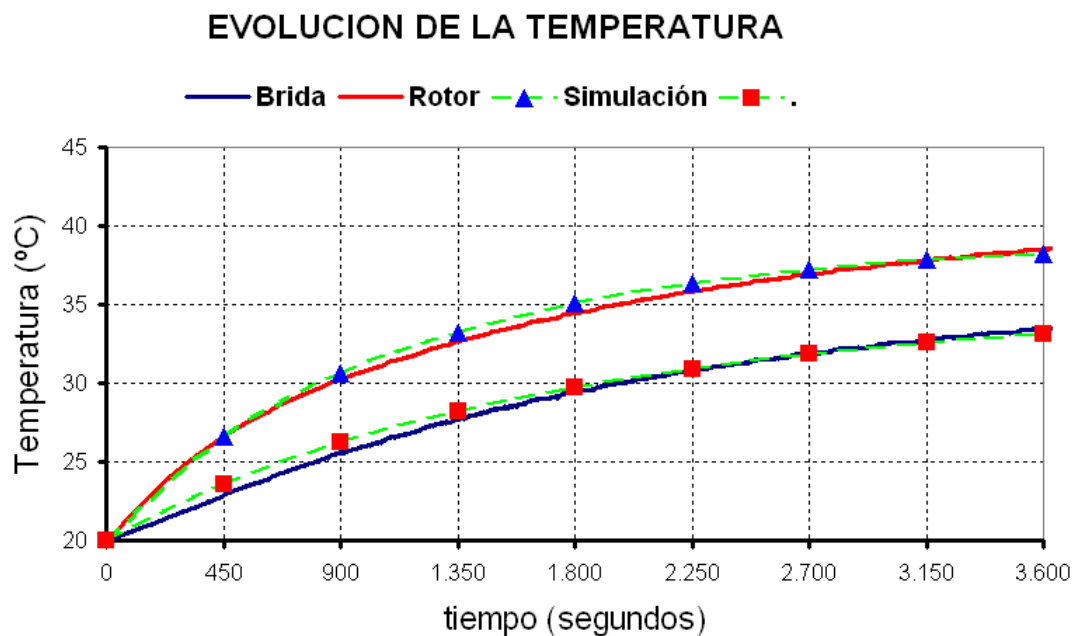


Figura B.20 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 nuevo, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.

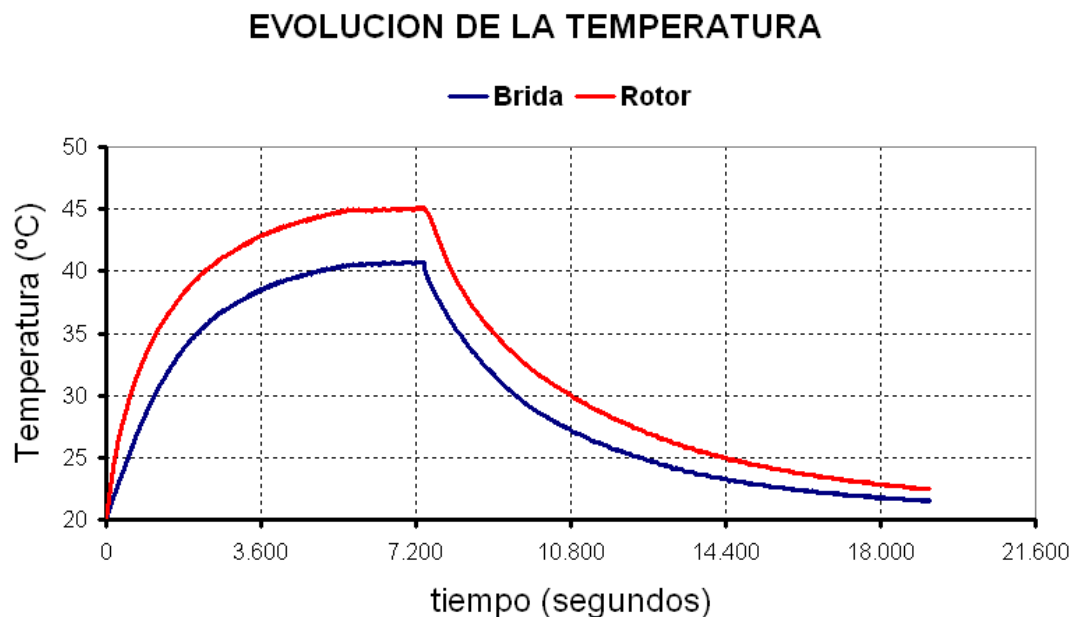


Figura B.21 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.

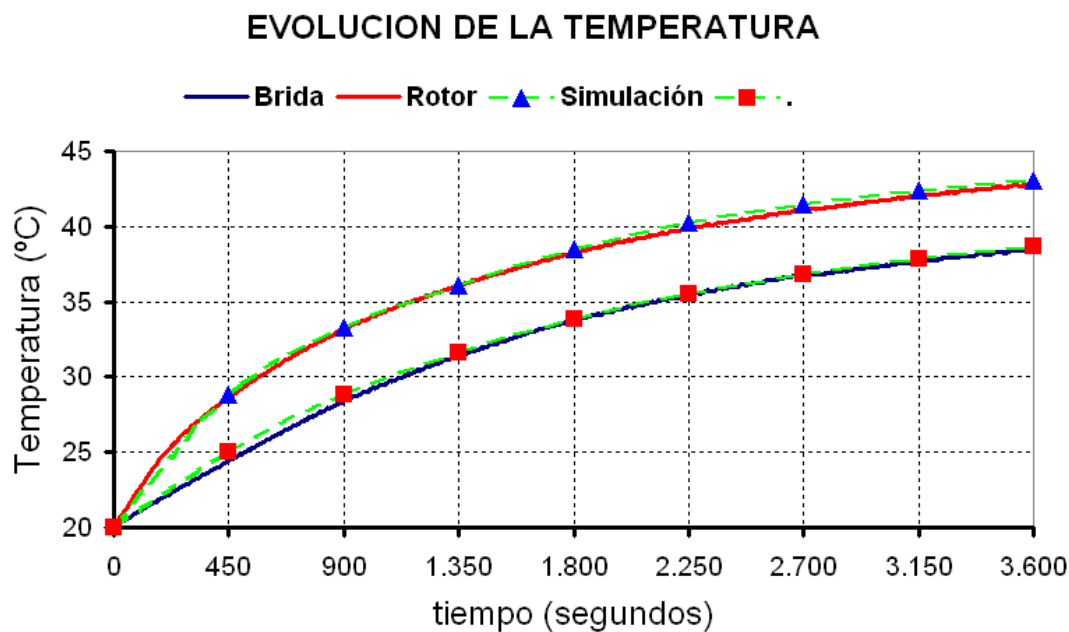


Figura B.22 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.

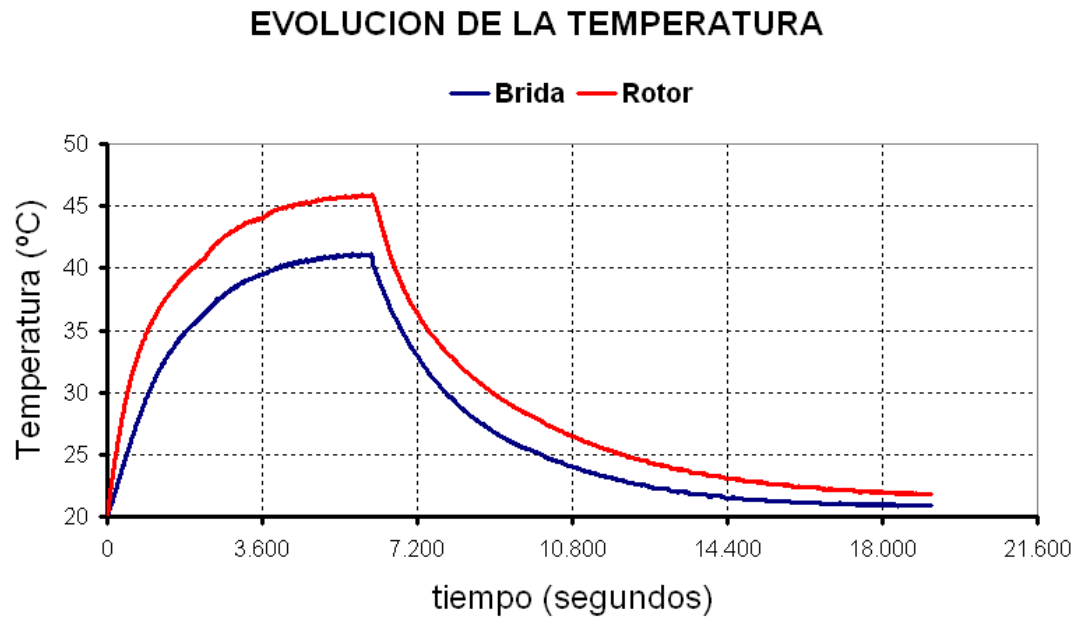


Figura B.23 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.

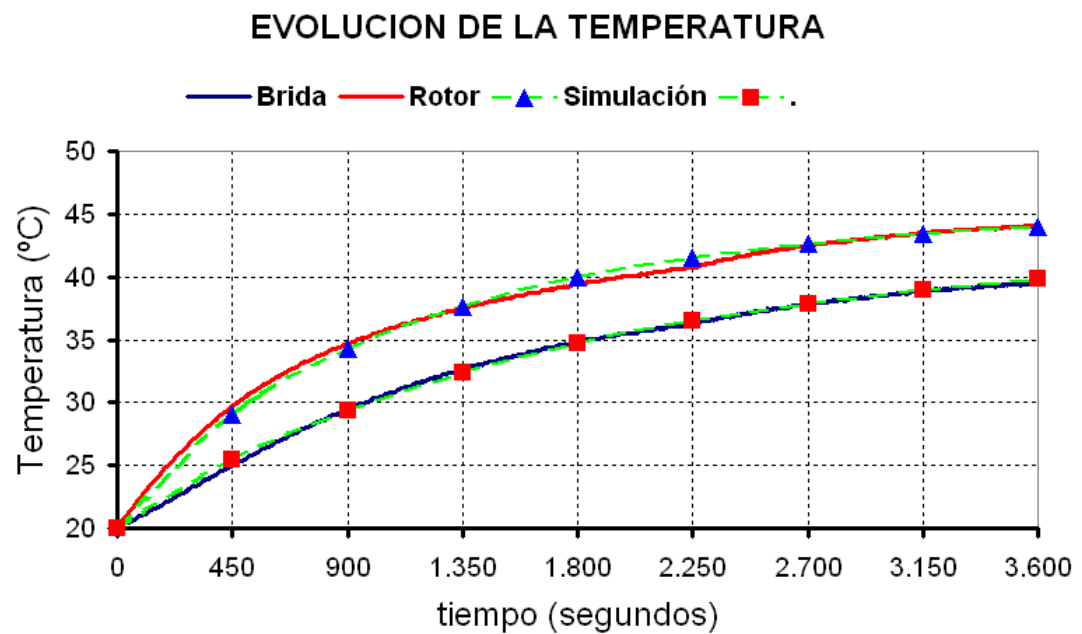


Figura B.24 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 600 r.p.m.

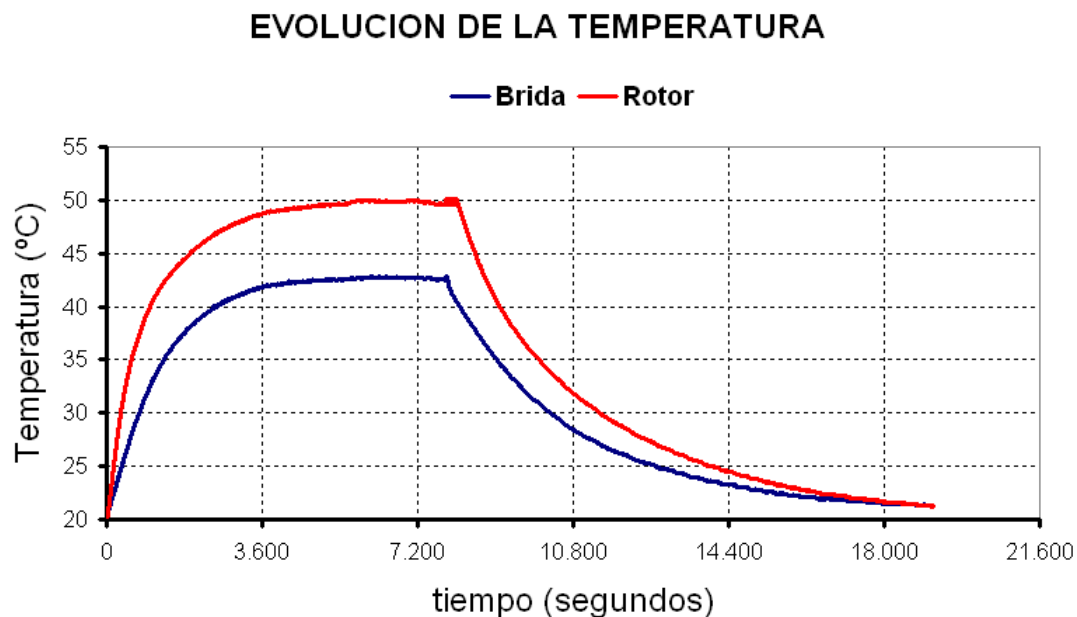


Figura B.25 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 nuevo, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.

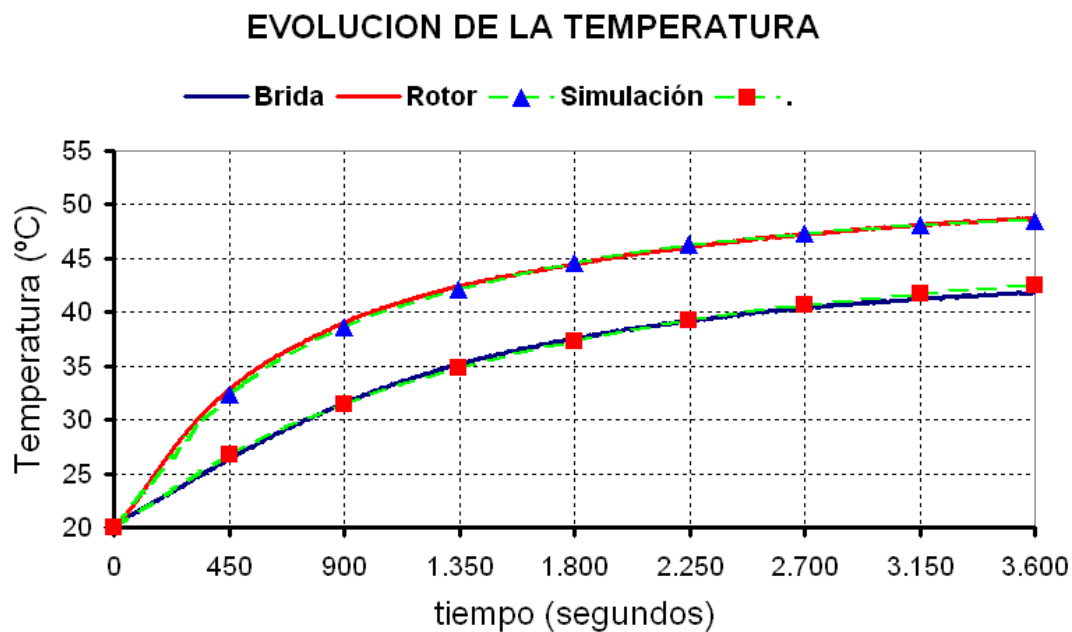


Figura B.26 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 nuevo, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.

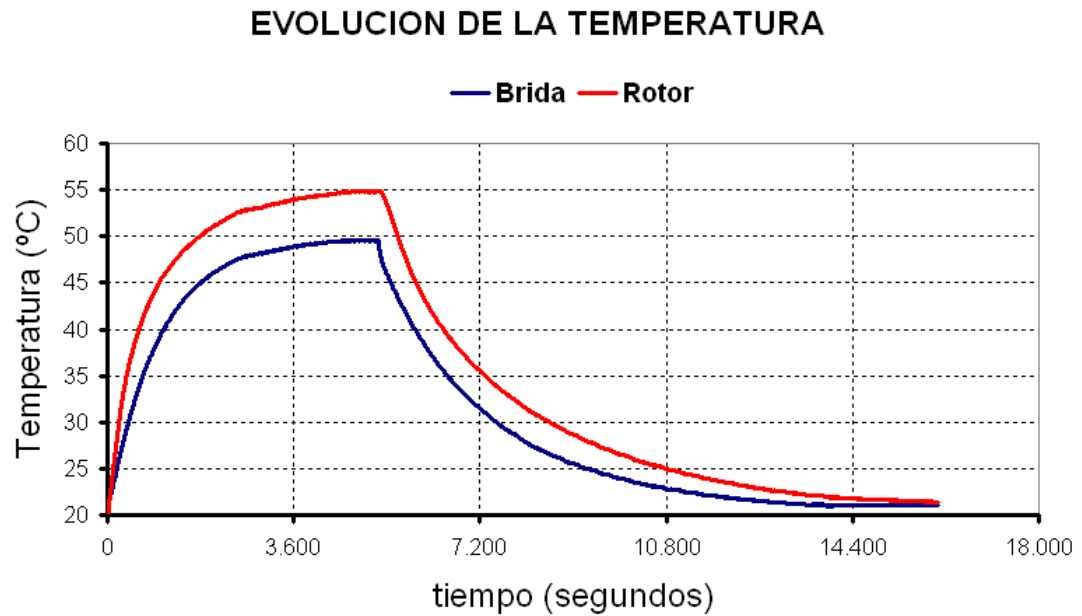


Figura B.27 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.

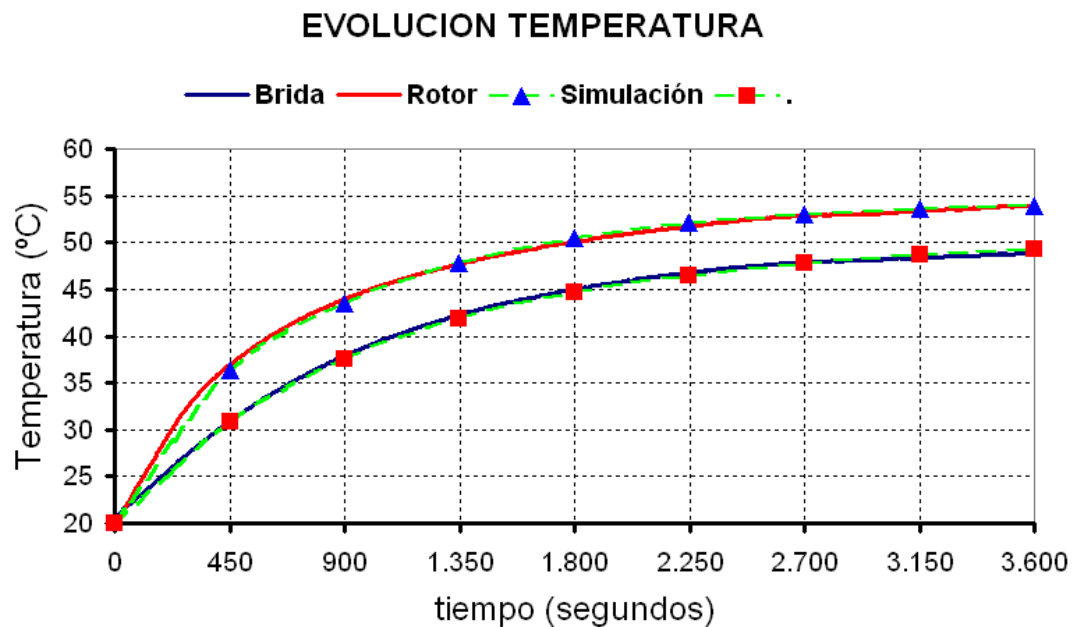


Figura B.28 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.

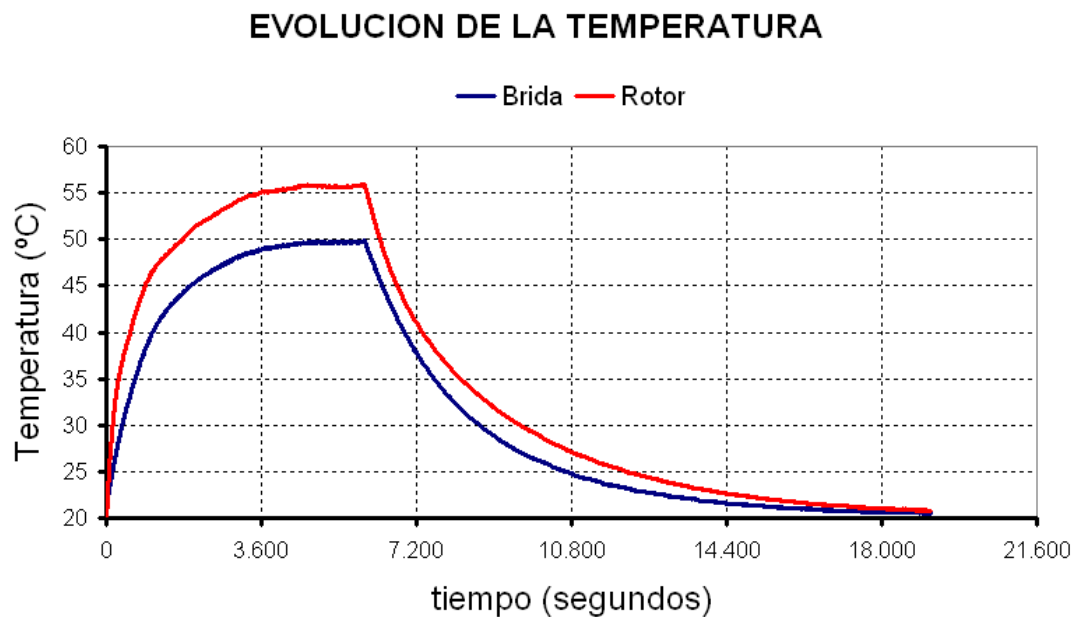


Figura B.29 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.

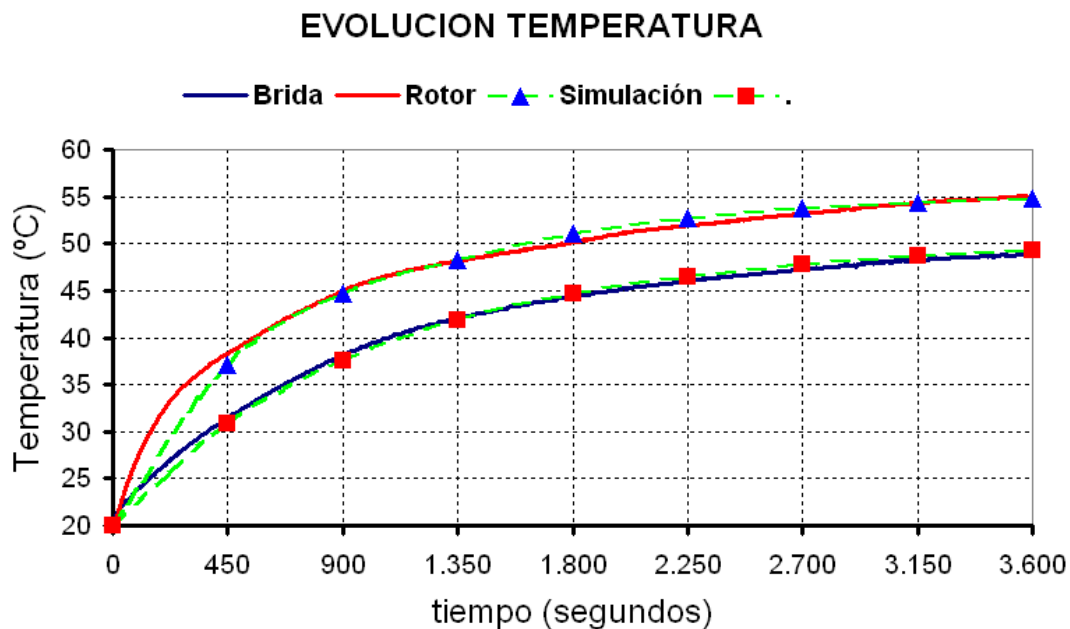


Figura B.30 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 1200 r.p.m.

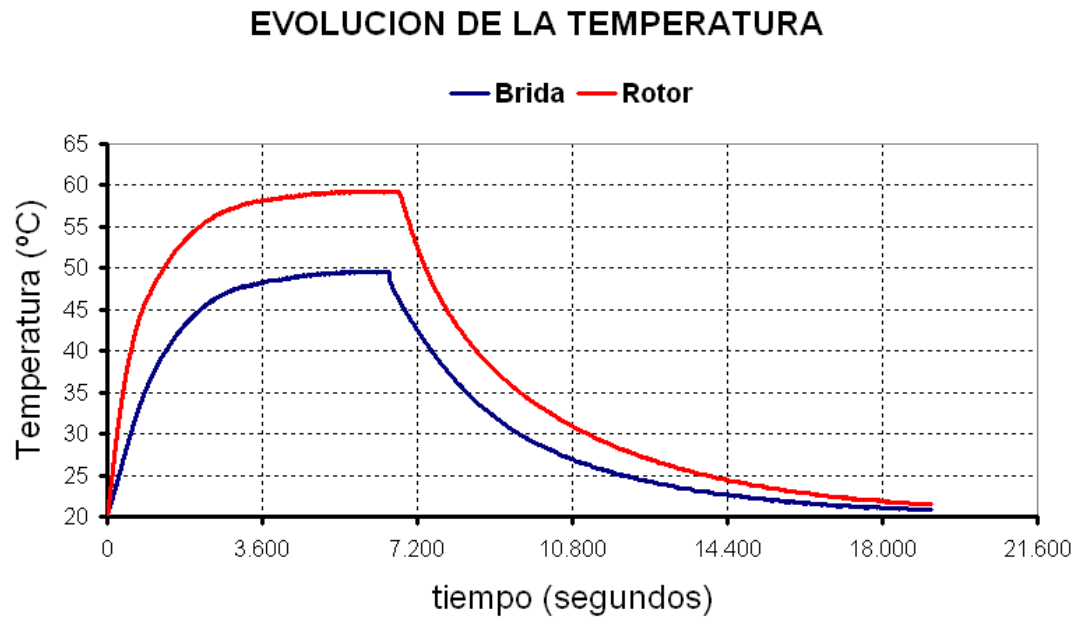


Figura B.31 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 nuevo, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

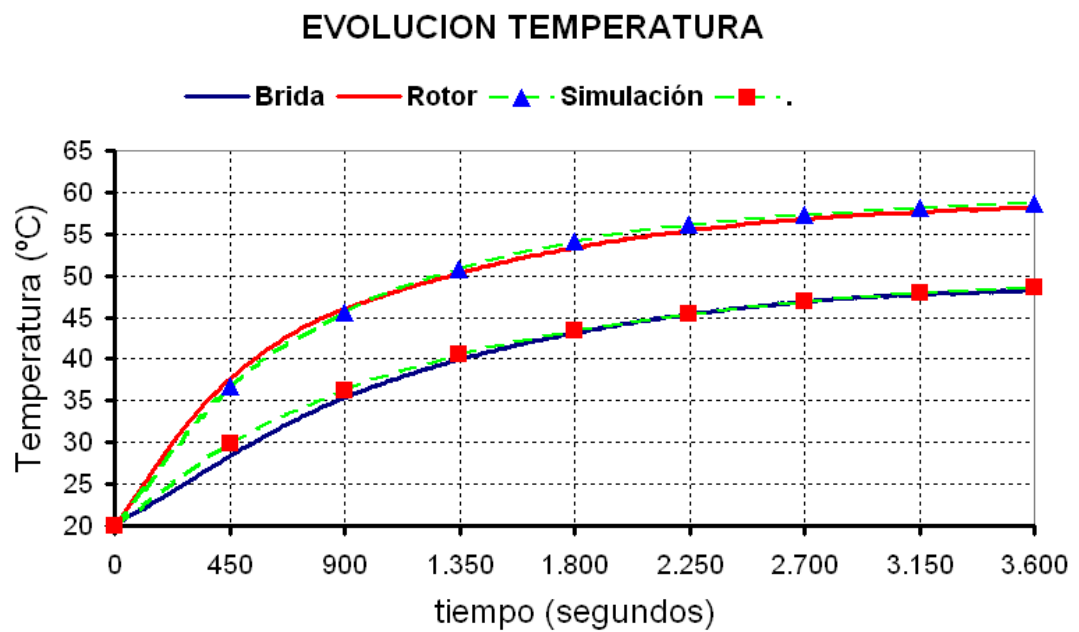


Figura B.32 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 nuevo, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

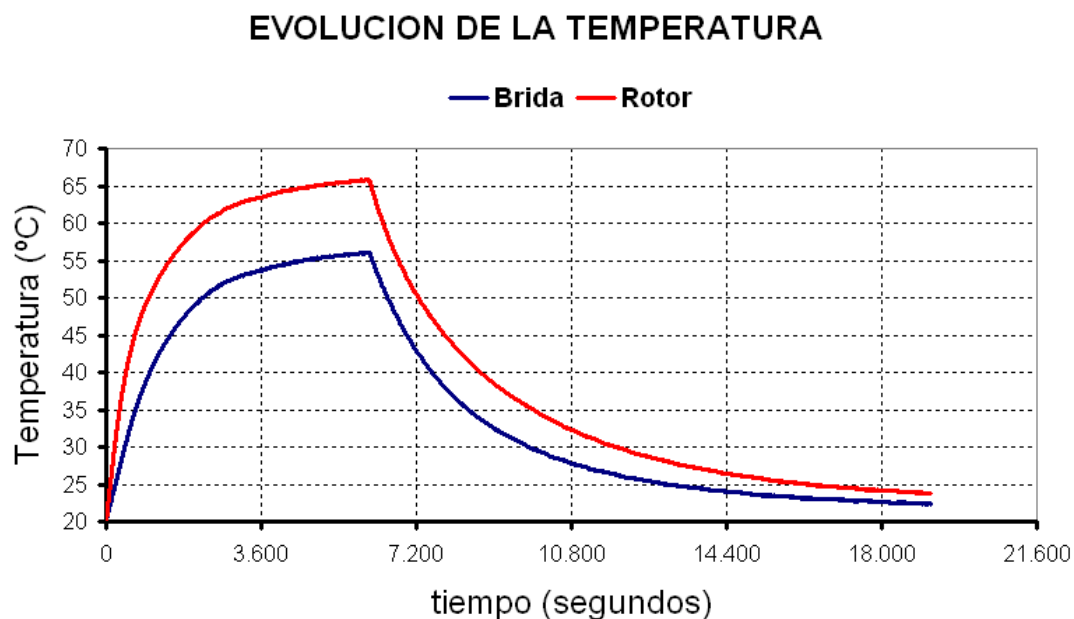


Figura B.33 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

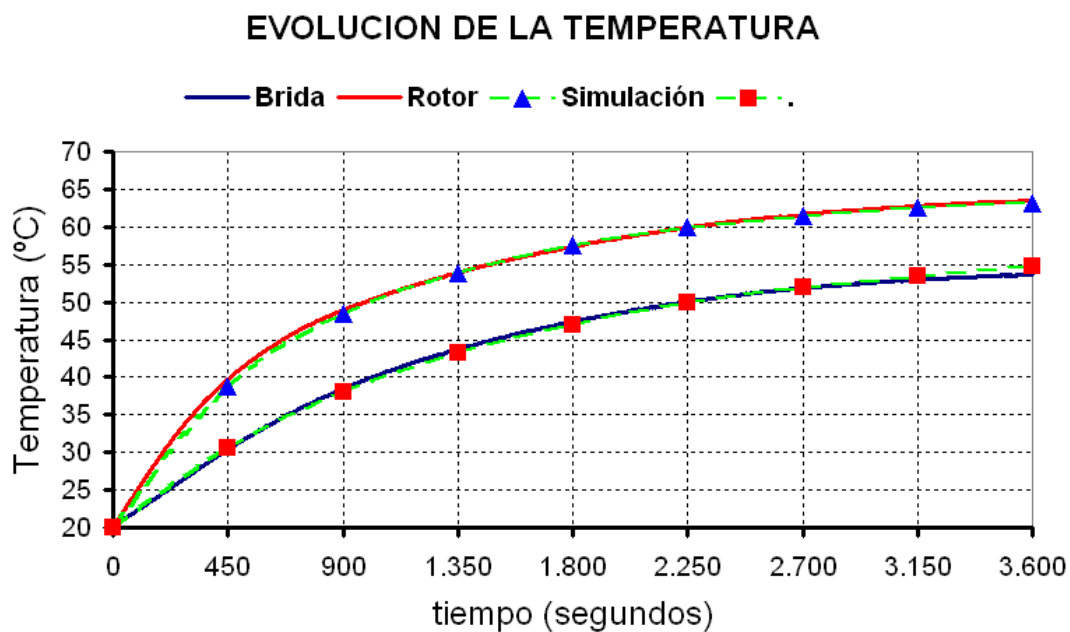


Figura B.34 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista exterior, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

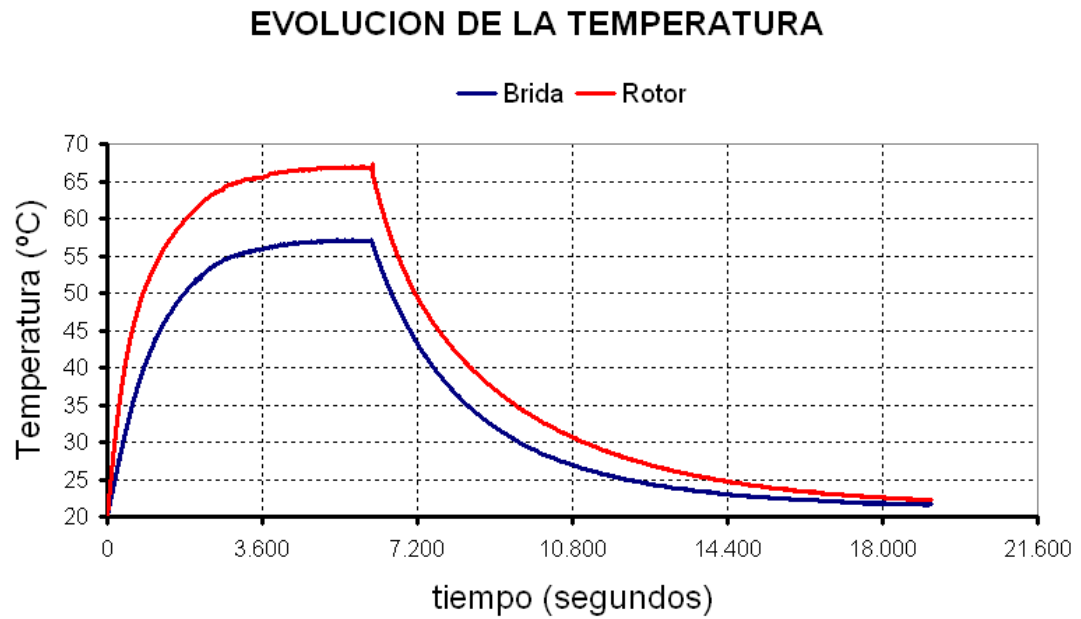


Figura B.35 Evolución de la temperatura en el anillo externo y el rotor en un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

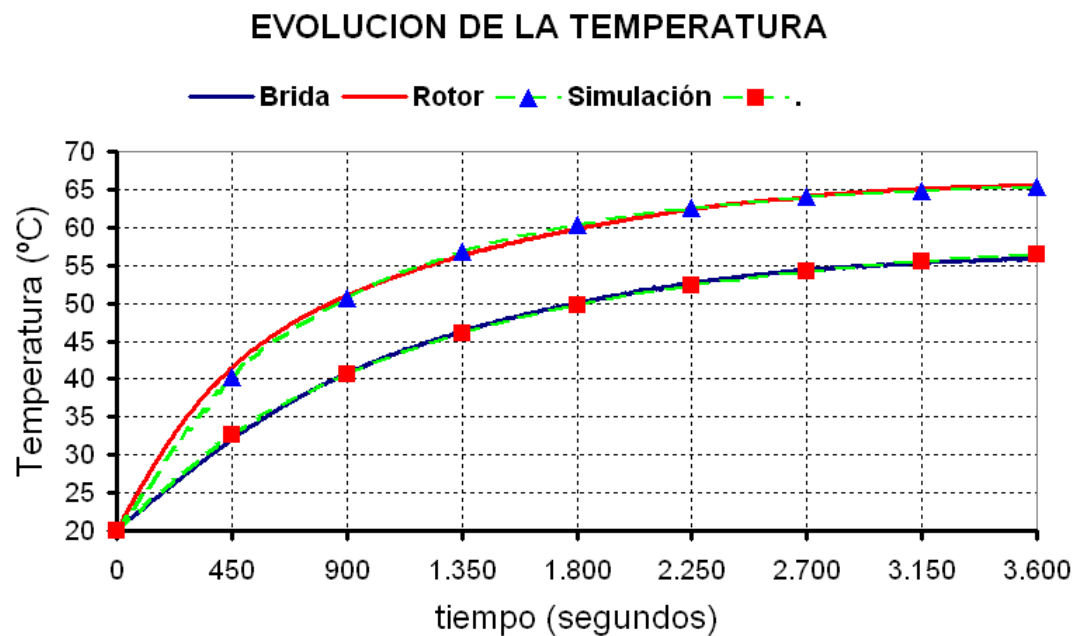


Figura B.36 Comparación de la evolución de la temperatura experimental y simulada de un rodamiento SKF 6206 con defecto en la pista interior, cargado con 3000 N y girando a 1800 r.p.m.

Bibliografía

- [1] S. Abbasion, A. Rafsanjania, A. Farshidianfarb, and N. Irani. Rolling element bearings multi-fault classification based on the wavelet denoising and support vector machine. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21, 2007.
- [2] O. P. AGRAWAL. Application of wavelets in modeling stochastic dynamic systems. *Journal of vibration and acoustics.*, 120(3):763–769, July 1998.
- [3] N. AKTÜRK and R. GOHAR. Vibrations associated with ball bearings.
- [4] N. AKTURK, M. UNEEB, and R. GOHAR. The effects of number of balls and preload on vibrations associated ball bearings. *Journal of Tribology*, 119, 1997.
- [5] R. J. ALFREDSON and J. MATHEW. Time domain methods for monitoring the condition of rolling element bearings. *Mechanical Engineering Transactions (ISSN 0727-7369)*, 10, 1985.
- [6] J. ALTMANN and J. MATHEW. Multiple band-pass autoregressive demodulation for rolling element bearing fault diagnosis. *MECHANICAL SYSTEMS AND SIGNAL PROCESSING*, 15(5), 2001.
- [7] J. ANTONI. The spectral kurtosis: A useful tool for characterising nonstationary signals. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20 (2), 2006.
- [8] J. ANTONI and R. B. RANDALL. Differential diagnosis of gear and bearing faults. *Journal of Vibration and Acoustics*, 124, 2002.
- [9] J. ANTONI and R. B. RANDALL. A stochastic model for simulation and diagnostics of rolling element bearings with localized faults. *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, 125 (3), 2003.
- [10] J. ANTONI and R. B. RANDALL. Unsupervised noise cancellation for vibration signals: Part i evaluation of adaptive algorithms. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18, 2004.
- [11] J. ANTONI and R. B. RANDALL. The spectral kurtosis: application to the surveillance and diagnostics of rotating machines. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(2), 2006.
- [12] H. ARAMAKI. Rolling bearing analysis program package "brain". *Motion & Control*, 3, 1997.

- [13] H. ARAMAKI. Rolling bearing analysis program package *brain*. *Motion and Control*, 1997.
- [14] M. ARTÉS, J. C. GARCÍA, and E. GÓMEZ. Caracterización estadística de los espectros de vibración de un rodamiento a bolas. *Anales de Ingeniería Mecánica*, 1988.
- [15] M. ARTÉS, J. C. GARCÍA, and H. RUBIO. Técnica de análisis de la potencia espectral para saltos de frecuencia y su aplicación a un sistema mecánico con varios tamaños de defecto en rodamientos de bolas. *CIDIM 99, Santiago de Chile*, 1999.
- [16] K. ASANO. Recent development in numerical analysis of rolling bearings basic technology series of bearings (2). *KOYO Engineering Journal*, 160, 2002.
- [17] B. K. BAE and K. J. KIM. A hilbert transform approach in source identification via multiple-input single-output modeling for correlated inputs. *Mechanical System and Signal Processing*, 12(4), 1998.
- [18] E. BAMBERGER. Life adjustment factors for ball and roller bearings-an engineering design guide. *American Society of Mechanical Engineers, New York*, 1971.
- [19] R. H. BANNISTER. A review of rolling element bearing monitoring techniques. *I.MECH.E Conference on Condition Monitoring of Machinery and Plant*, 1985.
- [20] J.P. BARDON. Heat transfer at solid interface: basic phenomenon. *Proceedings of Eurotherm*, 4, June 1988.
- [21] F. T. BARWELL. Bearings systems. principles and practice. *Oxford University Press*, 1979.
- [22] B. BASU and V. K. GUPTA. On equivalent linearization using wavelet transform. *Journal of vibration and acoustics*, 121(4), 1999.
- [23] J. S. BENDAT and A. G. PIERSOL. Engineering applications of correlation and spectral analysis. *John Wiley & Sons*, 1980.
- [24] D. E. BENTLY, P. GOLDMAN, and J. J. Yu. Rolling element bearing defect detection and diagnostics using rebam probes. *ORBIT*. 2Q01, 2001.
- [25] S. BERGER, O. BONNEAU, and J. FRÊNE. Influence of a levelness defect in a thrust bearing on the dynamic behaviour of an elastic shaft. *JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION*, 249(1), 2002.
- [26] J. BERRY. How track rolling element bearing health with vibration signature analysis. *Sound and vibration*, 1991.
- [27] B. P. BETTING and R. P. S. HAN. Predictive maintenance using the rotordynamic model of a hydraulic turbine-generator rotor. *Journal of vibration and acoustics*, 120, N° 2, 1998.
- [28] K. BHATTACHARYYA and A. MUKHERJEE. Modeling and simulation of centerless grinding of ball bearings simulation. *Modelling Practice and Theory*, 14, 2006.

-
- [29] R. BLACKMAN and J. TUKEY. The measurement of power spectra. *Dover Publications INC.*, 1958.
 - [30] D. R. BLEVIUS. Formulas for natural frequency and mode shape. *Krieger Publishing Company, Florida*, 1993.
 - [31] H. BLOCK. Les températures de surface dans des conditions de graissage sous extrême pression. *Proc. Sd. World Petrol. Cong.*, 3, 1937.
 - [32] M. BLODT, P. GRANJON, B. RAISON, and G. ROSTAING. Models for bearing damage detection in induction motors using stator current monitoring. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 55(4), 2008.
 - [33] J. D. BOYES. Reciprocating machinery analysis with an fft analyser. *Brüel&Kjær application notes*, 105, 1981.
 - [34] S. G. BRAUN. The extraction of periodic waveforms by time domain averaging. *Acustica*, 32, 1975.
 - [35] S. G. BRAUN. Mechanical signature analysis. theory and applications. *Academic Press-London*, 1986.
 - [36] S. G. BRAUN, D. J. EWINS, and S. S. RAO. Encyclopedia of vibration. *Academic Press*, 2001.
 - [37] D. BRIE. Modelling of the spalled rolling element bearing vibration signal: an overview and some new results. *Mechanical System and Signal Processing*, 14(3), 2000.
 - [38] J. T. BROCH. Mechanical vibration and shock measurements. *Brüel & Kjær. 2nd edition*, 1986.
 - [39] R. F. BRODERICK, J. J. and BURCHILL and H. L. CLARK. Design and fabrication of prototype sistem for early warning of impedance bearing failure. *MTI Report MTI-71 TR-1 (prepared for NASA)*, 1972.
 - [40] C. CAMURRI and D. RODRIHUEZ. Modelo matemático y validación experimental de la transferencia de calor durante las diferentes etapas del tratamiento térmico de bolas para molienda. *CONGRESO CONAMET/SAM*, 2004.
 - [41] R. CANADA, Y. K. PIET, and J. C. ROBINSON. New methodology for bearing fault defect: peakvue analysis. *Application Paper, Computational System Incorporated (CSI)*, 1998.
 - [42] Y. CAO and Y. ALTINTAS. A general method for the modeling of spindle-bearing systems. *Journal of Mechanical Design*, 126, 2004.
 - [43] M. CARLI. Thermal point contact analysis of rolling/sliding contacts with experimental comparisons showing anomalous film shapes. *Tribology International*, 42, 2009.
 - [44] G.D. CARMICHAEL and P.B. DAVIES. Measurement of thermally induced preloads in bearings. *Strain*, 6 (4), 1970.
 - [45] N. D. CHANGE. Technical articles of piezoelectrics sensors. *DYTRAN*, 1997.
-

- [46] J. CHENG, D. YU, and Y. YANG. Time-energy density analysis based on wavelet transform. *NDT-E International*, 38, 2005.
- [47] G. CHEVROULET. Monitorización y diagnosis de turbomáquinas en operación: medida y evaluación de vibraciones. *Eurofach electrónica/31*, 133, 1987.
- [48] A. CHOUDHURY and N. A. TANDON. Theoretical model to predict vibration of rolling bearings to distributed defects under radial load. *Journal of vibration and acoustics*, 120(1), 1998.
- [49] F. CIENFUEGOS. Consideraciones prácticas en las medidas de vibraciones. *Eurofach electrónica, Madrid*, 1981.
- [50] J.W. COOLEY and J.W. TUKEY. An algorithm for the machine computation of complex fourier series. *Mathematics of Computation*, 19, 1965.
- [51] J. COURRECH. Envelope analysis for effective rolling-element fault detection fact or fiction? *UPTIME Magazine*, 1, 2000.
- [52] G. DALPIAZ and A. RIVOLA. Condition monitoring and diagnostics in automatic machines: comparison of vibration analysis techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(1), 1997.
- [53] E. D'AMATO and P. RISSONE. Using the envelope method to monitor rolling elements bearing. *Proc. 1 st*, 1989.
- [54] C. DANTHEZ, J. M. and GIROUSSENS and R. AQUILINA. The autocohereent spectrum: a useful spectral estimator for vibration analysis machinery. accurate estimation and cancellation of pure tones. *Mechanical System and Signal Processing*, 12(6), 1998.
- [55] M. S. DARLOV, R. H. BADGLEY, and G. W. HOGG. Application of high frequency resonance techniques for bearing diagnostics in helicopter gearboxes. *Us Army Air Mobility Research and Development Laboratory, Technical Report*, 1974.
- [56] M. S. DARLOW and R. H. BADGLEY. Early detection of defects in rolling elements bearing. *SAE*, paper 750209, 1982.
- [57] O.P. DATSYSHYN and V.V. PANASYUK. Pitting of the rolling bodies contact surface. *Wear*, 251, 2001.
- [58] M. R. DELLOMO. Helicopter gearbox fault detection: a neural network based approach. *Journal of vibration and acoustics*, 121(3), 1999.
- [59] J. A. DEMARCHI and K. C. CRAIG. Comments on natural frequencies and dampings identification using wavelet transform: application to real data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(2), 2003.
- [60] J. P. DEN HARTOG. Mecánica de las vibraciones. *C.E.C.S.A.*, 1984.
- [61] P. DIETL, WENSING, J., and G. C. NIJEN. Rolling bearing damping for dynamic analysis of multi-body systems-experimental and theoretical results proceedings of the i mech e part k. *Journal of Multi-body Dynamics*, 214(1), 2000.

-
- [62] A. Djebala, N. Ouelaa, and N. Hamzaoui. Detection of rolling bearing defects using discrete wavelet analysis. *Meccanica*, 43, 2008.
 - [63] S y otros. DORMIDO. Matlab guía del usuario. the math works, inc. *Prentice-Hall*, 1993.
 - [64] F.and BOLAERS F. DRON, J. P.and RASOLOFONDRAIBE and A. PAVAN. High-resolution methods in vibratory analysis: application to ball bearing monitoring and production machine. *International journal of solids and structures*, 38, 2001.
 - [65] L.and COUET C. DRON, J. P.and RASOLOFONDRAIBE and A. PAVAN. Fault detection and monitoring of a ball bearing benchtest and a production machine via autoregressive spectrum analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 218(3), 1998.
 - [66] R. S. DWYER-JOYCE. Predicting the abrasive wear of ball bearing by lubricant debris. *Wear*, 1999.
 - [67] D. DYER and R. M. STEWART. Detection of rolling element bearing damage by statistical vibration analysis. *Journal of mechanical design. Transaction ASME*, 100 (2), 1978.
 - [68] DYTRAN. Instrumentation catalog.
 - [69] G. F. ELVIRA and H. C. SANZI. Modelo computacional simplificado para evaluar la distribución térmica desarrollada durante un proceso de soldadura en la conexión de un recipiente contenedor de presión. *IV Coloquio Latinoamericano de Fractura y Fatiga*, 2000.
 - [70] ENDEVCO. Instrumentation catalog.
 - [71] I. J. EPPS and H. MCCALLION. An investigation into the characteristics of vibration excited by discrete faults in rolling element bearings. *Annual Conference of the Vibration Association of New Zealand, Christchurch*, 1994.
 - [72] P. ESTUPIÑÁN, E. y SAAVEDRA. Técnicas modernas en el análisis de vibraciones de rodamientos. *XIV CNIM, Anales de Ingeniería Mecánica*, Madrid, 2000.
 - [73] FAG. Mounting and dismounting of rolling bearings. *Publ. N°. WL 80 100/3 EA*, 1990.
 - [74] FAG. Lubricación de los rodamientos. *N°. Publ. WL 81 115/4 SB*, 1997.
 - [75] FAG. Technical information. *TI N°. WL 43-1190 EA*, 1999.
 - [76] FAG. Rodamientos fag. catálogo wl 41 520/3 sb. Edición 2000.
 - [77] X. FAN and M. ZUO. Gearbox fault detection using hilbert and wavelet packet transform. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20, 2006.
 - [78] J. FELDMANN. Point distributed static load of a rough elastic contact can cause broadband vibrations during rolling. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 16 (2-3), 2002.
-

- [79] E. J. and RANDALL R. B. FENG, N. S. and HAHN. Simulation of vibration signals from a rolling element bearing defect. *DSTO International Conference on Health and Usage Monitoring*, Melbourne, Australia, 2001.
- [80] N. S. FENG, E. J. HAHN, and R. B. RANDALL. Using transient analysis software to simulate vibration signals due to rolling element bearing defects. *Proceedings of the 3rd Australian Congress on Applied Mechanics*, 2002.
- [81] J. M. FERNÁNDEZ. Design of diagnosis system for rotating machinery using fuzzy pattern matching and genetic algorithms. *Master Thesis*, Kyushu Institute of Technology, 1998.
- [82] D. FLEMING and J. POPLAWSKI. Unbalance response prediction for rotors on ball bearings using speed and load dependent nonlinear bearing stiffness. *International Journal of Rotating Machinery*, 2005.
- [83] M.A. FONSECA, J.M. ENGLISH, M. VON, and M.G. ALLEN. Wireless micromachined ceramic pressure sensor for high-temperature applications. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 11, Issue 4, Aug. 2002.
- [84] P. FRAGA. Vibraciones mecánicas. diagnósticos de averías. *Servicio de Publicacións, Universidade da Coruña*, 1999.
- [85] H.A. FRANCIS. Interfacial temperature distribution within a sliding hertzian contact. *ASLE Trans*, 14, 1970.
- [86] J. FRAREY and R. L. SMITH. Acoustic signatures of various roller bearing defects. *ASME Joint Rail Road Conference*, 1986.
- [87] D. FRITZSON, P. NORDLING, and L-E. STACKE. Beast - a rolling bearing simulation tool proceedings of the institution of mechanical engineers, part k. *Journal of Multi-body Dynamics*, 213 Issue 2, 1999.
- [88] S. FUKATA, E. H. GAD, T. KONDOU, T. AYABE, and H. TAMURA. On the radial vibrations of ball bearings (computer simulation). *Bulletin of the JSME*, 28(239), 1985.
- [89] K. FURUMURA. Recent trends in research and development of rolling bearings at nsk. *Motion and Control*, 1, 1996.
- [90] E.H. GAD, S. FUKATA, and H. TUMARA. Computer simulation of rotor radial vibration due to ball bearings. *Memories of the Faculties of Engineering*, 1984.
- [91] Y. R. GAO and R. B. RANDALL. Simulation of geometric, static and dynamic gear transmission errors. *Centre of Expertise in Vibration Analysis, Report CEVA-2000-01*.
- [92] J. C. GARCÍA. Análisis de armónicos según órdenes de rotación en sistemas mecánicos. (*Tesis doctoral*) *E.T.S.I.I. U.N.E.D.*, 1991.
- [93] J. C. GARCÍA, H. RUBIO, L. ISASI, and P. J. LORCA. Determinación de la zona de carga de un rodamiento a partir de la señal temporal de vibración. *V CIDIM. Mérida, Venezuela*, Octubre 2001.

-
- [94] J. C. GARCÍA, H. RUBIO, P. J. LORCA, D. RUIZ, and R. GARCÍA. Simulación de defectos en elementos rodantes: aplicación a rodamientos. *XV CNIM, Anales de Ingeniería Mecánica*, Cádiz, 2002.
 - [95] J. C. GARCÍA, H. RUBIO, C. J. RODA, P. J. LORCA, and L. GUTIÉRREZ DE ROZAS. Estudio del desalineamiento en una reductora mediante análisis frecuencial de la señal vibratoria. *XV CNIM, Anales de Ingeniería Mecánica*, Cádiz, 2002.
 - [96] K. M. GARRITY and D. C. RIPPLE. Resultados de la comparación regional sim 3.9: termopares tipo k en el intervalo de 100 °c a 1100°c. *10th International Symposium on Temperature and Thermal Measurements in Industry and Science, Tempmeko*, 2007.
 - [97] L. GAUL. The influence of damping on waves and vibrations. *Mechanical System and Signal Processing*, 13(1), 1999.
 - [98] A. GÓMEZ and A. IÑÍGUEZ. Técnicas de procesado de señal para el análisis de vibraciones en rodamientos, aplicación a control de calidad. *XIV CNIM, Anales de Ingeniería Mecánica*, Madrid, 2000.
 - [99] E. GÓMEZ. Diagnósis de elementos mecánicos en rotación mediante análisis espectral. (*Tesis doctoral*) *E.T.S.I.I. U.N.E.D.*, 1991.
 - [100] D. GORE and G. EDGAR. Techniques for the early detection of rolling element bearing failures. *RCA Engineer*, 29(5), 1984.
 - [101] W. GÖPEL, J. HESSE, and J. N. ZEMEL. Sensors. *Mechanical sensors VCH.*, 7, 1994.
 - [102] F. GUO and P.R. YANG. Influence of a ring flat zone in the point contact surface in thermal elastohydrodynamic lubrication. *Tribol Int*, 32, 1999.
 - [103] P. K. GUPTA. Dynamics of rolling element bearings part i, ii, iii. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of lubrication Technology*, 101, 1979.
 - [104] P. K. GUPTA. Transient ball motion and skid in ball bearings. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Lubrication technology*, April, 1975.
 - [105] P.K. GUPTA. The dynamics of rolling element bearings-part-iii: ball bearing analysis. *Transactions of ASME, Journal of Lubrications Technology*, 101, 1979.
 - [106] P.K. GUPTA. Tadvanced dynamics of rolling element bearings. *Springer-Verlag, Berlin*, 1984.
 - [107] O. G. GUSTAFSSON and T. TALLIAN. Detection of damage in assambled rolling element bearing. *ASLE preprint 61-AM 3B-1*, 1961.
 - [108] M. HAMRAOUI and Z. ZOUAOUIB. Modelling of heat transfer between two rollers in dry friction. *International Journal of Thermal Sciences*, 48, 2009.
 - [109] B.J. HAMROCK and W.J. ANDERSON. Rolling element bearings. *NASA Lewis Research Centre, NASA Report-1105*, 1983.
-

- [110] N. HAMZAOUI, BOISSON C., and C. LESUEUR. Vibro-acoustic analysis and identification of defects in rotating machinery, part i: theoretical model. *Journal of Sound and Vibration*, 216(4), 1998.
- [111] C. M. HARRIS and A. PIEROL. Shock and vibration handbook. *McGraw-Hill. 5th edition*, 2001.
- [112] T. A. HARRIS. Rolling bearing analysis. *John Willey & Sons, Inc. Fourth Edition*, 2001.
- [113] S.P. HARSHA. Nonlinear dynamic response of a balanced rotor supported on rolling element bearings. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 19 (3), 2005.
- [114] S.P. HARSHA. Harsha nonlinear dynamic analysis of rolling element bearings due to cage run-out and number of balls. *Journal of Sound and Vibration*, 289, 2006.
- [115] S.P. HARSHA, K. SANDEEP, and R. PRAKASH. The effect of speed of balanced rotor on nonlinear vibrations associated with ball bearings. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47 (4), 2003.
- [116] S.P. HARSHA, K. SANDEEP, and R. PRAKASH. Effects of preload and number of balls on nonlinear dynamic behaviors of ball bearing system. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 4 (3), 2003.
- [117] S.P. HARSHA, K. SANDEEP, and R. PRAKASH. Nonlinear dynamic behaviors of rolling element bearings due to surface waviness. *Journal of Sound and Vibration*, 272 (3-5), 2004.
- [118] T.J. HARVEY, R.J.K. WOOD, and H.E.G. POWRIE. Electrostatic wear monitoring of rolling element bearings. *Wear*, 263, 2007.
- [119] J.A. HENEAO-SEPULVEDA, M. TOLEDO-QUÍÑOLES, and Y. JIA. Contactless monitoring of ball bearing temperature. *Instrumentation and Measurement Technology Conference*, 2005.
- [120] HEWLETT-PACKARD. Bearing runout measurements. *Application Note 243-7. HP Co*, 1995.
- [121] HEWLETT-PACKARD. The fundamentals of signal analysis. *APPLICATION NOTE 243. HP CO*, 1995.
- [122] HEWLETT-PACKARD. Effective machinery measurements using dynamic signal analyzers. *Application Note 243-1. HP Co*, 1997.
- [123] HEWLETT-PACKARD. The fundamentals of modal testing. *Application Note 243-3. HP Co*, 1997.
- [124] N. B. HIGBIE. Automatic fault detection in machinery. *Proc. 1st Intenational Machinery Monitoring Diagnosis Conference*, Sept. 1989.
- [125] D. HO and R.B. RANDALL. Optimization of bearing diagnostic techniques using simulated and actual bearing fault signals. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 14(5), 2000.

-
- [126] G. HOLLOX, A. VOSKAMP, and E. IOANNIDES. Cálculo absoluto de duración de componentes de rodamientos. *Revista de rodamientos (SKF)*, 231 (1), 1987.
- [127] H.R. HONARVAR and H.R. MARTIN. New statistical moments for diagnostics of rolling element bearings. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 119, 1997.
- [128] L. HOUPER and P. LEENDERS. A study of mixed lubrication condition in modern deep groove ball bearings. *Proc. of the 11th Leeds-Lyon Symposium*, 1984.
- [129] L. HOUPER and P. LEENDERS. A theoretical and experimental investigation into rolling bearing friction. *Proc. of Eurotrib Conference, Lyon, France*, 1985.
- [130] I. HOWARD. A review of rolling element bearing vibration: Detection, diagnosis and prognosis. *DSTO-AMRL report, DSTO-RR-00113*, 1994.
- [131] I. HOWARD and N.S. SWANSSON. Demodulating high frequency resonance signals for bearing fault detection. *IEAust. Vibration and Noise Conference, Melbourne*, 1990.
- [132] IDAE. Diseño y cálculo del aislamiento térmico de conducciones aparatos y equipos.
- [133] Land Instruments International. Guía básica a la termografía.
- [134] Norma ISO. 10816-1:1995. *Mechanical vibration - Evaluation of machine vibration by measurements on non-rotating parts - Part 1: General guidelines*.
- [135] Norma ISO. 10816-2:2001. *Mechanical vibration - Evaluation of machine vibration by measurements on rotating shafts - Part 2: Land-based steam turbines and generators in excess of 50 MW with normal operating speeds of 1 500 r/min, and 3 600 r/min*.
- [136] Norma ISO. 10816-3:1998. *Mechanical vibration - Evaluation of machine vibration by measurements on non-rotating parts - Part 3: Industrial machines with nominal power above 15 kW and nominal speeds between 120 r/min and 15000 r/min msrd in situ*.
- [137] Norma ISO. 10816-4:1998. *Mechanical vibration - Evaluation of machine vibration by measurements on non-rotating parts - Part 4: Gas turbine driven sets excluding aircraft derivatives*.
- [138] Norma ISO. 10816-5:2000. *Mechanical vibration - Evaluation of machine vibration by measurements on non-rotating parts - Part 5: Machine sets in hydraulic power generating and pumping plants*.
- [139] Norma ISO. 10816-6:1995. *Mechanical vibration - Evaluation of machine vibration by measurements on non-rotating parts - Part 6: Reciprocating machines with power ratings above 100 kW*.
- [140] Norma ISO. 12044: 1995. *Rolling bearings - Single-row angular contact ball bearings - Chamfer dimensions for outer ring non-thrust side*.
- [141] Norma ISO. 13374-1:2003. *Condition monitoring and diagnostics of machines - Data processing, communication and presentation - Part 1: General guidelines*.
- [142] Norma ISO. 13380:2002. *Condition monitoring and diagnostics of machines - General guidelines on using performance parameters*.
-

- [143] Norma ISO. 16799: 1999. *Rolling bearings - Dynamic load ratings and rating life - Discontinuities in the calculating of basic dynamic load ratings.*
- [144] Norma ISO. 1925: 2001. *Mechanical vibration - Balancing - Vocabulary.*
- [145] Norma ISO. 2041:1990. *Vibration and shock - Vocabulary.*
- [146] Norma ISO. 3290: 2001. *Rolling bearings - Balls - Dimensions and tolerances.*
- [147] Norma ISO. 5593: 1997. *Rolling bearings - Vocabulary.*
- [148] Norma ISO. 5753: 1991. *Rolling bearings - Radial Internal Clearance.*
- [149] J.C. JAEGER. Moving sources of heat and the temperature at sliding contacts. *Proc. Roy. Soc. NSW*, 76, 1942.
- [150] C. JAMES LI and J. MA. Wavelet decomposition of vibrations for detection of bearing-localized defects. *NDT&E International*, 30, 1997.
- [151] A. JARDINE, D. LIN, and D. BANJEVIC. A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20, 2006.
- [152] A. B. JONES. A general theory for elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions. *Journal of Basic Engineering*, 82 (2), 1960.
- [153] Y. KANG, P. C. SHEN, Ch. Ch. HUANG, S. S. SHYR, and Y. P. CHANG. A modification of the jones-harris method for deep-groove ball bearings. *Tribology International*, 39, 2006.
- [154] J.G. KATTER and J.F. TU. Preventive bearing monitoring in a production environment. *Tribology Transactions*, 39 (4), 1996.
- [155] J.W. KENNEL and S.S. BUPARA. A simplified model of cage motion in angular contact bearings operating in the ehd lubricating regime. *Journal of Lubricating Technology*, 101, 1978.
- [156] A. F. KHAN. Condition monitoring of rolling element bearings: A comparative study of vibration based techniques. *PhD Dissertation, University of Nottingham*, 1991.
- [157] Y. KIM, B. DUK LIM, and W. SUP CHEOUNG. Fault detection in a ball bearing system using a moving window. *Mechanical System and Signal Processing*, 5(6), 1991.
- [158] P.S. KOUNAS, A.D. DIAMARAGONAS, and G.N. SANDOR. The distribution of frictional heat between a stationary pin and a rotating cylinder. *Wear*, 19, 1972.
- [159] HOUPER L. Numerical and analytical calculations in ball bearings. *Proc. of Congres Roulements Toulouse, France*, 57, 1999.
- [160] F. LAFITA and H. MATA. Vibraciones mecánicas en ingeniería. *I.N.T.A.*, 1964.
- [161] W.T. LAI and H.S. CHENG. Temperature analysis in lubricated simple sliding rough contacto. *ASLE Trans*, 128, 1984.

-
- [162] N. LARAQI. Température de contact et coefficient de partage de flux généré par frottement sec entre deux solides. approche nouvelle de la génération de flux. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 35, 1992.
- [163] N. LARAQI. Phénomène de constriction thermique dans les contacts glissants. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 39, 1996.
- [164] N. LARAQI. An exact explicit analytical solution for steady-state temperature of a half space subjected to a circular moving heat source. *ASME J. Tribology*, 125, 2003.
- [165] M. LE-SHEBIRNY and T.P. NEWCOMB. The temperature distribution due to frictional heat generated between a stationary cylinder and a rotating cylinder. *Wear*, 42, 1977.
- [166] R. LEARNED and A. WILLSKY. A wavelet package approach to transient signal classification. *Appl. Comput Harmonic Anal.*, 2, 1995.
- [167] M. LEBOLD, K. McCLINTIC, R. CAMPBELL, C. BYINGTON, and K. MAYNARD. Review of vibration analysis methods for gearbox diagnostics and prognostics. *Proceedings of the 54th Meeting of the Society for Machinery Failure Prevention Technology*, 1-4, 2000.
- [168] Y. LI, S. BILLINGTON, C. ZHANG, T. KURFESS, S. DANYLUK, and S. LIANG. Adaptative prognostics for rolling element bearing condition. *Mechanical System and Signal Processing*, 13(1), 1999.
- [169] Y. LI, T. KURFESS, S. DANYLUK, and S. LIANG. Stochastic prognostics for rolling element bearings. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 114(5), 2000.
- [170] Y. LI, C. ZHANG, S. DANYLUK, T. KURFESS, and S. LIANG. Diagnostics and prognostics of a single surface defect on roller bearings. *Proc Instr Mech Engrs*, vol. 214, part c, 2000.
- [171] T. C. LIM and R. SINGH. Vibration transmission through rolling element bearings, part i: Bearing stiffness formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 139(2), 1990.
- [172] T. C. LIM and R. SINGH. Vibration transmission through rolling element bearings, part ii: System studies. *Journal of Sound and Vibration*, 139 (2), 1990.
- [173] T. C. LIM and R. SINGH. Vibration transmission through rolling element bearings, part iii: Geared rotor system studies. *Journal of Sound and Vibration*, 151(1), 1991.
- [174] J. LIN and L. QU. Feature extraction based on morlet wavelet and its application for mechanical fault diagnosis. *Journal of Sound and Vibration*, 234(1), 2000.
- [175] F.F. LING and T.E. SIMKINS. Measurement of pointwise juncture condition of temperature at the interface of two bodies in sliding contact. *ASME J. Basic Eng.*, 85, 1963.
- [176] J. LIU, W. WANG, and F. GOLNARAGHI. A ga-based feature optimization technique for bearing fault diagnostics. *International Journal of Computer Science and Network Security*, 7, 2007.
-

- [177] D. LOGAN and J. MATHEW. Using the correlation dimension for vibration fault diagnosis of rolling element bearings. *Mechanical System and Signal Processing*, 10(3), 1996.
- [178] H. K. LORÖSCH. La duración de los rodamientos bajo solicitaciones de carga y condiciones del medio ambiente diferentes. *La Técnica de los Rodamientos (FAG)*, 1, 1981.
- [179] X. LOU and K. LOPARO. Bearing fault diagnosis based on wavelet transform and fuzzy inference. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18, 2004.
- [180] J. MA and C. JAMES LI. Detection of localised defects in rolling element bearing via composite hypothesis test. *Mechanical System and Signal Processing*, 9(1), 1995.
- [181] H.R. MARTIN and F. HONARVAR. Application of statistical moments to bearing failure detection. *Applied Acoustics*, 44, 1995.
- [182] R. L. MARTIN. Detection of bearing malfunctions. *Instrum. Control Sys.*, Dec 1970.
- [183] B. MAZO, B. CASSAGNE, D. BADIE-LEVET, and J.P. BARDON. Etude des conditions de liaison thermique dans le cas du frottement métal-plastique. *Revue Générale de Thermique*, 204, 1978.
- [184] D. MBA and A.M. ALGHAMD. A comparative experimental study on the use of acoustic emission and vibration analysis for bearing defect identification and estimation of defect size. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(7), 2006.
- [185] P. D. McFADDEN and J. D. SMITH. Model for vibration produced by a single point defect in a rolling element bearing. *Journal of Sound and Vibration*, 96(1), 1984.
- [186] P. D. McFADDEN and J. D. SMITH. Vibration monitoring of rolling element bearing by the high frequency resonance technique. *A review. Trib.*, 17(1), Feb. 1984.
- [187] P.D. McFADDEN and J.D. SMITH. The vibration produced by a single point defect on the inner or outer race or rolling elements of a bearing under radial or axial load. *Report CUED/C-Mech/Tr34, Cambridge University Engineering Department*, 1983.
- [188] P.D. McFADDEN and J.D. SMITH. Model for the vibration produced by a single point defect. *Journal of Sound and Vibration*, 96 (1), 1984.
- [189] P.D. McFADDEN and J.D. SMITH. Vibration monitoring of rolling element bearings by the high frequency resonance technique, a review. *Tribology International*, 117(1), 1984.
- [190] P.D. McFADDEN and J.D. SMITH. An explanation for the asymmetry of the modulation sidebands about the tooth meshing frequency in epicyclic gear vibration. *Proceedings of the Institution of Mechanical engineers*, 199(C1), 1985.
- [191] P.D. McFADDEN and J.D. SMITH. The vibration produced by multiple point defects in a rolling element bearing. *Journal of Sound and Vibration*, 98(2), 1985.

-
- [192] C. K. MECHEFSKE and J. MATHEW. Fault detection and diagnosis in low speed rolling element bearings: the use of nearest neighbour classification. *Mechanical System and Signal Processing*, 6(4), 1992.
- [193] C. K. MECHEFSKE and J. MATHEW. Fault detection and diagnosis in low speed rolling element bearings: the use of parametric spectra. *Mechanical System and Signal Processing*, 6(4), 1992.
- [194] C.R. MEEK and L. TRAN. Ball bearing dynamic analysis using computer methods, part i: analysis. *Journal of Tribology*, 118, 1996.
- [195] C.R. MEEKS. Ball bearing dynamic analysis using computer methods and correlation with empirical data. *International Tribology Conference, Melbourne, Australia*, December, 1987.
- [196] C.R. MEEKS and N. FOSTER. Computer simulation of ball bearing dynamics analytical predictions and test results. *Ball Bearing Symposium and Seminar, Orlando, FL*, March 1987.
- [197] T. MOMONO. Rolling bearing stiffness. *NSK Technical Journal*, 669, 2000.
- [198] T. MOMONO and N. BANDA. Sound and vibration in rollings bearings. *Motion and Control*, 6, 1999.
- [199] A. F. MORALES, G.E. y QUIÑONES. Soluciones numéricas para lubricación elastohidrodinámica. *Memorias del XXVIII Congreso de Investigación y Extensión del Sistema ITESM*, enero 1998.
- [200] A. F. MORALES, G.E. y QUIÑONES. Solución numérica del problema de lubricación elastohidrodinámica de contactos circulares rugosos. *Memorias del XXIX Congreso de Investigación y Extensión del Sistema ITESM*, enero 1999.
- [201] J. MOREL. Vibrations des machines et diagnostic de leur état mécanique. *Editions Eyrolles*, 1992.
- [202] N.and YOSHIOKA T. MORI, K.and KASASHIMA and Y. UENO. Prediction of spalling on a ball bearing by applying the discrete wavelet transform to vibration signals. *Wear*, 195, 1996.
- [203] NASA. Effect of ball-race conformity on spinning friction. *NASA*, 1968.
- [204] D. NELIAS. Contribution a l'étude des roulements. modélisation globale des roulements et avaries superficielles dans le contact ehd pour des surfaces réelles ou indentées. *Dossier d'habilitation a diriger des recherches*, 1999.
- [205] D. E. NEWLAND. Vibraciones aleatorias y anÁlisis espectral. *EDITORIAL AC*, 1983.
- [206] N.G. NIKOLAOU and I. A. ANTONIADIS. Demodulation of vibration signals generated by defects in rolling element bearings using complex shifted morlet wavelets. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 16(4), 2002.
-

- [207] N.G. NIKOLAOU and I.A. ANTONIADIS. Demodulation of vibration signals generated by defects in rolling element bearing using complex shifted morlet wavelets. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 16(4), 2002.
- [208] N.G. NIKOLAOU and I.A. ANTONIADIS. N.g. nikolaou, i.a. antoniadis, rolling element bearing fault diagnosis using wavelet packets. *NDT/E International*, 35, 2002.
- [209] N.G. NIKOLAOU and I. ANTONIADIS. Demodulation of vibration signals generated by defects in rolling element bearings using complex shifted morlet, wavelets. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 16 (4), 2002.
- [210] N.G. NIKOLAOU and I. ANTONIADIS. Rolling element bearing fault diagnosis using wavelet packets. *NDT & International*, 35, 2002.
- [211] Y. OHGA, K. MORIGUCHI, S. HONDA, and H. NAKAGAWA. Fault diagnosis system for hydraulic turbine generator. *Transactions of the Institute of Electrical Engineers of Japan, Part B*, 122(4), 2002.
- [212] K. ONO and Y. OKADA. Analysis of ball bearing vibrations caused by outer race waviness. *Journal of vibration and acoustics*, 120(4), october 1998.
- [213] A. V. OPPENHEIM. Signal and systems. *Prentice-Hall International*, 1983.
- [214] A. V. OPPENHEIM. Tratamiento de señales en tiempo discreto. *Prentice-Hall*. 2ª ed, 1999.
- [215] C. C. OSUAGWU and D. W. THOMAS. Effect of inter-modulation and quasi-periodic instability in the diagnosis of rolling element of incipient defect. *Journal of Mechanical Design, Trans. ASME*, 104 (2), Apr. 1982.
- [216] R. PALAS ARENY. Sensores y acondicionadores de señal. *Marcombo*. 2ª edición, 1994.
- [217] A. PALMGREN. Ball and roller bearing engineering. *SKF Industries Inc.*, 1959.
- [218] A. PAPOULIS. Sistemas digitales y analógicos, transformadas de fourier, estimación espectral. *Marcombo*, 1978.
- [219] L. PAPP. Using thermography in dunaferr's maintenance. *Karbantartás és diagnosztika*, 1999.
- [220] M. PATIL, J. MATHEW, and P. RAJENDRAKUMAR. Bearing signature analysis as a medium for fault detection: a review. *ASME, Journal of Tribology*, 130, 2008.
- [221] W.T. PETER, Y.H. PENG, and Y. RICHARD. Wavelet analysis and envelope detection for rolling element bearing fault diagnosis-their effectiveness and flexibilities. *Journal of Vibration and Acoustics*, 123, 2001.
- [222] R.K. PUROHIT and K. PUROHIT. Dynamic analysis of ball bearings with effect of preload and number of balls. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 11(1), 2006.
- [223] L.H. QIU and H.S. CHENG. Temperature rise simulation of three-dimensional rough surface in mixed lubricated contact. *J Tribol*, 120, 1998.

-
- [224] H. RAHNEJAT and R. GOHAR. The vibrations of radial ball bearings. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 199 (C3), 1985.
 - [225] A. RALPH. Heat, bearings and lubrication. *Springer - Verlag*, 2000.
 - [226] J. RANDALL, R. B. and ANTONI and S. CHOBSAARD. The relationship between spectral correlation and envelope analysis in the diagnostics of bearing faults and other cyclostationary machine signals. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(5), 2000.
 - [227] R. B. RANDALL. Cepstrum analysis and gearbox fault diagnosis. *Application notes. Brüel & Kjær. Denmark*, 1987.
 - [228] R. B. RANDALL. Frequency analysis. *Brüel & Kjær. Naerum, Denmark*, 1987.
 - [229] R.B. RANDALL. Hilbert transform techniques in machine diagnostics. *IFTOMM International Conference on Rotordynamics, Tokyo*, 1986.
 - [230] R.B. RANDALL. State of the art in monitoring rotating machinery-part 1. *Sound and Vibration*, 2004.
 - [231] T. REEVES. Failure modes of rolling element bearings. *Technical Report, Computational System Incorporated. (CSI)*, 1998.
 - [232] L. RENDE and T. DEHUA. Using oil analysis to study the wear condition of bearings in trunnion of converter during/after run-in period. *Proceedings of the 5th International Conference on Quality, Reliability and Maintenance QRM*, 2004.
 - [233] E. I. RIVIN. Stiffness and damping in mechanical design. *Marcel Dekker, Inc. New York*, 1999.
 - [234] A. RIVOLA and P. R. WHITE. Use of higher spectra in condition monitoring: simulation and experiments. *ASME Design Engineering Technical Conferences. DETC99/VIB-8332*, 1999.
 - [235] J. C. ROBINSON and J. E. BERRY. Description of peakvue and illustration of its wide array of applications in fault detection and problem severity assessment. *Emerson Process Management Reliability Conference*, October, 2001.
 - [236] C. J. RODA. Catálogo de identificación de averías a través del análisis espectral. (*Tesis Doctoral*) *E.T.S.I.I. U.N.E.D.*, 1995.
 - [237] C. J. RODA, M. ARTES, and J. C. GARCÍA. Detección de daños en cajas de engranajes mediante análisis de espectros selectivos de vibración. *CIDIM 97, La Habana*, 1997.
 - [238] R. RUBINI and U. MENEGHETTI. Application of the envelope and wavelet transform analyses for the diagnosis of incipient faults in ball bearings. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(2), 2000.
 - [239] H. RUBIO. Caracterización de defectos localizados en sistemas mecánicos rotativos mediante análisis de vibraciones. *Tesis doctoral. Universidad Carlos III de Madrid*, Madrid, 2003.
-

- [240] H. RUBIO, J.C. GARCIA, and E. LANIADO. Dynamic analysis of rolling bearing system using lagrangian model vs. fem code. *12th IFToMM World Congress, Besançon (France)*, June 2007.
- [241] C. SALOMON. Verfahren zur bearbeitung von metallen oder bei einer bearbeitung durch schneidende werkzeuge von sich a"hnlich verhaltenden werkstoffen. *Deutsches Patent Nr. 523594*, April 1931.
- [242] B. SAMANTA and K. AL-BALUSHI. Artificial neural network based fault diagnostics of rolling element bearings using time-domain features. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17, 2003.
- [243] M. SARABGI, MAJUNDAR B. C., and SEKHAR A. S. On the dynamics of elastohydrodynamic mixed lubricated ball bearings. part i: formulation of stiffness and damping coefficients, proceedings of the imeche. *Journal of Engineering Tribology*, 219(J), 2005.
- [244] M. SARABGI, MAJUNDAR B. C., and SEKHAR A. S. On the dynamics of elastohydrodynamic mixed lubricated ball bearings. part ii: non-linear structural vibration, proceedings of the imeche. *Journal of Engineering Tribology*, 219(J), 2005.
- [245] N. SAWALHI and R.B. RANDALL. Spectral kurtosis optimization for rolling element bearings. *ISSPA conference, Sydney, Australia*, 2005.
- [246] N. SAWALHI, R.B. RANDALL, and H. ENDO. Gear and bearing fault simulation applied to diagnostics and prognostics. *Proceedings of the 19th International Congress and Exhibition on Condition Monitoring and Diagnostic Engineering Management (COMADEM)*, 2006.
- [247] N. SAWALHI, R.B. RANDALL, and H. ENDO. Simulating gear and bearing interactions in the presence of faults. *7th IFToMM Conference on Rotor Dynamics*, 2006.
- [248] M y otros. SERRIDGE. Piezoelectric accelerometers and vibrations preamplifiers handbook. *Brüel & Kjær*, 1986.
- [249] L. SHI, R. B. RANDALL, and J. ANTONI. Rolling element bearing fault detection using envelope spectrum based on wavelet transform and spectral kurtosis. *IMEchE Conf. Vib. In Rot. Mach., Swansea*, 2004.
- [250] J. E. SHIGLEY and C. R. MISCHKE. Diseño en ingeniería mecánica. *McGraw-Hill*. 5ª edición, 1990.
- [251] M.and OSORIO A. y CORTIZO J. L. SIERRA, J. M.and CADENAS. El análisis espectral aplicado a máquinas rotativas, banco de ensayos. *XIV CNIM, Anales de Ingeniería Mecánica. Madrid*, 2000.
- [252] V. SIMON. Thermal elastohydrodynamic lubrication of rider rings. *J Tribol*, 106, 1984.
- [253] SKF. Catálogo general.
- [254] SKF. Manual skf de mantenimiento de rodamientos.

-
- [255] SKF. Early warning fault detection in rolling element bearings using microlog enveloping. *Aplication Note CM3021-EN*, 1996.
- [256] SKF. Acceleration envelope in paper machines. *Aplication Note CM3024*, 1997.
- [257] SKF. Identifying the stages of bearing damage. *Revolutions*, 7(3), 1999.
- [258] SKF. Vibration diagnostic guide. *CM5003. SKF Condition Monitoring*, 2000.
- [259] S. S. SOLIMAN and M. D. SRINATH. Continuous and discrete signals and systems. prentice-hall international.
- [260] J. SOPANEN and A. MIKKOLA. Dynamic model of a deep-groove ball bearing including localized and distributed defects. part 1: theory. *Multi-body Dynamics*, 217, 2003.
- [261] J. SOPANEN and A. MIKKOLA. Dynamic model of a deep-groove ball bearing including localized and distributed defects. part 2: implementation and results. *Multi-body Dynamics*, 217, 2003.
- [262] L-E. STACKE and D. FRITZSON. Dynamic behaviour of rolling bearings: simulations and experiments proceedings of the institution of mechanical engineers - part j - journal of multi-body dynamics; vol. 215, pp. 499-508 (2001).
- [263] L-E. STACKE and D. FRITZSON. Simulation of rolling element bearings. *SKF Notes*, October, 1999.
- [264] D. STEFANOIU and F. IONESCU. Mathematical models of defect encoding vibrations. *A Tutorial. ARA Journal*, 25, 2002.
- [265] J.L. STEIN and J.F. TU. A state-space model for monitoring thermally-induced preload in anti-friction spindle bearings of high-speed machine tools. *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, 116 (3), 1994.
- [266] Y. SU and S. LIN. On initial fault detection of a tapered roller bearing: Frequency domain analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 155, 1992.
- [267] Y.T. SU and S.J. LIN. On initial fault detection of a tapered roller bearing: frequency domain analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 155, 1992.
- [268] M. Subrahmanyam and C. Sujatha. Using neural networks for the diagnosis of localized defects in ball bearings. *Tribology International*, 30, 1997.
- [269] G. SUN, A. PALAZZOLO, A. PROVENZA, C. LAWRENCE, and K. CARNEY. Long duration blade loss simulations including thermal growths for dual-rotor gas turbine engine. *Journal of Sound and Vibration*, 316, 2008.
- [270] Q. SUN and Y. TANG. Singularity analysis using continuous wavelet transform for bearing fault diagnosis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 16(6), 2002.
- [271] Q. SUN and Y. TANG. Singularity analysis using continuous wavelet transform for bearing fault diagnosis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 16 (6), 2002.
-

- [272] B. SZROM. Low speed bearing analysis. *MVMA proc.*, 1987.
- [273] N. TANDON and A. CHOUDHURY. An analytical model for the prediction of the vibration response of rolling element bearings due to a localized defect. *Journal of Sound and Vibration*, 205(3), 1997.
- [274] N. TANDON and A. CHOUDHURY. A review of vibration and acoustic measurement methods for the detection of defects in rolling element bearings. *Tribology International*, 32, 1999.
- [275] N. TANDON and A. CHOUDHURY. A review of vibration and acoustic measurement methods for the detection of defects in rolling elements bearings. *Tribology International*, 32, 1999.
- [276] N. TANDON and B. C. NAKRA. Vibration and acoustic monitoring techniques for the detection of defects in rolling element bearings: a review. *The Shock and Vibration Digest*, 24(3), 1992.
- [277] J. I. TAYLOR. Identification of bearing defects by spectral analysis. *Transactions of ASME, Journal of Mechanical Design. New York*, 102(2), 1987.
- [278] J. I. TAYLOR. The vibration analysis handbook. *Published by Vibration Consultants, Inc.*, 1994.
- [279] W. T. THOMSON. Theory or vibration with applications. *Prentice Hall. Fourth edition*, 1993.
- [280] X.F. TIAN and F.E. KENNEDY. Maximum and average flash temperature in sliding contacts. *J Tribol*, 116, 1994.
- [281] M. TIWARI, K. GUPTA, and PRAKASH O. Dynamic response of an unbalanced rotor supported on ball bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 238(5), 2000.
- [282] M. TIWARI, K. GUPTA, and PRAKASH O. Effect of radial internal clearance of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 238(5), 2000.
- [283] M. TIWARI, K. GUPTA, and PRAKASH O. Experimental study of a rotor supported by deep groove ball bearing. *International Journal of Rotating Machinery*, 8(4), 2002.
- [284] P. W. TSE and D. P. ATHERTON. Prediction of machine deterioration using vibration based fault trends and recurrent neural networks. *Journal of vibration and acoustics*, 121(3), july 1999.
- [285] C.T. WALTERS. The dynamics of ball bearings. *Journal of Lubricating Engineering*, 93, 1971.
- [286] C. WANG and R.X. GAO. A virtual instrumentation system for integrated bearing condition monitoring. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 49 Issue: 2, April 2000.

-
- [287] H. WANG and P. CHEN. Fault diagnosis for a rolling bearing used in a reciprocating machine by adaptive filtering technique and fuzzy neural network. *WSEAS TRANSACTIONS on SYSTEMS ISSN:1109-2777*, Issue 1, Volume 7, January 2008.
 - [288] W.Y. WANG and M.J. HARRAP. Sync-period frequency analysis and its application to the diagnosis of multiple element defects of rolling bearings. *Tribotest Journal*, 5, 1998.
 - [289] Y. WANG, Y. JIA, Q. CHEN, and Y. WANG. A pasive wireless temperaturw sensor for harsh enviroment applications. *Sensors*, October 2008.
 - [290] Y. F. WANG and P. J. KOOTSOOKOS. Modeling of low shaft speed bearing faults for condition monitoring. *Mechanical System and Signal Processing*, 12(3), 1998.
 - [291] J.A. WENSING. On the dynamics of ball bearings. *PHD THESIS, UNIVERSITY OF TWENTE, ENSCHEDE, THE NETHERLANDS*, DECEMBER 1998.
 - [292] X.and BILLINGTON S. WILLIAMS, T.and RIBADENEIRA and T. KURFESS. Rolling element bearing diagnostics in run to failure lifetime testing. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(5), 2001.
 - [293] W. WU, X.and CHEN J.and WANG and Y. ZHOU. Multi-index fusion based fault diagnosis theories and methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(5), 2001.
 - [294] M. XU. Spike energy measurement and case histories. *ENTERACT 99 Home.*, 1999.
 - [295] Y. YAN and T. SHIMOGO. Application of the impulse index in rolling element bearing fault diagnosis. *Mechanical System and Signal Processing*, 6(2), 1992.
 - [296] D.-M. YANG and J. PENMAN. Intelligent detection of induction motor bearing faults using current and vibration monitoting. *COMADEN*, 2000.
 - [297] J. YEAU-REN and H. PAY-YAU. Predictions of temperature rise for ball bearing. *Tribology Transactions*, 45(1), 2003.
 - [298] J. YI, J. HENAO-SEPULVEDA, and M. TOLEDO-QUINONES. Wireless temperature sensor for bearing health monitoring. *Proc. of SPIE 5391*, 2004.
 - [299] C.T. YIAKOPOULOS and I.A. ANTONIADIS. Wavelet based demodulation of vibration signals generated by defects in rolling element bearings. *Shock and Vibration*, 9, 2002.
 - [300] R. ZEILLINGER and H. KOTTRISCH. Damping in a rolling bearing arrangement. *Arrangement. Evolution, issue 1/96*, 1996.
 - [301] L. ZENG and L. WANG. Machine-fault classification: a fuzzy aproach. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 6, 1991.
 - [302] S. ZHANG, L. MATHEW, L. MA, and Y. SUN. Best basis-based intelligent machine fault diagnosis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 19, 2005.
 - [303] X.P. ZHANG, H. AHMED, and Z. YAO. Multi-body contact modeling and statistical experimental validation for hub-bearing unit. *Tribology Internacional*, 36, 2003.
-

- [304] J.X. ZHAO, F. SADEGHI, and M.H. HOEPRICH. Analysis of ehl circular contact start up: part 2-surface temperature rise model and results. *J Tribol*, 123, 2001.
- [305] G. T. ZHENG and P. A McFADDEN. Time-frecuency distribution for analysis of signals with transient components and its application to vibration analysis. *Journal of vibration and acoustics*, 121(3), 1999.
- [306] D. ZHU and S.Z. WEN. A full numerical solution for the thermoelastohydrodynamic problem in elliptical contacts. *J Tribol*, 106, 1984.

